U.D.C. 72.011.1

清水建設研究所報
第1号昭和37年4月

13

13 間取り——長方形分割の記号論 (1)

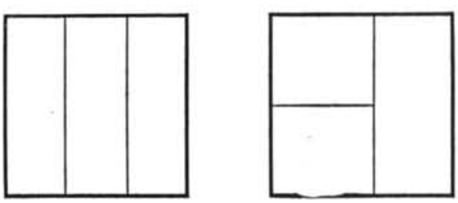
清 水 達 雄

目 次

§0. 問 題 と 背 景

長方形を, いくつかの長方形に, 分割する仕方には, どんな種類があるか. もれなく, 重複なく, それを完全に列挙分類すること. ただしここで, 長方形について, 寸法というものは考えない. 寸法だけちがうのは, 分割の型として, 同一と考える. また, 分割図の向きないし置き方の, 区別もしないものとする.

はじめの長方形についても, 縦・横の寸法を考えないから, それを単位正方形と思ってもよい. いまこれを, たとえば二つの長方形に分割するのに, 半々に分ける, 七・三に分ける, などの区別をしないし, また縦わり・横わりの区別も考えない. したがって, 2分割の型は, ただ1種, ということになる. また, 3分割の型ならば2種.



以下, 4分割の型は, 5分割の型は, とたずねてゆくことを, 問題とする. 分割数をふやすにしたがって, 型の種類もふえてゆく. 事情は, いわば組み合わせ論的だから, 種類のふえ方は急で, 列挙分類の仕事は, すでに5分割あたりから, めんどうになる.

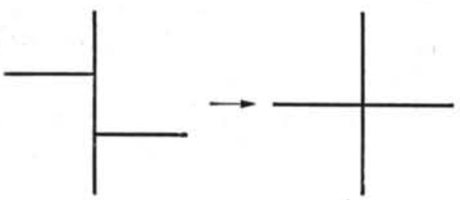
いちいち図をかくのに代わる, 適当な記号法がほしくなるし, さらには, 電子計算機の利用ということも, 考えられてくる. この, 電子計算機にもかけられるような

記号法が，もしつくれたとするならば，いろいろとまた重宝であるにちがいない．

建築の平面図――それは，ふつう，長方形を基調とする．全体の形が長方形で，それがまた長方形の，室や通路などに，分割されている．この分割の型，つまり間取りが，記号化され，計算機にかけられることになる．

ところで，建築では，柱や梁が，ふつう格子状にならんでおり，壁ないし間仕切り，長方形分割線が，この格子にしたがって引かれている．そこで一般に，田の字，ないし分割線の十字交差が，しばしば現われる．しかし分割型の分類を理論化しようとする場合，この十字交差は，ありがたくない．その事情のくわしくは，以下，本論の進むにしたがって，おのずと明らかにされよう．

さしあたりまず，十字交差は，二つのT字交差の合致した特殊の場合，とみなされることを注意しておく．



以下では，問題を

十字交差をもたない分割型

に，一応限定する．その範囲で，分類理論を組み立て，そのあとで，十字交差のとり入れを考えることにする．

もっとも，分類法は，一義的のものでない．本論のゆき方とは反対に，十字交差ばかりの，方眼状の分割を，むしろ基本にとってもよい．その分割線分の，一部分を消し，一部分だけを生かすことによって，一般の分割型がみちびける．こういう立場は，しかし，**間取り論**というよりは，**間仕切り論**というほうが，ふさわしい．間仕切りの在る位置を，柱の配列との関連において示す，この立場については，構造計算の自動化という方面から，別に改めて論じよう．

その間仕切りといった，構築体ではなく，間そのものないしその連接関係を主題とする，平面計画総論にとっては，本論でのべる記号法のゆき方が，おそらく適切と考える．

さらにいえば，間取り論的な本論の記号法と，間仕切り論的な記号法との，相互関係を，自動翻訳の計算プログラムの形で与えることも，可能と思われる．いいかえれば，平面計画論的と，構造力学的との，二つの接近方法を綜合して，設計を計算機にかけることも，おそらく不可能ではない．そのような，夢に向って，では，本論に進むことにする．

1　幾何学的分析と構成

§1．幾何学的分析（1）素因子分解および転置

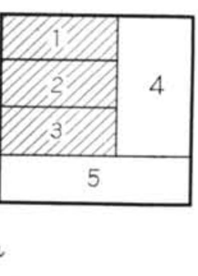
さて，分類に当たっては，原子論的な，つぎの観点をとる．すなわち，複雑なものは単純な要素に分析し，要素の組み合わせとして総体を理解する．

長方形を，いくつかの長方形に分割した，図形で，十字交差のないもの．以下これを，単に分割図とよぶ．その分析の第一歩として，部分分割図に着目する．

定義 1　ある分割図Aの，一部分として，分割図Bがふくまれるとき，BはAの**部分分割図**，という．記号で

$B \subseteq A$

たとえば，図の5分割図Aで，左上の斜線部，長方形1・2・3をひとまとめにしたものは，ひとつの長方形になる．というよりは，長方形を目の字に3分割した，分割図になっている．これをBとすれば，斜線部としてAにふくまれ



$B \subseteq A$

またここで，長方形1・2・3・4をまとめても，長方形になるから，この4分割図をCとすれば

$C \subseteq A$

さきのBは，このCの部分にあたるから，同時にまた

$B \subseteq C$

こういうとき

$B \subseteq C \subseteq A$

と，つずけ書きしてよい．

なお，長方形1・2・3・4・5をまとめた，Aそのものをも，部分と考え

$A \subseteq A$

を，ゆるすことにする．そうして

$B \subseteq A$ で $A \neq A$

を，とくに明示するためには

$B \subset A$

とかく．このとき，BはAの真部分図，という．

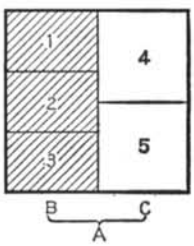
ところで，部分図のどれもが重要なわけではない．重要なものとして，二つの種類，素因子と局大部分図を，以下で定義する．まず

定義 2　分割図Aから，その部分分割図Bを，とりさったのこりが，やはり部分分割図になるとき，BをAの因子という．このとき，残りの部分Cもまた，Aの因子になるが，それを（AにおけるBの）余因子という．

具体的にいえば，Aが，BとCとに二分されることを，いみしている．だから逆に，このときAは，BとCとから合成されている．標語的に

$A = B + C$

しかし，いきなりこう書いてしまっては話が不正確になる．まず，二分といって，縦割りと横割りとの，区別がある．



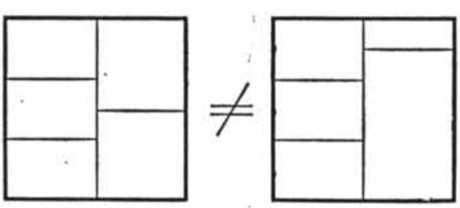
そして，BとCとを並べるのに，順序がある．便宜上，左横書き本位に，

定義 3　分割図Aが，因子Bと余因子Cとを，横に，この順で左から右へ，並べたものになっているとき

$A \approx B + C$

とかき，AはBとCに**和分解**される，という．

ここで，等号＝のかわりに，≈記号を使ったのは，つぎの理由による．たとえば，目の字の3分割図Bと，日の字の2分割図Cとを，左右に並べた図といっても，それは一定に定まらない．日の中線が，目のどこにくるかによって，全体としての分割型が変ってくる．



このように，BとCとを与えても，

$B + C = A$

が定まるわけではない．与えられたAの和分解

$A \approx B + C$

というだけのもので，この右辺から左辺へもどるには，のちにのべるような，別の指定がいる．

この和分解は，また，項が三つ以上のものに，ひろげて考えられる．つまり

$A \approx B + X,\ X \approx C + D$

と分解されれば，

$A \approx Y + D,\ Y \approx B + C$

のようにも分解され，その逆も真で，この関係を一度に

$A \approx B + C + D$

で示すことができる．具体的にいえば，分割図Aが，縦割りに3分されて，左から右へ，B，C，Dを並べたものになっていることを，いみしている．

定義 4　分解図Aの和分解

$A \approx A_1 + \cdots + A_n$

で，とくにどの A_i も，もはや和分解されないものを，**素因子分解**という．それは一意的で，これに現われる A_i をAの素因子という．

ここで，素因子の数 $n=1$ の場合をも，ふくめている．つまり，縦割りのできない場合，A自身をAの素因子と考える．この，縦割りが行きづまったところで，こんどは横割りを問題にする．

和記号のかわりに，積記号を使って，上から下へ

$A \approx A_1 \times \cdots \times A_n$

とかく．それでもよいが，のちの記号法との関係上，ここで，転置という概念を導入する．

行列論のほうで，転置というのは

$$\begin{matrix} a & b & c & d \\ k & l & m & n \\ w & x & y & z \end{matrix}$$

のような，長方形なりの文字配列を，

$$\begin{matrix} a & k & w \\ b & l & x \\ c & m & y \\ d & n & z \end{matrix}$$

のように，置き直すことを，いみしている．横の行が縦の列に，縦の列が横の行に，直される．そうして，

左から右へ　が　上から下へ

になると同時に

上から下へ　が　左から右へ

になる．

もしもただ，横を縦に・縦を横に，というだけなら，時計廻りに直角廻転して

$$\begin{matrix} w & k & a \\ x & l & b \\ y & m & c \\ z & n & d \end{matrix}$$

としてもよいし，また，反時計廻りに直角廻転してもよい．しかし，たとえば時計廻り直角廻転の場合

左から右へ　は　上から下へ

になるが

上から下へ　は　右から左へ

となる．

縦・横のいれかえで，左右と上下とが，ちようどいれかわるのが，転置の特色になっている．そこで，転置の場合には，一度転置したものを，さらに転置すると，はじめの配列にもどることになる．

$$\begin{matrix} a\ b \cdots \\ k \\ \vdots \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} a\ k \cdots \\ b \\ \vdots \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} a\ b \cdots \\ k \\ \vdots \end{matrix}$$

文字配列が，とくに正方形なりの場合，転置とは，主対角線つまり左上隅から右下隅へ引いた対角線，を軸としての，その正方形の裏返し，に相当する．

$$\begin{matrix} a & b & c \\ k & l & m \\ w & x & y \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} a & k & w \\ b & l & x \\ c & m & y \end{matrix}$$

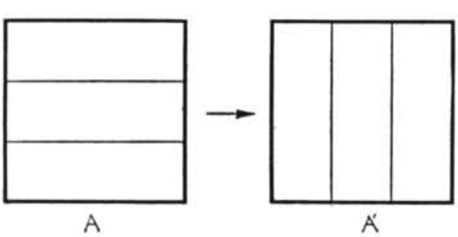
対角線での裏返しだから，転置の転置，裏返しの裏返しで，もとの状態に復帰する．

さて，長方形の分割図に対しても，この転置を考えよう．

定義 5　分割図Aを，正方形とみなし，その（左上隅から右下隅へ引いた）主対角線を軸として，裏返してえられる，分割図を，Aの**転置**という．記号で

A'

分割図Aの，横割りの分割に対しては，Aの転置A'の縦割りの分割が，対応する．



転置したA'が

$$A' \approx A_1 + \cdots + A_n$$

と和分解されることと，Aそのものが，上から下へ

$$A \approx A_1' \times \cdots \times A_n'$$

と，分解されることとは，完全に対応する．だから，横割りの分解というものを，独立に定義する必要はない．

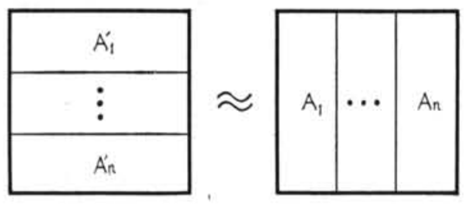
転置したA'が縦割りに和分解されること

$$A' \approx A_1 + \cdots + A_n$$

いいかえれば，Aが，和分解の転置であることを

$$A \approx (A_1 + \cdots + A_n)'$$

と示せばよい．



以上で，分割図の分析の，一つの手法が，たてられたことになる．つまり，与えられた分割図を，まず素因子分解する．つぎに，その素因子のおのおのを，転置して素因子分解する．その素因子を転置しておいて，これをさらに素因子分解する．等等．

定義 6　分割図Aの，素因子を転置したのものの素因子の転置を，Aの2次素因子という．その，素因子を3次素因子，また2次素因子を4次素因子という．以下おなじようにして，一般にn次素因子を定義する．

しかし，あまり高次の素因子まで，考える必要はないこの分解は，どこかでゆきどまり，そのさきは，素因子分解といっても，実は

$$X \approx X_1$$

のような，それ自身が素因子という，変わりばえのないものになる．

もともと，素因子というのは，縦割りをゆるさない．また2次素因子は，横割りをゆるさない．だから一般に高次素因子は，縦割り・横割りの一方をゆるさない．それが，もう一方向にも，分割されないとすれば，縦にも横にも割れないことになって，分解がゆきづまる．ゆきづまらない，そのうちは，実際に真部分図へと，つねに分解されていなければならない．真部分図に分解されるとすれば，分解まえには，その真部分図よりも余分に，長方形をふくんでいる．2回分解されるなら，余分にす

くなくも2箇．だから，はじめには，すくなくも3箇の長方形をふくんでいる．一般に，すくなくもn箇の長方形をふくむのでなければ，素因子は，$n-1$ 回の真の分解をゆるさない．n次素因子までを,考える必要がない．

けっきょく，はじめの分割図Aが，n箇の長方形への分割であるとき，n次素因子まで考えれば充分で，一般にはn次以下のあるm次のところで，分解が完了する．

定義 7 分割図Aの素因子分解は，長方形数以下のある次数で，実質的に完了し，それから先は，分解といっても，おなじもののくりかえしとなるが，この安定した段階のものを，安定素因子分解という．またその場合の素因子を，安定素因子という．

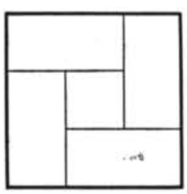
要約すれば，縦割り・横割りをくりかえしていって，ついに縦にも横にも割れなくなった，その分析のふるいに残ったのを，安定素因子とする．

定義 8 とくに，安定素因子が，単一長方形ばかりになる場合，Aは**分離型**，という．

この場合には，分析は，終局に達している．しかし，一般には，そこまでゆくと限らない．極端な場合には

定義 9 分割図Aが，それ自身安定素因子で（つまり縦にも横にも割れなくて），しかも単一長方形でないとき，**純非分離型**，という．

この純非分離の実例として「四畳半」あるいは「マンジ型」をあげよう．その，長方形数は5で，純非分離では最小になっている．実際に当たってみると，長方形数が4以下のものは,すべて分離型で，また5の場合にも，このマンジ型以外は，みな分離型になっている．

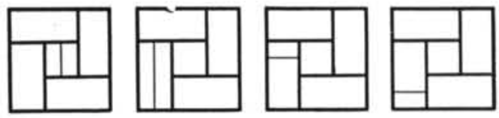


ともかく，このような純非分離型が現われて，分析は立ちどまる．しかし，ゆきづまったのは，素因子分解の手法で，分析の道が，たえたわけではない．

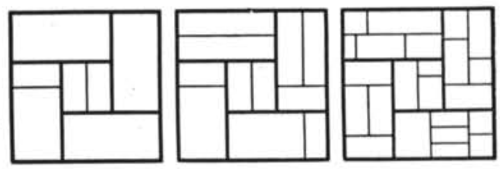
§2. 幾何学的分析 （2） 局大部分図

長方形数が6の場合，純非分離型としては，つぎのものが現われる．

これらは，しかし，マンジ型の変種にすぎない，と一見してわかる．そう見る眼，そう考えてよい根拠を，以



下，明らかにしてゆこう．まず言えることは，マンジ型の，要素長方形を，**再分割**した図，ということ．そのいみで，つぎのような例も，変種にあげられる．



しかし，複雑になってくると，それがマンジの変種であること，マンジ本来の型がそこにあること，が見やすくない．見てわかる，というのでは不十分で，そこに論拠が必要となる．マンジ型（一般にいって，この種の単純な純非分離型）の，要素長方形を，再分割してつくった型．その再分割後の型だけを与えられて，下じきの型を正しく見つけだすことが，はたしてできるのか．できる，ということを，以下，論証する．

一般的にいって，再分割は，たやすい．線を1本ひけばよい．その逆，再分割のつきとめ，分割部分をみつけること，適当な部分分割図をとりだすこと，に主眼がある．部分分割図として，小さなものなら，いろいろある．そうでなくて，十分に大きいもの，下じきの型の要素長方形に達するもの，それをとりだしたい．

定義10 純非分離型分割図Aの，真部分図Bで，十分に大きいもの――このBをふくむ真部分図は，B自身をのぞいて，存在しないものを，Aの**局大部分図**という．

記号でかけば

$B \subset A$　　（Bは Aの真部分）

であって，

$B \subseteq X \subset A$

ならば，実は

$B = X$

のとき，BをAの局大部分図という．

Aの，どんな真部分図も，それが局大でなければ，さらにひろげて，局大部分図にいたらせることができる．なぜならいま，真部分図Bが局大でなければ，定義から

$B \subset B_1 \subset A$

となる，Aの真部分図B_1がある．このB_1も局大でなければ，さらに

$B \subset B_1 \subset B_2 \subset A$

となる，真部分図B_2がある．そうしてこの過程は

$B \subset B_1 \subset B_2 \subset \cdots\cdots$

と，どこまでも続くことは，できない．分割要素の長方形数は有限だから，どこかでゆきづまる．

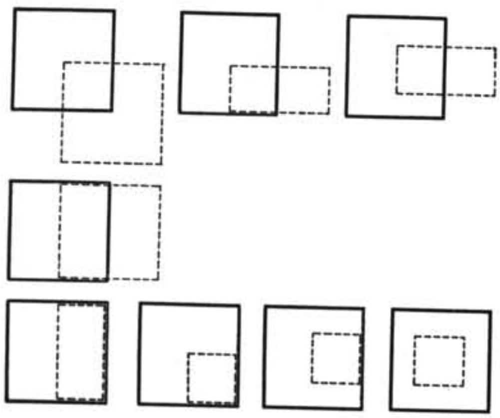
$B \subset B_1 \subset \cdots\cdots \subset B_n \subset A$

で，B_nが局大となる．

とくに，Aの要素長方形一つ一つを，部分図と考えると，それは当然に真部分図だから，どれかの局大部分図にふくまれる．このとき，ある要素長方形が，二つの局大部分図に，共通してふくまれる，ということはない．もっと一般に

定理 1 純非分離型分割図Aの，二つのことなった局大部分図B，Cは，共通部分図をもたない．（ただし，はじめに断ったように，Aは**十字交差をもたない**ものとする）．

なぜなら，まず，二つの部分図B，Cが，共通部分図をもったと仮定してみよう．B，Cの可能な位置関係は



このうち，第1行の3図では，明らかに「十字交差」が現われる．また第3行の4図では，一方が他方をまったくふくむから，ふくまれている方は，局大でありえない残る第2行の図の場合，B，Cの共通部分図をDとすると，たとえば

$B \approx B_1 + D$

$C \approx D + C_1$

のように分解されており，ここでB，Cをいっしょにした部分図をEとすれば

$E \approx B_1 + D + C_1$

このEは，B，Cを真部分図としてふくんでいる．

$B,\ C \subset E$

だから，BなりCなりが局大なら，それをさらにふくむEは，実はA自身でなければならない．とすると

$A \approx B_1 + D + C_1$

と和分解されることになって，Aは純非分離でありえない．Aが純非分離で，十字交差をもたないなら，局大部分図B，Cが，共通部分図をもつことは，ありえない．

そこで，こういうことになる．Aの真部分図，とくに要素長方形に対して，それをふくむ局大部分図が，一つただ一つ存在する．そうして

要素長方形　　局大部分図

$B_1,\ B_2,\ \cdots\cdots \subseteq B$

$C_1,\ C_2,\ \cdots\cdots \subseteq C$

…………………

と，もれなく重複なく，すべての要素長方形が，局大部分図に配当される．ここで

B，C，…

は，局大部分図のすべてを，ちょうどつくしており，Aは，これらを組み合わせてえられる．標語的に

純非分離型＝局大部分図の和

定義11 一般に，分割図Aの，部分図Bを，単一長方形でおきかえることを，AからBを**追いだす**，という．

定義12 純非分離型Aから，そのすべての局大部分図を追い出した型A^*を，Aの下じき型という．

このA^*には，局大部分図，一般に真部分図が，もはや要素長方形だけしかない．なぜなら，A^*の真部分図Bは，追い出しを行なうまえのAの真部分図にもなっており，Aの局大部分図の一つCにふくまれる．このCはA^*では単一長方形におきかえられていて，それがBをふくむ．

$B \subseteq C$

ということは，実は

$B = C$

このように

定義13 分割図Aが，要素長方形以外に真部分図をもたないとき，**単純**という．ここで，A自身が単一長方形の場合は，のぞいていうものとする．

単純ならば，当然，和分解もされないから，純非分離になる．その純非分離一般のうちで，とくにこの単純型が，基本的で

定理 2 (十字交差のない)純非分離型は，その局大部分図全部を組み合わせたもので，これら局大部分図を追い出したあとの，下じき型は単純になる．

逆に，単純型の分割図の要素長方形に，かってな分割図を「代入」してえられる分割図は，純非分離になる．(ただし十字交差は，つくらないものとする)．こうして作った純非分離型の，下じき型は，はじめの単純型と一致する．

なぜなら，代入によって生じた型が，純非分離でなかったとすれば，定義によって，どちらかの方向に和分解される．そのときの分割線は，代入まえには，1本の線としては，存在しなかったのだから，代入で生じたことになる．それは

代入図中の分割線そのもの

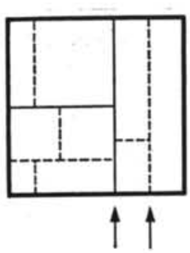
であるか，または

それをつないだもの

ないし

もとの図の分割線をも一部利用したもの

でなければならない．しかし，分割線をつなぐときにはかならず十字交差が生ずるから，第一の場合だけを考えればよい．ところが，代入図中の分割線で，分解されるなら，実は，それを代入するまえの，その要素長方形の辺で，もとの図が分解されることになる．



たとえば，上の図は，矢印のところの，代入図中の分割線で分解されるが，それは代入まえに，矢印のところで分解されている．一般に，ある要素長方形の，内部を貫いて分断できるなら，辺にそって分断できるから．

こういうわけで，単純型への代入は，純非分離型を生ずる．そこで局大部分図を考えると，代入図は，そのどれかにふくまれるから，追い出しによって，すべて消滅する．しかもここで，代入まえが単純型ということから局大部分図と代入図とは一致し，のこされた下じき型ははじめの単純型になる．要するに

純非分離型＝単純型へ代入をおこなったもの

以上で，分割図の幾何学的分析が，一段落ついた．まとめていうと，一般の型は

和分解を，転置をなかだちとして，くりかえすことによって，安定素因子にまで分解される．そうして

安定素因子 { 単一長方形
純非分離型

ここで，純非分離は，追い出しをおこなうと単純になる

純非分離 → 単純
↓
追い出された部分図

この，追い出された図は，ふたたび一般の型になるから，それらに対して，以上の手続きを適用する．こうしてゆくと，けっきょくは

単一長方形 }
単純型

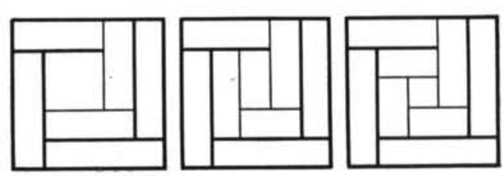
に分解されてしまう．

うらを返していえば，それらのところで，分析が停止する．いま，単一長方形というのを，論外とすれば

分析方法	その停止点
1. 和分解および転置	**純非分離型**
2. 局大部分図分解	**単純型**

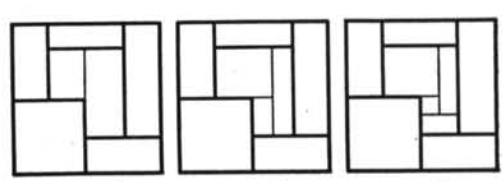
のような関係にある．分析方法1～2を合わせての停止点，単純型こそは，原子とよぶべきもの．

それは，例のマンジ型，分割数 $n=5$ のを最小とし，そのつぎ $n=6$ では存在しないが，$n=7$ からさき，すべての n に対して存在する．たとえば



$n=7$ $n=8$ $n=9$

単純型の実例は，まだまだある．



$n=7$ $n=8$ $n=9$

単純型のすべてを，完全に列挙分類すること．それが幾何学的には，もっとも興味のある問題と思われる．それ以外のことは，ほとんど組み合わせ論的で，いわば代数的といえる．そこにまた，分割図の記号法を組みたてる，道がある．

——補——　一部読者のために（1）

以上，一般の読者のために，ややくわしく，必要な論証はなるべくはぶかずに，また考え方のすじみちをも解説してみてきた．けれども，抽象代数に親しんだ読者ならば，このような概念構成は，ごく自然なものとして，ただちに了解されると思う．要点は

和分解および転置
　　純非分離
局大部分図
　　単純

の四つで，十字交差の禁止によって

純非分離型の局大部分図は交わらない

ことだけを注意すれば，このような読者にはたりよう．

代数系，たとえば群，環，体，束などの，構造論の全般に通ずる発想法，複雑なものを段階を追って単純なものに還元するという，かのデカルトの「精神指導の規則」第5の，適用にほかならない．改めて，理論と称すべきような，ものではない．ことに，単純型をそのまま放置したごとき，これは素朴な観察でしかない．しかし，「規則」第8ではないが，ここで分析を一時停止し，綜合の帰路をたどることにする．それで，分離型に対しては，十分にたりる．

その，分離型に対する，抽象的な記号法．そこに，本論の第一の眼目がある．計算機にかけることを念頭において，何回か改良をはかった結果，それは相当に有力なものとなった．そしてそれとともに，純非分離型に対する，新しい分析方法が生じた．記号法は，型一般に及ぶまで拡張され，と同時に，理論上やや困難なものとなる．本論第二の眼目，その記号法の拡張を，「2辺接着」以下でのべる．そこでは，以上にのべたような素朴な観察が，記号法に即した新しい形に変形されて，改めて使われよう．

なお，ここで，術語について，すこしく補っておく．和分解に対して因子という，用語の組み合わせは，あまり適切でないが，直和因子などという例にしたがった．既約なものへの分解を，素因子分解とよんだのは，一般にもっとも親しまれていることによる．それからすれば積分解とするのがかなうが，分割数が和になるなどの関係から，これは和でないとこまる．

この素因子分解を，高次におよぼしたのは，適切でなかったかもしれない．転置をなかだちとしての分解の続行を，なにもいっせいに行なう必要はない．のちの記号法でも，分解の順序は，別のとりきめにしたがう．表現の短縮をもとめて，造語の集積をまねいたことだけか．安定というのは，位相幾何学の stable による．

分離，これをはじめには，可解(solvable)としたが，すでに回路理論のほうで，これを分離（separable）という由をきいて，改めた．そのついでに，体論の用語にならって，純非分離（purely inseparable）とした．単純（simple）については，改めていうこともない．

局大，これは maximal に相当する．ふつうは，極大としているけれども，局所的の最大だから，いつも局の字をあてている．ついでながら，解析学でいう極限の場合も，現今の立場では，局所に限定して，をいみしている．$x\to a$ は，a に近づいていった極み，ではなくて，a の近傍に局限したとき，をいみする．

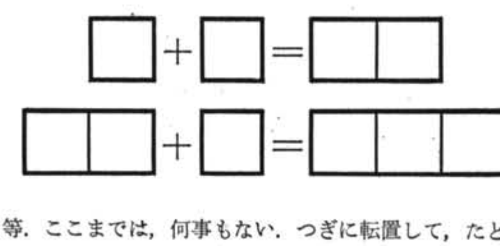
それはともかく，局大部分群，局大イデアルといった概念を，転用できたことは，しあわせであった．

§3．幾何学的構成　接着子，外周と内部

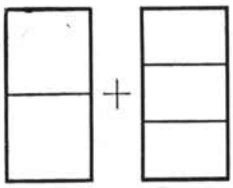
さて，こんどは，分割図の構成，合成法について考えよう．単純型ないし純非分離型をふくむ，一般の場合は，すこしめんどうなので，のちにゆずる．そしてここでは，分離型のはんいで，考えることにする．

分離型というのは，素因子分解と転置を重ねていって，単一長方形に分解されてしまうもの．逆にいえば，単一長方形を，和および転置の方法で，組み合わせていってえられるもの．その，転置については，問題はないが，和については，ここで補足がいる．

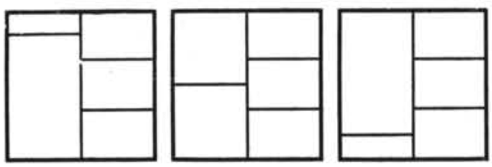
まず，単一長方形を横につないでいって



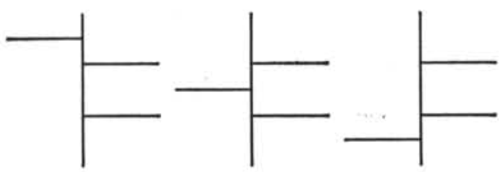
等．ここまでは，何事もない．つぎに転置して，たとえば，日の字と目の字の和をつくる．



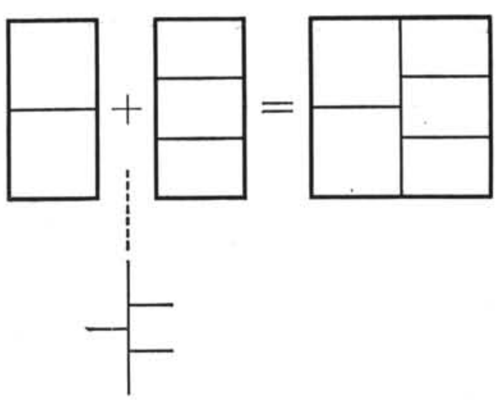
こうなると，場合がわかれてくる．



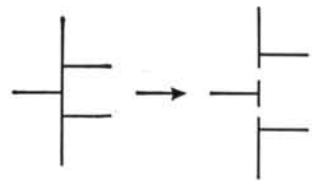
これらを区別するものは，中央の分割線上での，横向き分割線の位置関係で，そこだけに注目をして，つぎのように図示される．



こういう，1本の幹の左右に枝のついた図．これを指定することによって，和の結果が確定する．二つの分割図の，ただ和といわず，どの方式の和かを補足することで，和が本当に確定する．



ところで，この補足の図は，要するに，左右の枝の順序だけを示すものだから，切り離して，つぎのようにかいてよい．



さらに，横書きにして

⊢ ⊣ ⊢

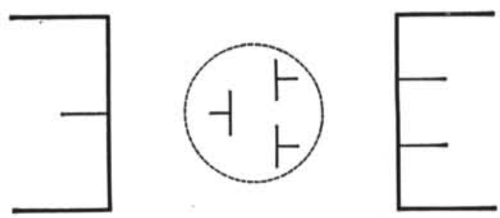
このように，記号化してものを，**接着子**ということにしよう．そのひとつひとつの要素は

⊢ または ⊣

で，それを，いくつかならべる．いくつならべるかというと，和をつくる場合の

左側の図の右辺上の分点数＝⊣の数

右側の図の左辺上の分点数＝⊢の数



そこで一般に，

定義14 分割図Aの，左辺上の分点数を

⊢・A

とかき，右辺上の分点数を

⊣・A

とかく．

定義15 分割図A，Bにたいして，記号

⊣，⊢

の列で，そのなかの

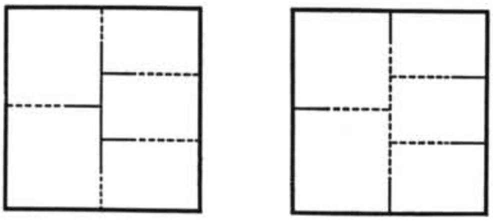
⊣の数＝⊣・A

⊢の数＝⊢・B

となるものを，一般に，このAとBとの接着子という．

そのような接着子のうちの，ひとつを指定することで分割図A，Bの和が，ひとつ確定する．

逆に云って，接着子を変えれば，和の結果は変わってくる．変わってくるわけども，しかし，むやみに変わるわけではない．変わるのは，問題の接着線上の，枝のつきよう，したがって，図の，内部的性質に関している．図の，外周の状況に，変化はない．



外周の状況，外周に表われたかぎりでの，分割図の在りよう，ということは，けっきょく，各辺上の分点数を指す．

左辺上の分点数
右辺上の分点数

など．それは，接着子の指定をまたずに，きまっている．

A＋B

の，たとえば左辺上の分点数は，Aのそれとひとしい．

⊢・A＋B＝⊢・A

接着を何度も重ねた場合にも，同様で，各辺上の分点数というものは，接着子のえらびかたと無関係に，きまってくる．くわしくは，のちに記号法の項でのべるけれども，この分点数は，和および転置の組み合わせ方，そのことだけから，算出される．

このような，接着子を伏せておいても確定するような分割図の性質を，かりに，基礎的性質とよぼう．接着の反対，和分解によって，この接着子がちょうど見失われるのだから，素因子分解の結論だけからきまる性質，といってもよい．

この基礎的性質に，分割図の周囲各辺上の分点数が，属している．しかも，そのとくに

左辺上，右辺上の分点数

が，接着子を規定する．接着子のえらび方という，2次的な性質が，基礎的性質にもとづいて，きめられる．

この関係の，見とおしの上に立って，分離型分割図の記号法を，構成する．

2 分離型の記号法

§4. かっこ記法 (1) その外延と内包

ここで，いよいよ，分割図の記号法にとりかかる．ただし，その第1段階として，分離型だけを考えよう．つまり，和および転置によって生ずる，型だけを考える．一般の場合は，のちに「2辺接着の導入」のあとで，改めて構成することにする．

その分離型の記号法で，はじめには，内部接着の型の差異は，無視しておく．つまり，転置構造を区別するための記号法を，まずこしらえる．ついで，必要な準備をしたうえで，接着の型を差別するための，別の記号を導入する．そういう手順をふむことにする．

さてまず

規則 1 一対の角がっこ

[ ]

は，単一長方形を表わす．

常識的には，ここは記号 □ でも持ち出したいところ，それを，記号の種類を節約するため，以下にのべる転置記号の流用ですました．それが，かえって理論を簡明にするしだいは，じき明らかになる．

この記号を並べて

[ ] [ ]

で，長方形を横に2箇ならべた型，また

[ ] [ ] [ ]

で，3箇ならべた型，をあらわす．一般に

規則 2 型を表わす記号

a，b，c，…

をならべ書きした

$abc\cdots$

は，それぞれの表わす形を，横に，左から右へならべた型を表わす．ここで，接着の型の差異は，無視される．

規則 3 型を表わす記号

a

に対し，これを角がっこでくるんだ

[a]

は，その転置型をあらわす．ただし，2重がっこは，封じておく．つまり，すでに

a＝[b]

で，b が型を表わす記号のとき，この a の転置は

[a]＝[[b]]

とせずに，ただ

b

とする．また，特殊な場合として，単一長方形

a＝[　]

の転置も，a 自身とする．

以上，三つの規則にしたがって，型を表わす記号なるものを考えると，まず（規則1）

[　]

それから（規則2）

[　] [　]

[　] [　] [　]

………

これからさらに（規則3）

[[　] [　]]

[[　] [　] [　]]

………

ふたたび，ならべることによって，たとえば

[　] [[　] [　]]

[　] [[　] [　] [　]]

…………

[[　] [　]] [　]

[[　] [　] [　]] [　]

…………

[[　] [　]] [[　] [　]]

…………

[　] [　] [[　] [　]]

…………

[　] [[　] [　]] [　]

などが，生じてくる．さらに転置をすれば，たとえば

[[　] [[　] [　]]]

など．こうした記号列が，規則1～3から，当然に発生する．そして，このような記号列の，すべてを考えると，それは分離型の――内部接着の差異を無視した場合の，型のすべてを，ちょうどつくすことになる．もともと

分離型＝和分解と転置で，単一長方形に分離

というのが，定義だから．

そこで，これからは，このような記号列そのものを，型とみなすことにする．記号があらわす図を，いちいち思いうかべることなく，記号だけで満足し，記号そのものについてゆく．そうしてこそ，記号法は自立したものとなる．電子計算機にもかかるものとなる．ちょうど解析幾何の計算が，図形的のいみをはなれて，独自に進められるように，記号法を自分の足で歩かせる．

改めて，定義らしくかけば

定義 1　角がっこ [　ないし　] を，いくつかならべたものを，**転置記号列**という．

定義 2　その一般のうちから，とくに，つぎの規則によって，**型**とよばれるものを定める．

（1） [　]は型．

（2） a，b が型なら，ab も型．

（3） a が型なら，[a]も型．ただし，すでに

a＝[b]，b は型

となっている場合，および

a＝[　]

のときを，除外する．

（4） 以上によって当然に型となるものだけが型．

たとえば，記号列

] [

は，型でない．なぜなら，規則(2)(3)によっては，すでに型であるものよりも，記号数の多い型しか生じない．はじめから型として，(1)で定められているのは

[　]

だけで，記号数が2．おなじく記号数2で，これとちがう][は，だから当然には型となりえない．したがって(4)により，型ではない．

またたとえば，記号列

[[　]

も，型ではない．型中の記号数は，かならず偶数だから．というのは，(1)の [　] は，記号数が偶数，(2)で，a と b の記号数が，ともに偶数なら，$a\,b$ の記号数も偶数．(3)で，a の記号数が偶数なら，[a]の記号数も

偶数＋2＝偶数

けっきょく，(1)～(3)からは，記号数が偶数のものしか生じない．

もっとくわしく，型 a 中の

[記号数　＝　]記号数

となることも，すぐわかる．さらに進んで，型

a＝b……

のとき，つまり，a のかってな左方部分 b に対して，そ

の b 中の

［記号数 ≧ ］記号数

これを証明するのに，手数はおなじだから，話をもうすこし一般にしておこう．

定義 2 型の定義1で，(3)のただし書き，つまり2重かっこの禁止を，解除して，**広義の型**を定義する．

（1） ［ ］は広義の型．

（2） a，b が広義の型なら，a b も広義の型．

（3） a が広義の型なら［a］も広義の型．

（4） 以上で当然に広義の型となるものだけが広義の型．

この広義の型に対して，証明をする．ここで

定義 3 転置記号列 a に対し，a 中の

］記号数＝］・a

［記号数＝［・a

］・a－［・a＝ー・a

そうすると，転置記号列 a，b について，もちろん

］・a b＝］・a＋］・b

［・a b＝［・a＋［・b

したがって

ー・a b＝ー・a＋ ー・b

定義 4 転置記号列 a で

（1） ー・a＝0

（2） a＝b c なら ー・b≧0

となるものを，仮に**広義のカタ**という．

そうすれば，証明すべきことは

定理 1 広義の型は，広義のカタ．

さてまず

［・［ ］＝1

］・［ ］＝1

ー・［ ］＝0

そうして，［ ］の左側［に対して

ー・［＝［・［－］・［＝1－0＝1≧0

だから

［ ］は，広義のカタ

つぎに，a，b が広義のカタのとき，a b も広義のカタとなることをいう．仮定から

ー・a＝0

a＝a_1… なら ー・a_1≧0

ー・b＝0

b＝b_1… なら ー・b_1≧0

そうするとまず

ー・ab＝ー・a＋ ー・b＝0＋0＝0

この a b の左側部分というのが，実は a の左側部分 a_1 の場合には，もちろん

ー・a_1≧0

そうでなくて，b の左側部分にまでおよぶとき，

ー・ab_1＝ー・a＋ ー・b_1＝0＋ ー・b_1≧0

だから，a b は広義のカタ．

もうひとつ，a が広義のカタのとき［a］も広義のカタとなることをいう．それも，なんでもない．

ー・［a］＝ー・［＋ ー・a＋ ー・］

＝ー・a＋ ー・［ ］＝ー・a

＝0

ー・［＝1≧0

ー・［a_1＝1＋ ー・a_1≧0

ただし，a_1は a の左方部分とする．

以上から，広義の型つまり，［ ］から(2)・(3)で生ずるものは，すべて広義のカタとなることがわかる．

重要なのは，しかし，この定理1の逆で

定理 2 広義のカタは，広義の型

だから実は，広義の型といってもカタといっても，おなじことになる．結論は，そうなるけれども，意味するところは，型・カタをわけて，はっきりする．広義の型，定義2のほうは，このようにして生ずるものというふうに，構成的に示している．**外延的**といってもよい．それに対して，広義のカタ，定義4では，それがもつべき性質を，直接にいっている．**内包**を示している．その

定義4 の （1)(2）

の性質をもつものが，実は

定義2 の （1)から(2)(3)

の方法で構成されること，それを定理2は主張する．

構成というかわりに，分解・析出といってもよい．

a＝bc

と分解し，もしくは

a＝［b］

と b を析出し，これをくりかえして，けっきょく

［ ］

にまでいたる．証明すべきことの，要点は

広義のカタ a が

a＝bc，b と c は広義のカタ

と分解されなければ

a＝［b］，b は広義のカタ

となるか，または

$$a=[\ \ ]$$

これを証明するため，まず

補題 1 広義のカタ a が

$$-\cdot b=0$$

となる左方部分 b をもてば

$$a=b\ c,\ \ b\text{ と }c\text{ は広義のカタ}$$

と分解される．逆は，もちろん正しい．

なぜなら，a から b をとりさったのこりを c，

$$a=b\ c$$

としたとき，

$$-\cdot a=0$$

$$-\cdot b=0$$

から

$$-\cdot c=0$$

そこで，この b と c とについて，左方部分の性質をいう．まず b の左方部分 b_1 は，a の左方部分にも当たるから

$$-\cdot b_1\geq 0$$

c の左方部分 c_1 については，b とあわせると a の左方部分になるから

$$-\cdot bc_1\geq 0$$

ここで

$$-\cdot bc_1=-\cdot b+\ -\cdot c_1=0+\ -\cdot c_1$$
$$=-\cdot c_1$$

これで，補題1がいえた．そこで，

$$a=b\ c,\ \ b\text{ と }c\text{ は広義のカタ}$$

と分解されない場合を考えると，a のどんな左方部分 a_1 に対しても

$$-\cdot a_1\neq 0$$

もともと

$$-\cdot a_1\geq 0$$

だから，これは

$$-\cdot a_1\geq 1$$

ところで一般に

補題 2 広義のカタ a は，[記号にはじまり，　]記号におわる．

$$a=[\ b\ ]$$

そうして

$$-\cdot b=0$$

ただしここで，特別な場合として，b は記号数0の，空な記号列となることをゆるすものとする．

なぜなら，a の左方部分として，左方第1記号 x をえらべば

$$-\cdot x\geq 0$$

から，

$$x=[$$

また，最後の記号を y とし

$$a=a_1y$$

とすると

$$-\cdot a=0$$

$$-\cdot a_1\geq 0$$

から

$$-\cdot y\leq 0$$

で

$$y=]$$

となるほかはない．

だから，

$$a=[\ b\ ]$$

ここで

$$-\cdot a=0$$

から

$$-\cdot b=0$$

とくべつな場合として

$$a=[\ \ ]$$

いま，そうでないとして，b の左方部分 b_1 を考えると，

$$a=[\ b\ ]=[b_1\cdots$$

から，a の左方部分の

$$-\cdot [b_1\ \geq 0$$

しかし，もし a が分解されなかったとすれば，さきに記したように，

$$-\cdot [b_1\ \geq 1$$

がいえるから，[をはぶいても

$$-\cdot b_1=-\cdot [b_1-1\geq 0$$

そこで

補題 3 広義のカタ a が

$$a=bc,\ \ b\text{ と }c\text{ は広義のカタ}$$

と分解されなければ

$$a=[\ b\ ],\ \ b\text{ は広義のカタ}$$

となるか，または

$$a=[\ \ ]$$

これがいえたから，定理2がいわれる．

§5. かっこ記法 (2)
2重かっこの問題

そこで，いま一歩を進め，本来の型について考えよう．型は，もちろん広義の型，カタになるが，逆に，広義のカタのどのようなものが，型となるか．どういう，内包的の定義を補ったらよいか．**2重かっこ**を，一度でも使った場合に，かならず現われる特性を問題にする．

$$a = \cdots[\,[\,b\,]\,]\cdots$$

補題 4　広義のカタ

$$a = c_1[\,[\,b\,]\,]c_2,$$

で，b が広義のカタなら

$$c = c_1 c_2$$

も広義のカタとなる．逆に，この c と b とが広義のカタなら，上の a も広義のカタとなる．

なぜならまず

$$-\cdot a = -\cdot c_1 + \ -\cdot b + \ -\cdot c_2$$
$$= -\cdot b + \ -\cdot c$$

そこで

$$-\cdot a = -\cdot b = 0$$

なら

$$-\cdot c = 0$$

また

$$-\cdot b = -\cdot c = 0$$

なら

$$-\cdot a = 0$$

あと，左方部分の性質をしらべればよい．

補題の順逆どちらの場合にも，a か c かが広義のカタと仮定されるから，その共通の左方部分については，いうまでもない．とくに

$$-\cdot c_1 \geq 0$$

つぎに，広義のカタ b に対し

$$[[\,b\,]] = d$$

も広義のカタで，その左方部分 d_1 についても

$$-\cdot d_1 \geq 0$$

したがって

$$-\cdot c_1 d_1 \geq 0$$

とくに

$$-\cdot c_1[[\,b\,]] \geq 0$$

しかし，もともと

$$-\cdot [[\,b\,]] = 0$$

だから，これは

$$-\cdot c_1 \geq 0$$

の関係にほかならない．そこでまた

$$-\cdot c_1[[\,b\,]]\,x = -\cdot c_1 x$$

この x を c_2 のかってな左方部分とすれば，それで補題がいわれる．

定義 5　広義のカタで

$$a = c_1[[\,b\,]]c_2,\quad b \text{ は広義のカタ}$$

の形のものを，**重複的**という．ただしここで

$$c_1,\ b,\ c_2$$

は，とくべつな場合として，記号数0の「空な」記号列となることを，ゆるすものとする．

重複的でない広義のカタを，単に，カタという．

補題 5　広義のカタ b，c にたいし

$$a = b\ c$$

は，b と c とがともにカタのとき，このときにかぎってカタとなる．

なぜならまず，b と c の一方が重複的で，たとえば

$$b = d_1[[\,e\,]]d_2,\quad e \text{ は広義のカタ}$$

ならば，

$$a = d_1[[\,e\,]]d_2\,c$$

で重複的になる．つまり a がカタになるとすれば，b と c とのどちらも，重複的でなく，カタ．このときなお

$$a = d_1[[\,e\,]]d_2,\quad e \text{ は広義のカタ}$$

と，重複的になったとする．これを

$$a = b\ c,\quad b \text{ と } c \text{ はカタ}$$

とくらべるのに，いま

$$e = e_1 e_2$$

として

$$b = d_1[[e_1,\ e_2]]d_2 = c$$

としてみよう　カタ e の左方部分だから

$$-\cdot e_1 \geq 0$$
$$-\cdot [[e_1 \geq 2 > 0$$

これと

$$-\cdot d_1 \geq 0$$

とから

$$-\cdot b > 0$$

となってしまう．おなじようにして

$$b = d_1[[\,e\,]]$$

でも

$$-\cdot b > 0$$

したがって

$$b = d_1[[\,e\,]]\cdots$$

しかしこれでは，bが重複的となる．

定義 6　広義のカタで

$a=[b]$，　bは広義のカタ

となるものを，**転置ずみ**という．bは記号数0でよい．

補題 6　広義のカタbにたいし

$a=[b]$

は，bが転置ずみでないカタのとき，このときにかぎって，カタとなる．

なぜならまず，bが重複的ならば，当然にaも重複的となる．そうでなくとも，転置ずみで

$b=[c]$

なら，

$a=[[b]]$

で，重複的となる．したがって，aがカタになるとすれば，bは重複的でないカタ．このときなお

$a=c_1[[d]]c_2$，dは広義のカタ

と，重複的になったとする．これを

$a=[b]$

とくらべるのに，いまc_1，c_2ともに記号数0とすると

$[b]=[[d]]$

から

$b=[d]$

で，転置ずみになってしまう．またc_1，c_2のどちらも記号数0でなければ

$c_1=[\cdots$，　$c_2=\cdots]$

で

$a=[\cdots[[d]]\cdots]$

$b=\cdots[[d]]\cdots$

となって，重複的になる．そこで，

$c_1=[e$，c_2は記号数0

としてみると

$a=[e[[d]]$

$b=e[[d]$

ここで，bとdは広義のカタだから

$-\cdot b=-\cdot d=0$

で

$-\cdot e[=0$

$-\cdot e=-1$

このようなeが，広義のカタbの左方部分になることはない．おなじように，

$a=[[d]]e]$

$b=[d]]e$

のときも

$-\cdot[d]=0$

$-\cdot[d]]=-1$

となって，これではbの左方部分になれない．

これで，問題が片づいた．なお注意として，定義6で転置ずみというのを

$a=[b]$，　bは広義のカタ，または記号数0

としたが，aがカタのときは，いまの補題6により，

$a=[b]$，　bはカタ，または記号数0

といいかえてよい．結果をまとめれば

定理 3　カタ＝型．くわしくいえば，まず

（1）　[　]はカタ

（2）　a，bがカタなら　$a\,b$もカタ（補題5）

（3）　カタaが転置ずみでなければ，つまり

$a=[b]$，bはカタまたは記号数0

でなければ，$[a]$もカタ　（補題6）

逆に，カタaは（補題3）

(2′)　$a=b\,c$，bとcはカタ

と分解される（補題5）か，または

(3′)　$a=[b]$，bは転置ずみでないカタ

となるか（補題6）または

（1）　$a=[\ ]$

ここで，(2′)と(3′)とは，同時には起こらない．

$a=[b]$

の左方部分（$\neq a$）では，つねに

$-\cdot[b_1>0$

これに対し，

$a=b\,c$

では

$-\cdot b=0$

定義 7　カタaで

$a=b\,c$，bとcはカタ

と分解されないものを，**素**（そ）という．

この定義によれば，いま注意したことは

補題 7. 素＝転置ずみ

というのは，素でなくて分解されるものは，転置ずみではないし，また転置ずみでなければ，定理にいうように分解されて素でない．

それから，もっと重要なこととして，カタaの分解

$a=b\,c$，bとcはカタ

は，左方部分bで

$$-\cdot b=0$$

となるものに対して，ちょうど行なわれる（補題1）.

$$a=b\ c=d\ e$$

のように，2通りに分解されることも，もちろんあるが

定理 4　カタ a は（$n=1$ の場合をもふくめて）

$$a=b_1b_2\cdots b_n,$$

と，素なカタへ，ただ1通りに分解される.

こうして，幾何学的分析（1）の考察が，純粋に記号論的に，再現されたことになる.

§6. 型関数（1）加法的型関数

そこでこれから，定理3～4にもとづき，カタ=型にたいして，いくつかの量を定義する. 一般的に

定義 8　型

$$a,\ b,\ \cdots$$

にたいして，それぞれ値

$$f(a),\ f(b),\ \cdots$$

をあたえる規則は，**型関数** f を定めるという. このとき型 a にたいする

$$f(a)$$

を，関数 f の型 a における（での）値などという. それを，かっこ記号をさけて

$$f\cdot a$$

などとかいてもよい.

たとえば，まえの

$$[\cdot a$$

$$]\cdot a$$

$$-\cdot a$$

は，型関数の例になっている. これらは，たとえば

$$-\cdot a\ b=-\cdot a+-\cdot b$$

のような，性質をもっていた. とくに，－の場合

$$-\cdot[a]=-\cdot a$$

以下しばらく，この種の関数をとりあつかう.

定義 9　型 a が，型 b，c に分解されるとき

$$a=b+c$$

とかく. つまり

$$a=b\ c,\quad b \text{ と } c \text{ は型}$$

定義10　型 a が転置ずみで

$$a=[b],\quad b \text{ は型}$$

のとき

$$a=b'$$

反対に

$$b=a'$$

とかく. とくべつな場合として

$$[\ ]'=[\ ]$$

そうすると型 a にたいし，つねに a' が定義されて

$$(a')'=a$$

なぜなら，a が転置ずみでなければ

$$[a]=b$$

が型となって，定義から

$$b'=a,\quad a=b'$$

転置ずみで

$$a=[b]$$

のときは，もちろん

$$a=b',\quad b'=a$$

とくに

$$a=[\ ]$$

のときは

$$a'=a$$

どの場合にも，a' が考えられて

$$a'=b$$

にたいして，

$$b'=a$$

したがって

$$(a')'=a$$

定義11　型関数 f で，

（1）　型 a，b にたいし

$$f(a+b)=f(a)+f(b)$$

（2）　型 a にたいし

$$f(a')=f(a)$$

となるものを，**加法的**という.

たとえば

$$-\cdot a$$

は，加法的な型関数になっている. つまり一般に

$$-\cdot ab=-\cdot a+\ -\cdot b$$

だから，とくに型 a，b にたいして

$$-\cdot a+b=-\cdot a+\ -\cdot b$$

また一般に

$$-\cdot[a]=-\cdot a$$

だからとくに型 a について

$$-\cdot a'=-\cdot a$$

ただし，これはもともと，型aにたいしては，つねに

$$-\cdot a=0$$

となるものだから，わざわざ加法的というほどではない．

定義12 型a

$$a=\cdots\cdots$$

中に，ひきつづく角がっこ対

$$[\ \ ]$$

が，いく対ふくまれるか，その数を

$$[\ \ ]\cdot a$$

とかき，aの**長方形数**という．

たとえば

$$[\ \ ]\cdot[\ \ ]=1$$

$$[\ \ ]\cdot[\ \ ]\ [\ \ ]=2$$

$$[\ \ ]\cdot[\ [\ \ ]\ [\ \ ]\ ]=3$$

など．これは，加法的な型関数になる．というのは，

補題 8 一般に，転置記号列

$$a=\cdots\cdots$$

中に，ある転置記号列

$$f=\cdots\cdots$$

が，何度あらわれるか，その数を

$$f\cdot a$$

とするとき，

$$a=b\ c$$

に対して

$f\cdot a=f\cdot b+f\cdot c-$（$a$を$b$と$c$とに切り離すことによって失われた，$f$の数）

これは，とくに証明するまでもない．問題の

$$[\ \ ]\cdot a$$

の場合，

$$b=\cdots\cdots[,\quad]\cdots\cdots=c$$

のときにかぎって，この切り離しで，一つの

$$[\ \ ]$$

が失われる．しかし，bとcとが型なら，型は

$$[\ \cdots\ ]$$

の形だから，失われることがない．そこで

$$[\ \ ]\cdot b+c=[\ \ ]\cdot b+[\ \ ]\cdot c$$

また

$$[\ \ ]\cdot[a],\quad [\ \ ]\cdot a$$

をくらべるのに，[　]の数が失われるのに

$[a]=[\ \ ]\cdots\cdots\ \ ]$ または

$=[\ \ \cdots\cdots[\ \ ]$

の場合で，これもaが型ならばおこらない．そこで

$$[\ \ ]\cdot a'=a$$

定理 5 加法的な型関数fは，[　]での値

$$f\cdot[\ \ ]=c$$

によって定まり，

$$f\cdot a=c\times[\ \ ]\cdot a$$

なぜなら，

$$a=a_1\cdots\cdots a_n$$

と，素な型に分解したとき

$$f\cdot a=f\cdot a_1+\cdots+f\cdot a_n$$

ここで，素なa_iは転置ずみで

$a_i=[b_i]$，b_iは型または記号数0

そうして

$f\cdot a_i=f\cdot b_i$ または $=f\cdot[\ \ ]$

ここで，型b_iがのこる場合に，それをさらに分解する．

そうしてゆけば，けっきょく

$$f\cdot a=f\cdot[\ \ ]+\cdots\cdots+f\cdot[\ \ ]$$

この和の項

$$f\cdot[\ \ ]$$

の数が，ちょうど，a中の[　]の数

$$[\ \ ]\cdot a$$

になることは，さきほどの考察から保証される．

和分解と転置のもどしとをやっていって残る

[　]の数＝a中の[　]の数

そこで

$$f\cdot a=f\cdot[\ \ ]\times[\ \ ]\cdot a$$

となる．

この定理を，もうすこし一般化しておこう

定義13 型関数fで

（1） 型a，bにたいし

$$f(a+b)=f(a)+f(b)+g$$

ここでgは，ある一定値

（2） 型aにたいし

$$f(a')=f(a)$$

となるものを，**準加法的**という．

系 1 準加法的なfは，gとcとで定まり

$$f(a)=(c+g)[\ \ ]\cdot a\ -\ g$$

ただし　$c=f([\ \ ])$

なぜなら

$$f(a)+g=F(a)$$

とおけば

$$F(a+b)=f(a+b)+g$$

$=f(a)+f(b)+g+g$

$=F(a)+F(b)$

$F(a')=f(a')+g=f(a)+g=F(a)$

だから，定理が適用されて

$F(a)=F([\ \ ])\times[\ \ ]\cdot a$

そうして

$F([\ \ ])=f([\ \ ])+g$

系 2 とくに

$f([\ \ ])=0$

となる，準加法的型関数 f は

$f(a)=g([\ \ ]\cdot a-1)$

これの応用として

補題 9 型 a 中の

] [

記号数を

$]\ [\cdot a$

とすれば

$]\ [\cdot a=[\ \ ]\cdot a-1$

なぜなら，補題8で考えた

$]\ [\cdot a+b=]\ [\cdot a+]\ [\cdot b+$

切り離しで失われる数 g

で，ちょうど

$a=\cdots\cdots]$，$[\cdots\cdots=b$

のため，失われるのは

$g=1$ （一定）

また，あきらかに

$]\ [\cdot[a]=]\ [\cdot a$

そうして

$]\ [\cdot[\ \ ]=0$

だから，系2が適用される

ところで，この

$]\ [\cdot a$

は，a を[ ]にまで分解するうちに現われる，＋記号の数の累計に相当する．というのは

$]\ [\cdot a+b=]\ [\cdot a+]\ [\cdot b+1$

の左辺の＋が，右辺で＋1として数えられ，

$]\ [\cdot[\ \ ]=0$

にいたるから．＋記号数，これは，和の回数，あるいは**接着回数**とよんでもよい．そうすると，

接着回数＝長方形数－1

たとえば，長方形数4ならば

[ ] [ ] [ ] [ ]

[[ ] [ ]] [[ ] [ ]]

[[[ ] [ ]] [ ]] [ ]

など，さまざまな型のどれについても

接着回数( ] [数)＝3

この関係は，幾何学的にも，示される．接着回数とはその分割図をかくのに，単一長方形間に引くべき，分割線の数．そうして，分割線1本を引くごとに，長方形数が1ずつふえ

分割線数＝0，1，2，…

にたいし

長方形数＝1，2，3，…

となるから，

分割線数＝長方形数－1

§7. 型 関 数 (2) 加法公式による構成

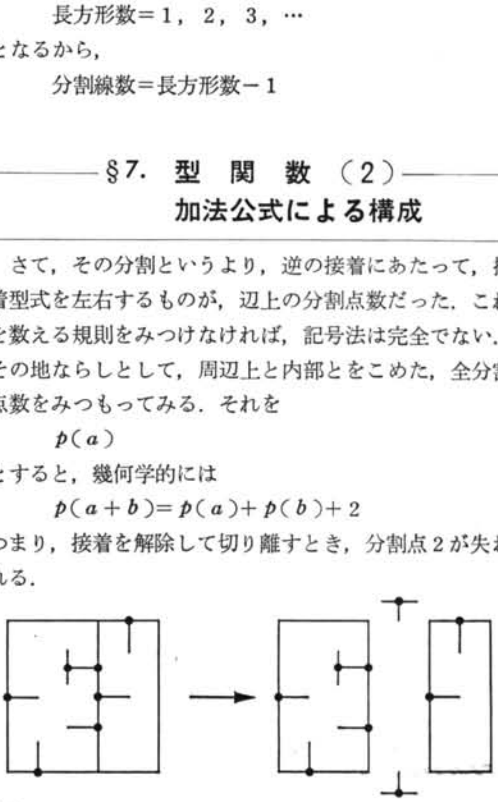
さて，その分割というより，逆の接着にあたって，接着型式を左右するものが，辺上の分割点数だった．これを数える規則をみつけなければ，記号法は完全でない．その地ならしとして，周辺上と内部とをこめた，全分割点数をみつもってみる．それを

$p(a)$

とすると，幾何学的には

$p(a+b)=p(a)+p(b)+2$

つまり，接着を解除して切り離すとき，分割点2が失われる．



もちろん

$p(a')=p(a)$

$p([\ \ ])=0$

だから

$p(a)=2([\ \ ]\cdot a-1)$

しかし，記号法の立場からは，図を使うわけにはゆかないし，そもそも分割点という概念が定義されてない．そこで，天降り式に

$2([\ \ ]\cdot a-1)=p(a)$

とおいて，全分割点数を定義する．それも一つの方法になるが，いかにも不親切で，趣旨がわからないうえ，公

式がえられなければ定義ができない，不便がある．ここはやはり，幾何学的には明白な関係

$$p(a+b)=p(a)+p(b)+2$$

から出発するのがよい．つまり，すでに

$$p(a),\ p(b)$$

が確定しているとして，そのときこの関係で

$$p(a+b)$$

を定義する．また転置にたいしては

$$p(a')=p(a)$$

で，定義をおしひろめる．そうすれば，最初に

$$p([\ \ ])=0$$

とおくことによって，すべての型に対する

$$p(a)$$

が，一義的に定められるだろう．

もっと一般に，型関数を，つぎのような方法で，一義的に定めることができるだろう．

（1） $f\cdot[\ \ ]$ を定める．

（2） $f\cdot a$ と $f\cdot b$ から $f\cdot ab$ を算出する規則を定める

$$f\cdot a+b=F(f\cdot a,\ f\cdot b)$$

（3） 転置ずみでない a にたいする $f\cdot a$ から $f\cdot[a]$ を算出する規則を定める．

$$f\cdot[a]=G(f\cdot a)$$

しかし，ここで，注意すべきことがある．3項以上に和分解される型

$$x=a+b+c$$

の場合に，これを

$$(a+b)+c$$

と考えると

$$f\cdot x=F(f\cdot a+b,\ f\cdot c)$$

これに

$$f\cdot a+b=F(f\cdot a,\ f\cdot b)$$

を代入すれば

$$f\cdot x=F(F(f\cdot a,\ f\cdot b),\ f\cdot c)$$

ここで

$$f\cdot a=u$$
$$f\cdot b=v$$
$$f\cdot c=w$$

とおけば

$$f\cdot x=F(F(u,\ v),\ w)$$

一方，この x を

$$a+(b+c)$$

と考えると

$$f\cdot x=F(f\cdot a,\ f\cdot b+c)$$
$$=F(f\cdot a,\ F(f\cdot b,\ f\cdot c))$$
$$=F(u,\ F(v,\ w))$$

しかしもともと，型の和では

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

だから当然に，この2通りの計算結果は一致する．

$$F(F(u,\ v),\ w)$$
$$=F(u,\ F(v,\ w))$$

ただしここで

$$\begin{cases} u=f\cdot a \\ v=f\cdot b \\ w=f\cdot c \end{cases}$$

ということは，つまり，型関数

$$y=f\cdot x$$

がとる，かってな値

$$u,\ v,\ w$$

にたいして，つねに

$$F(F(u,\ v),\ w)$$
$$=F(u,\ F(v,\ w))$$

となることが，(2)が無条件に適用されるために，必要な条件になる．

ここにいまあげた条件は，2変数関数に，3変数を結合しつつ代入する場合の，結合法則にほかならない．

$$F(a,\ b)=a\times b$$

とすると，上の関係式は

$$(a\times b)\times c=a\times(b\times c)$$

に，ほかならない．この結合法則から，かってな結合にたいする一意性も保証され，これが(2)の無条件適用の十分条件となる．つまり，型関数 f の定義に，安心して使用することができる．

定義14 2変数関数 F で，3変数を結合しつつ代入するときに，結合法則

$$F(F(u,\ v),\ w)$$
$$=F(u,\ F(v,\ w))$$

をみたすものを，**結合的**な関数という．

なお転置についての(3)で，関係 G が，公式

$$G(G(x))=x$$

をみたすとき，たとえば

$$G(x)=\frac{1}{x}$$

とか，あるいは

$$G(x)=x$$

のようなとき

$$[a]=b$$

とおくと

$$f\cdot b=G(f\cdot a)$$

から

$$G(f\cdot b)=G(G(f\cdot a))=f\cdot a$$

となる．まとめて

$$\begin{cases} f\cdot b=G(f\cdot a) \\ f\cdot a=G(f\cdot b) \end{cases}$$

ここで

$$b=a',\qquad a=b'$$

だから

$$\begin{cases} f\cdot a'=G(f\cdot a) \\ f\cdot b'=G(f\cdot b) \end{cases}$$

つまり，転置ずみでないaにたいしても，転置ずみのbにたいしても，おなじ形の関係がなりたつ．

こういうときは，(3)のかわりに

(3′) 転置にたいしては

$$f\cdot a'=G(f\cdot a)$$

と定める．

としてもよい．ただし，とくに

$$a=[\ \ ]$$

のときにも，つじつまが合うためには

$$f\cdot[\ \ ]=G(f\cdot[\ \ ])$$

でなければならない．

$$f\cdot[\ \ ]=x_0$$

とおいて，定義をたてるなら

定義15 1変数関数Gで，かってなxにたいし

$$G(G(x))=x$$

また，あるx_0にたいし

$$G(x_0)=x_0$$

となるものを，x_0ー**中心対称**という．

実際に必要となるのは，この種の場合で

定理 6 型関数を，つぎの方法で，一義的に定めることができる．

(1) $f\cdot[\ \ ]=x_0$ を定める．

(2) $f\cdot a$ と $f\cdot b$ から $f\cdot a+b$ を結合的な関数Fで

$$f\cdot a+b=F(f\cdot a,\ f\cdot b)$$

と定める．このFを，fの**加法公式**という．

(3) 転置にたいしては，x_0ー中心対称なGで

$$f\cdot a'=G(f\cdot a)$$

とする．

さきの，型の全分点数の場合

$$p(a+b)=p(a)+p(b)+2$$

だから，

$$F(x,\ y)=x+2+y$$

として

$$p(a+b)=F(p(a),\ p(b))$$

このFは，結合法則を満足する．

$$\begin{aligned} F(F(x,\ y),\ z) &=F(x,\ y)+2+z \\ &=x+2+y+2+z \\ &=x+F(y,\ z) \\ &=F(x,\ F(y,\ z)) \end{aligned}$$

そこで

補題10 つぎのようにして，型関数が定まる．

(1) $p\cdot[\ \ ]=0$

(2) $p\cdot a+b=F(p\cdot a,\ p\cdot b)$

ただし

$$F(x,\ y)=x+2+y$$

(3) $p\cdot a'=p\cdot a$

これを，aの**全分点数**という．そうして実は

$$p\cdot a=2([\ \ ]\cdot a-1)$$

念のためいえば，はじめには(1)〜(3)で，pを定義する．(2)のFが結合的，(3)は中心対称的な

$$G(x)=x \quad で \quad p\cdot a'=G(p\cdot a)$$

だから，問題がない．そうして定義されたあとでは

$$p\cdot a+b=p\cdot a+p\cdot b+2$$
$$p\cdot a'=p\cdot a$$

は，そのpの性質となる．この恒等式と(1)とから，まえの定理5系2が適用されて

$$p\cdot a=2([\ \ ]\cdot a-1)$$

§8. 型 関 数 (3) 周 辺 の 分 点 数

ところで，いまの定理6より，もうすこし一般に，いくつかの型関数

$$f_1,\ \cdots\cdots,\ f_n$$

を，たがいに関連させながら，おなじ流儀で，定めることができる．実際に必要となるのは

$$n=2$$

で，しかも特殊な場合に当たるが，類似の，なじみ深い例で，要領を説明してみよう．

加法公式は，

$$f_1 \cdot a+b$$
$$=F_1(f_1 \cdot a,\ f_1 \cdot b,\ f_2 \cdot a,\ f_2 \cdot b)$$
$$f_2 \cdot a+b$$
$$=F_2(f_2 \cdot a,\ f_2 \cdot b,\ f_1 \cdot a,\ f_1 \cdot b)$$

のような形であってもよい．たとえば，これは型関数でなくて，数a，bにたいする関数になるけれども

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$$

例にあげついでに，これの結合法則をしらべよう

$$\sin((x+y)+z)$$
$$=\sin(x+y)\cos z+\cos(x+y)\sin z$$
$$=(\sin x\cos y+\cos x\sin y)\cos z$$
$$+(\cos x\cos y-\sin x\sin y)\sin z$$
$$=(\sin x\cos y\cos z+\cos x\sin y\cos z$$
$$+\cos x\cos y\sin z)-\sin x\sin y\sin z$$

この式の形から予期されるように

$$\sin((x+y)+z)=\sin(x+(y+z))$$

こういった種類の，結合法則がなりたてばよい．

とはいえ，実際に必要となるのは

$$f_1 \cdot a+b=F_1(f_1 \cdot a,\ f_1 \cdot b)$$
$$f_2 \cdot a+b=F_2(f_2 \cdot a,\ f_2 \cdot b)$$

の場合で，これは定義14のいみで結合的とする．ただしそのかわり，転置にたいしては

$$f_1 \cdot a'=f_2 \cdot a$$

こういう場合が，いりようになる．この最後の式について説明すれば，元来は，関数の定義をひろげるため

転置ずみでないaにたいしては

$$[a]=b$$

について

$$\begin{cases} f_1 \cdot b=f_2 \cdot a \\ f_2 \cdot b=f_1 \cdot a \end{cases}$$

とする．しかし，この第2式を逆向きにかけば

$$\begin{cases} f_1 \cdot b=f_2 \cdot a \\ f_1 \cdot a=f_2 \cdot b \end{cases}$$

これは

$$b=a',\quad a=b'$$

だから，

$$\begin{cases} f_1 \cdot a'=f_2 \cdot a \\ f_1 \cdot b'=f_2 \cdot b \end{cases}$$

つまり，転置ずみでないaにたいしても，転置ずみのbにたいしても，おなじ形の関係になる．それで，単に

$$f_1 \cdot a'=f_2 \cdot a$$

とする．これから関数値をもとめるには，場合により，

左辺　を　右辺　から

右辺　を　左辺　から

と，わけて使用する．この関係はまた

$$f_2 \cdot a'=f_1 \cdot a$$

とかいても，おなじいみになる．さらにまた，型関数の

$$f_1'=f_2,\quad f_2'=f_1$$

として

$$f \cdot a'=f' \cdot a,\quad \text{ただし}\ f=f_1,\ f_2$$

とかいてもよい．なおここで，条件

$$f \cdot [\ \ ]=f' \cdot [\ \ ]$$

を必要とする．

定理 7　型関数

$\vdash$，$\top$，$\dashv$，$\perp$

を，つぎの方法で定めることができる．これらを順に

左辺，上辺，右辺，下辺

の分点数という．

（1）［　］では，0

（2）加法公式

$$f \cdot a+b=F(f \cdot a,\ f \cdot b)$$

としたときの

$$F(x,\ y)$$

は，つぎの通り．

$\vdash$　では　x

$\top$　では　$x+y+1$

$\dashv$　では　y

$\perp$　では　$x+y+1$

（3）転置にたいしては

$$\vdash'=\top,\quad \top'=\vdash$$
$$\dashv'=\perp,\quad \perp'=\dashv$$

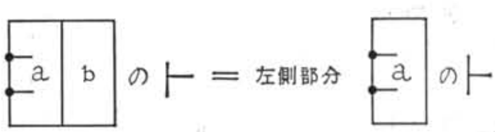
として，共通的に

$$f \cdot a'=f' \cdot a$$

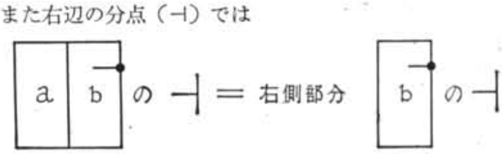
この定義方法の，幾何学的に合理的な理由を，図示しておこう．分割図の外わくの長方形の

左辺，上辺，右辺，下辺

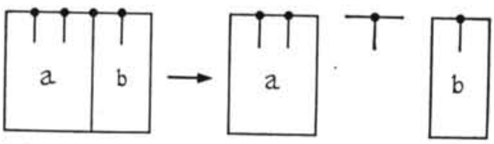
の分点数をかぞえるのに，まず左辺の分点（$\vdash$）では



また右辺の分点（$\dashv$）では



しかし，上辺の分点（⊤）のときは，離すとき



となるから

$$\top\cdot a+b=\top\cdot a+1+\top\cdot b$$

下辺の分点（⊥）についても，おなじく

$$\bot\cdot a+b=\bot\cdot a+1+\bot\cdot b$$

それから，転置にたいしては

左辺　と　上辺

がいれかわり，また

右辺　と　下辺

とがいれかわる．そこで

$$\vdash'=\top,\quad \top'=\vdash$$

$$\dashv'=\bot,\quad \bot'=\dashv$$

として，ちょうど

$$f\cdot a'=f'\cdot a$$

定理については，しかし，加法公式のFが結合的という点を，たしかめなければならない，

$$F(x,\ y)=x+1+y$$

の場合は，まえの全分点数のときとおなじく

$$\begin{aligned}&F(F(x,\ y),\ z)\\&\quad=F(x,\ y)+1+z\\&\quad=x+1+y+1+z\\&\quad=x+F(y,\ z)\\&\quad=F(x,\ F(y,\ z))\end{aligned}$$

それから

$$F(x,\ y)=x$$

ならば

$$\begin{aligned}F(F(x,\ y),\ z)&=F(x,\ y)=x\\&=F(x,\ F(y,\ z))\end{aligned}$$

また

$$F(x,\ y)=y$$

のときも

$$F(F(x,\ y),\ z)=z=F(x,\ F(y,\ z))$$

これで，定理がたしかめられた．

定義16　左辺・上辺・右辺・下辺の分点数の合計

$$\vdash\cdot a+\top\cdot a+\dashv\cdot a+\bot\cdot a=p_0\cdot a$$

とおいて，**外部分点数**という．また，全分点数から，これを引いた．

$$p\cdot a-p_0\cdot a=p_1\cdot a$$

を，**内部分点数**という．

定義17　型a，bにたいし

$$\dashv\cdot a+\vdash\cdot b=s(a,\ b)$$

とおいて，a，bの**接着子数**という．

補題11　外部・内部の分点数について

$$p_0\cdot a+b=p_0\cdot a+p_0\cdot b+2-s(a,\ b)$$

$$p_1\cdot a+b=p_1\cdot a+p_1\cdot b+s(a,\ b)$$

$$p_0\cdot a'=p_0\cdot a$$

$$p_1\cdot a'=p_1\cdot a$$

まず，

$$\begin{aligned}p_0\cdot a'&=\vdash\cdot a'+\top\cdot a'+\dashv\cdot a'+\bot\cdot a'\\&=\top\cdot a+\vdash\cdot a+\bot\cdot a+\dashv\cdot a\\&=\vdash\cdot a+\top\cdot a+\dashv\cdot a+\bot\cdot a\\&=p_0\cdot a\end{aligned}$$

また，まえの補題10で

$$p\cdot a'=p\cdot a$$

だから

$$\begin{aligned}p_1\cdot a'&=p\cdot a'-p_0\cdot a'\\&=p\cdot a-p_0\cdot a=p_1\cdot a\end{aligned}$$

つぎに，和のほうは

$$\vdash\cdot a+b=\vdash\cdot a$$

$$\top\cdot a+b=\top\cdot a+\top\cdot b+1$$

$$\dashv\cdot a+b=\qquad\qquad\dashv\cdot b$$

$$\bot\cdot a+b=\bot\cdot a+\top\cdot b+1$$

これに

$$s(a,\ b)=\dashv\cdot a+\vdash\cdot b$$

を合わせて，辺々加えると

$$p_0\cdot a+b+s(a,\ b)=p_0\cdot a+p_0\cdot b+2$$

さらに，これを補題10の

$$p\cdot a+b=p\cdot a+p\cdot b+2$$

の関係から，辺辺ひけば

$$p_1\cdot a+b-s(a,\ b)=p_1\cdot a+p_1\cdot b$$

文章としていえば，分点数は，転置にさいしては，外部・内部とも変わらないが，和(接着)にさいしては，全体として2ふえるほか，外部から内部へ

$$s(a,\ b)$$

箇だけ，移行する．この移行の仕方を，区別して示すのが，記号法の，つぎの仕事となる．

補　一部読者のために（2）

ずいぶん，ながくなったけれども，記号法をそれ自体として論理的に定義するだけなら，もちろん，もっと簡単にできる．

まず，転置記号列，かっこ記法のところで，はじめに

は外延的に「型」を定義し，それから内包的に「カタ」を考えた．そこに，ひとつの重複がある．論理上は，いきなりカタ，広義のカタから始めればよい．そうすれば万事がすらすらゆく．論証のあとをたどってみれば，知られるように，この内包的な定義のほうに，理論はよりかかっている．

広義のカタの和・転置は，広義のカタ

これは，やさしい．その逆

広義のカタは，和分解・転置もどしで［］になる

この証明の基礎となる補題

広義のカタ a の左方部分 b で

$- \cdot b = 0$

が，和分解の因子

は，全理論の基本補題ともいうべきもの．これから

素なものへの和分解の一意性

が，ひきだされる．つまりは

かっこ記法は，組み立てたとおりに，解読される

ということが，保証されることになる．

この事実は，全数学の記号法にとって，基礎的で，重大と思われるのに，はっきりと論じた書物を，まだ見たことがない．かえりみれば，小学校で，まず

(……)

をならい，ついで

{……}

そうして

[……]

中学校に進んだころであったが，その，小がっこ・中がっこ・大がっこという，名称をきいて，魔術を手中にしたような感激をあじわったことを，いまでもおぼえている．3重でなおたりなければ，上に線をひく．

〔{($\overline{\cdots\cdots}$　……)……}……〕

線記法までゆけば，万能になる，と．まだ先ながかった学校の道の，いやはてをみはるかしたかの気持がした．

しかし，実際には，そのいわゆる小がっこ

(……)

だけでよい．（旧制）高校をおえるころには，中がっこや大がっこは，無精するのがふつうのくせとなった．無精して，かまわない．小がっこをつみかさねて，けっしてまぎれない．それが，経験から，無意識に信念となった．小がっこの専用，それでなくては，群論はじめ，抽象代数の議論は行なえない．こうして，自明と思いこんできたことの，根拠を，ついに問う立場に立たされた．

電子計算機に扱える形に，長方形分割型の記号法を組み立てること．数の4則計算なら，人間以上でも，かっこの解読は，教えてやらねば始まらない．解読の，原理は何？　その答として

$a = b \cdots,\quad - \cdot b = 0$　で分解

の基本補題をえた．ふつうには

かっこは，内側から計算する

と教わるけれども，それとは反対に

もっとも外側の，かっこの対

を，まず指示する．これは，かっこ構造そのものを実体化してとらえる，立場から，そうなった．ただし

もっとも内側の，かっこの対

を指示することも，すぐできる．

$- \cdot b$　が増加から減少に変わるとき

といえばよい．

それはそれとして，かっこ解読の一意的可能性の原理に，いたってみて，さて見まわすと，それはもう知られ実用化されているはずと，思われた．いわゆる，プログラミング・プログラム，たとえば ALGOL を解読するプログラムが実在する以上，その

begin …… end

という，かっこ記法相当物の解読法が，仕組まれているに相違ない．したがって，かっこ記法，転置記号列の基礎理論は，理論として新しいものでは，当然ない．

しかし，文献上，まだ眼にふれたことはないから——これだけを論文にかくことも，ちょっとできないだろうが——ここにくわしくのべても，世の役に立とうかと考えた．長方形分割の問題と切り離し，全数学に通じる，かっこ記法の理論として，利用していただきたい．

長方形分割に固有の問題は，型関数とともに開幕する．まずはじめに，加法的関数というもの．これは，積分論ないし測度論から，そのまま引いている．しかし，さらに進んで，加法公式をもつ関数というとき，それはもちろん，代数関数論の用語によっている．ただし，その加法公式によって，関数の定義域の拡張をはかる立場から，一意性を保証する条件として，結合法則

$$F(F(x,\ y),\ z) = F(x,\ F(y,\ z))$$

が，登場する．

余談ながら，この結合法則を，交換法則

$$F(x,\ y) = F(y,\ x)$$

とともにみたす，（微分可能その他すなおな）関数については，アーベルが，論じている．かの5次方程式の代数的解法の不可能性を樹立した論文とともに，クレルレの「純粋・応用数学雑誌」創刊号に，しかもその純粋数学の部の論文第1として，のせている．そのことは，今日

ほとんど忘れられているが，ある事情から筆者は，実用数学および数学教育界の話題に関連して，それにぶつかった．いままた想い出したまま，改めて記しておく．興味のある方は，筆者の

高原表とラプラス・ヒルベルトの問題
「数学の歩み」4巻3号（1956）

の末尾，および

函数方程式としての交換・結合・分配・指数法則
——構造図の一般変換問題（Ⅰ）（Ⅱ）
「日本数学教育会誌」39巻3号・5号（1957）

を見られたい．

目下の，型関数の問題の場合，連続性も何も，交換法則をも仮定しないから，結合的な関数として

$F(x,\ y)=x$

のごときも，ひろいあげられた．

さて，型関数のいろいろのうち，記号法の構成に直接必要となるのは，周辺の分点数，ことに

$\dashv\cdot a,\ \vdash\cdot b$

に，つきている．しかし，その他のものも，

記号列の長さの評価

などのために，いりようとなる．念のためくりかえせば

長方形数　[　]・a

これをnとすると

接着回数　][・$a=n-1$

全分点数　$p\cdot a=2(n-1)$

それから

4辺の分点数　$\vdash,\ \perp,\ \dashv,\ \perp$

外部，内部の分点数　$p_0,\ p_1$

を定義した．ここで，p_0の0はouter（外部）の，1はinner（内部）の，頭文字に通ずる気持でいる．

なおついでに，分割図の

点・線・面

の全数を，計算してみよう．まず

全点数　$T=$分点数$+$頂点$4=p+4$

つぎに，線分ひとつひとつを辺と略称して

全辺数　$H=$外部辺数H_0+内部辺数H_1

$H_0=$外部分点数p_0+もとの長方形辺数4

$H_1=$内部分点数p_1+接着回数

この最後の式は

$H_1\cdot[\ \ ]=0=p_1\cdot[\ \ ]$

$H_1\cdot a'=H_1\cdot a$

$H_1\cdot a+b=H_1\cdot a+H_1\cdot b$

$+s(a,\ b)+1$　（植木算）

の関係と

$p_1\cdot a+b=p_1\cdot a+p_1\cdot b+s(a,\ b)$

とから，みちびかれる．そこで

$H=p+4+$接着回数$(n-1)$

それから，全面数としては，分割図の裏側に，もとの長方形そのままをもう一枚，はりつけたと考えて

$M=$（長方形数n）$+1$

とおく．そうすると，その表・裏の間に空気をふきこみ位相幾何的いみの，多面体が考えられるが，その

全面数$-$全辺数$+$全点数$=M-H+T$

$=(n+1)-(p+4+n-1)+(p+4)=2$

これは，**オイラーの公式**に他ならない．

最後に，もうひとつ，内部辺数H_1が，辺をさかいに接触する部分長方形の対の数をあらわすことを，注意しておきたい．

$H_1=H-H_0$

$=(p+4+n-1)-(p_0+4)$

$p=2(n-1)$

そこで

$H_1=3(n-1)-p_0$

ここで，外部分点数p_0が，長方形数

$n\geq 4$

のとき

$p_0\geq 4$

となることが示される．幾何学的にならすぐいえるし，記号法的にたしかめることもじきできる．それで

一般には（長方形数　$n\geq 4$　ならば）

接触長方形対の数　$H_1\leq 3n-7$

この関係式の，建築平面計画総論的の意義については，太田利彦氏の論文を見られたい．

筆者のこの長方形分割型の理論は，この関係式の考察を出発点として，つくられた．

§9. 転置構造と接着構造

これから，内部接着の形式のちがいをも区別した，分割図の記号法を組み立てよう．これまで，ただ型とよんできたものは，その区別をしていないから，型の元来の内容の，一部しかあらわしていない．その，転置記号列があらわす部分を，型の転置構造ということにする．それだけから，しかし，周辺上の分点数などが定まることは，すでにみた．分点の箇数まで定まって，ただし，接着にさいしての，その排列順序が未定に残っている．それを指定するため，これから導入するものを，型の接着

構造とよぶ．この接着構造を，基礎の転置構造に合わせて，型が確定する．

定義18 左辺，右辺の分点の象形

$\vdash$, $\dashv$

を，いくつかならべたものを，**接着記号列**という．

定義19 接着記号列 s 中の

$\vdash$記号の数を　$\vdash \cdot s$

$\dashv$記号の数を　$\dashv \cdot s$

とかく．

定義20 とくに，記号数0

$\dashv \cdot s = \vdash \cdot s = 0$

の場合，つまり，空な記号列を，かりに実体化し，記号

ϕ

であらわすことがある．これを**空(くう)列**という．

空列は，記号列の左につけても，右につけても，変化を起させない．

$\phi s = s\phi = s$

定義21 転置構造 a，b にたいして

$\dashv \cdot s = \dashv \cdot a$

$\vdash \cdot s = \vdash \cdot b$

をみたす接着記号列 s を，a，b の**接着子**という．

ここで，念のためにいうと，定義式の右辺の

$\dashv \cdot a$, $\vdash \cdot b$

は，転置構造 a，b の，右辺，左辺の分点数をあらわし

$\dashv \cdot s$, $\vdash \cdot s$

は，接着記号列 s 中の，それぞれの記号数をあらわし，いみするところは，ちがっている．

たとえば

$a=$[[ ] [ ]]　とすると　$\dashv \cdot a = 1$

$b=$[[ ] [ ] [ ]]　なら　$\vdash \cdot b = 2$

そこで，この a，b の接着子 s とは

$\dashv \cdot s = 1$　つまり　$\dashv$記号が1個

$\vdash \cdot s = 2$　つまり　$\vdash$記号が2個

のもの．たとえば

$\dashv\vdash\vdash$

それから

$\vdash\dashv\vdash$

$\vdash\vdash\dashv$

このように，接着子は，一般には，いくつもある．

いく種類あるかをみるため

$\dashv \cdot s = i$, $\vdash \cdot s = j$

とおこう．これをいっしょにした

$i + j = s(a,\ b)$

が，s の記号総数をあらわし，そのうちのかってな i 箇が，$\dashv$になる．だから，

$i+j$　箇から　i 箇　をとる組み合わせ

だけ，接着子に種類がある．

$$\binom{i+j}{i} = \frac{(i+j)!}{i!\,j!}$$

とくべつな場合，i または j が0のとき，つまり，どちらか一方だけの記号列ということで，ただ1種．このとき，組み合わせの式からも

$$\binom{i}{i} = \frac{i!}{i!} = 1$$

念のためにいえば

$0! = 1$

と規約されている．さらに，i も j も0のとき

$$\binom{0}{0} = \frac{0!}{0!} = 1$$

これは，空列が1種ということで，つじつまがあう．

定理 8 転置構造 a，b の接着子は

$\dashv \cdot a = i$, $\vdash \cdot b = j$

として

$$\frac{(i+j)!}{i!\,j!}$$

種ある．

これだけの種類に，

$a + b$

が，場合わかれする．そのひとつひとつを示すには，それぞれの接着子を，そえて記せばよい．たとえば

$a=$[[ ] [ ]]

$b=$[[ ] [ ] [ ]]

のとき

$a + b$　ただし接着子は　$\vdash\dashv\vdash$

などといえばよい．あるいは

$a \vdash\dashv\vdash b$

と書いてもよい．

[[ ] [ ]]$\vdash\dashv\vdash$[[ ] [ ] [ ]]

これで，分割図が，たしかに一意確定する．一般に，すべて＋記号がおかれるべきところに，接着子をすっかりとおぎなえばよい．ただしもちろん，おぎなうといって空列の場合もふくんでいる．たとえば

[[[ ] [ ]]$\dashv$[ ]]$\vdash\dashv\vdash$[[ ] [ ] [ ]]

これで，分割図が確定する．

確定させることができて，記号法は，一応できたことになる．だがしかし，もう一段，改良の余地がある．

[,], ⊣, ⊢

という，4 **種**の記号要素をまぜならべるというのは，うまくない．4種ならば，2進小数であらわすのに

00, 01, 10, 11

のような，2桁数がいる．せっかく

転置記号　[　と　]　の　2種

接着記号　⊢　と　⊣　の　2種

と，**2 種ずつ**になっていて，2進の1桁数で表示できそうなものに，2桁数をあてるのは，もったいない．

いまの例で，

[[[ ] [ ]]⊣[ ]]⊢⊣⊢[[ ] [ ] [ ]]

と，まぜ書きするかわりに，転置構造の

[[[ ] [ ]] [ ]] [[ ] [ ] [ ]]

と，接着子の列

⊣, ⊢⊣⊢

とを，別別にかくことにしよう．こうしても，接着子のどれがどこに，はめこまれるべきかは，転置構造のほうから，じきわかる。さらに，接着子の列を

⊣⊢⊣⊢

と，つずけ書きしておいても，これを

記号数1の　⊣

記号数3の　⊢⊣⊢

のように区切るのだ，と読みとれる．

こういう，判断にたって，記号法を構成する．

定義22　接着記号列 s が，転置構造 a の，内部構造として適合する，あるいは単に，a に**適合**する

$s \to a$

という関係を，つぎのようにして定める．

（1）　s が空列 φ のとき，このときにかぎって

$s \to [\ ]$

（2）　和分解については

$s = prq$

$p \to a$，$q \to b$

r は a，b の接着子

のとき，このときにかぎって

$s \to a + b$

（3）　転置については，まったく共通の s が

a，a'

に適合する．

$s \to a$　と　$s \to a'$　とは同値

この定義は，型関数を定めるのに，加法公式を使うのと，おなじ考えに立っている．注意すべきは(2)で，

$(a+b)+c$

に適合するものと

$a+(b+c)$

に適合するものとが，一致することを，たしかめておく必要がある．

記号を変え，たとえば

$s \to a_1 + (a_2 + a_3)$

の場合を考えると，条件は

$s = p_1 r_1 q$

$p_1 \to a_1$,　$q \to a_2 + a_3$

r_1 は a_1, a_2+a_3, の接着子

この最後の条件は，定義から

$\dashv \cdot r_1 = \dashv \cdot a_1$

$\vdash \cdot r_1 = \vdash \cdot a_2 + a_3$

しかし，右辺の型関数で

$\vdash \cdot a_2 + a_3 = \vdash \cdot a_2$

となるから

r_1 は a_1, a_2 の接着子

といいかえることができる．そうして

$q \to a_2 + a_3$

というのは

$q = p_2 r_2 p_3$

$p_2 \to a_2$,　$p_3 \to a_3$

r_2 は a_2, a_3 の接着子

だから，けっきょく条件は

$s = p_1 r_1 p_2 r_2 p_3$

$p_1 \to a_1$, $p_2 \to a_2$, $p_3 \to a_3$

r_1 は a_1, a_2 の接着子

r_2 は a_2, a_3 の接着子

そうすると，こんどは

$p = p_1 r_1 p_2$

とおいて

$s = p r_2 p_3$

$p \to a_1 + a_2$,　$p_3 \to a_3$

r_2 は a_1+a_2, a_3 の接着子

と書きかえられ

$s \to (a_1 + a_2) + a_3$

の条件になる．

定理 9　定義22により，関係

$s \to a$

は，まぎれることなく確定する．そうして，接着記号列

s の記号数 $= a$ の内部分点数 p_1

逆に，

$s \to a$

のとき，この a の和分解・転置もどしにしたがい，s は一意的に区切られていって，正しく解読される．

定理の後段，のべ方は，すこしあいまいだけれども，いみするところは通ずると思う．たとえば

$a = a_1 + a_2$

と和分解されるなら

$s = q_1 r q_2$

$q_1 \to a_1,\ q_2 \to a_2$

r は $a_1,\ a_2$ の接着子

という分解が，一意に決定される，と主張する．

ともかくこういう分解がされるはず，ということは，定義からわかるけれども，それが一意に，どこで区切るかもはっきりときめられる，と主張する．そのわけは，定理の中段によれば，

q_1 の記号数$= p_1(a_1)$

また

q_2 の記号数$= p_1(a_2)$

むしろ

r の記号数$= \dashv \cdot a_1 + \vdash \cdot a_2$

$= s(a_1,\ a_2)$

だから，記号数をかぞえて，区切ってゆけばよい．

そこで，中段の証明がのこった．まず

（1） [ ] に適合する s の記号数$= 0$

（2） 和分解については

補題12 転置構造 $a_1,\ a_2$ に適合する接着記号列については，その

記号数＝内部分点数

と仮定すると，和

$a_1 + a_2$

に適合する接着記号列についても，おなじことがいえる．

なぜなら，

$s \to a_1 + a_2$

とすると

$s = q_1 r q_2$

$q_1 \to a_1,\quad q_2 \to a_2$

r は $a_1,\ a_2$ の接着子

となって

q_1 の記号数$= p_1(a_1)$

q_2 の記号数$= p_1(a_2)$

r の記号数$= s(a_1,\ a_2)$

そこで

s の記号数$= p_1(a_1) + p_1(a_2) + s(a_1,\ a_2)$

この右辺が，ちょうど

$= p_1(a_1 + a_2)$

もうひとつ

（3） 転置について，a に適合する接着記号列の記号数が，つねに a の内部分点数にひとしければ a' についてもおなじことがなりたつ

ことも明らか．この（1）〜（3）から，定理の中段がいえる．

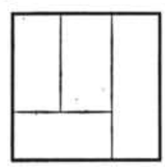
定義23 転置構造 a と，これに適合する接着記号列 s とを組み合わせたものを，**分割図**という．それを

$a \times s$

のようにかく．s をこの図の接着構造という．

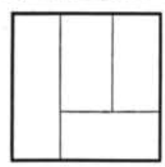
§10. 図 変 換（1）8 種 の 置 き 方

さて，分割図は定義できたけれども，その置き方の問題がのこっている．というのは，分割図たとえば



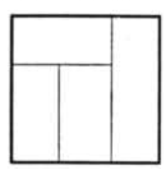
[[[ ] [ ]] [ ]] [ ]×⊣⊣

の，左右を反対にすると，分割図



[ ] [[[ ] [ ]] [ ]] ×⊢⊣

になる．また，上下を反対にした場合には



[[ ] [[ ] [ ]]] [ ]×⊢⊣

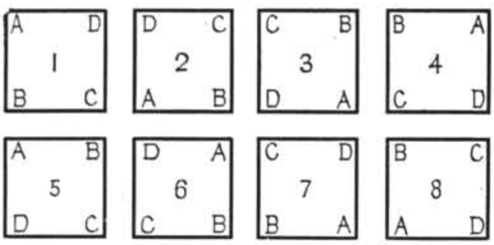
になる．こういうような分割図は，見掛け上はことなるけれども，本質的にはおなじ型，と見なしたい．そうして，「分割型」というとき，置き方の区別は考えない．そのいみでの，分割型の列挙・分類が，序論で提起された問題であった．

置き方を区別する分割図から，区別のない分割型へ．その概念の移行は，この**置き方というもの**の究明を通じ

て，はたされる．あらゆる置き方の可能性が，ひとたび理解されれば，ある分割図から生ずる見掛け上ことなっただけのものの範囲がわかり，この範囲にたいしてひとつだけ席をもうけられた，分割型なるものが，概念上とらえられることになる．

その置き方，これは一般にいって8種ある．もとの置き方にたいし，それをどうしたもの，という形で示すと

1. もとの置き方
2. これを反時計まわりに直角廻転
3. 2直角廻転（点対称）
4. 3直角つまり逆まわり直角廻転
5. 転置
6. 左右逆
7. 右上から左下への対角線での裏返し
8. 上下逆



この8種のうち，

5，6，7，8

は，それぞれ

1，2，3，4

を転置したものに相当する．逆に

5，6，7，8

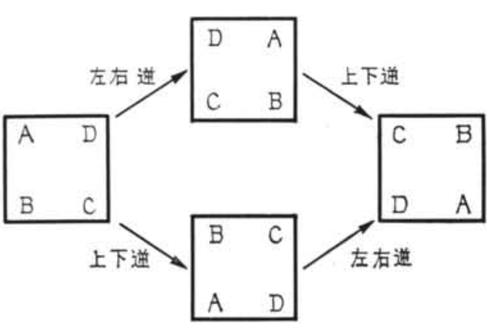
を転置すれば

1，2，3，4

になる．

それから，3の点対称はまた

左右逆の上下逆



とも，また

上下逆の左右逆

にも相当する．

そこで，置き方の8種は，また

1. もとの置き方
2. 左右逆の転置
3. 左右逆の上下逆（＝上下逆の左右逆）
4. 上下逆の転置
5. 転置
6. 左右逆
7. 左右逆の上下逆の転置
8. 上下逆

とも表わされる．これからすれば

転置・左右逆・上下逆

という，3種の操作を，分割図の記号法にとりいれることができれば，おそらくよいだろう．

まず，転置．これは，はじめっから，しかけてある．転置構造に対する概念を，分割図にうつせばよい．その定義のしついでに，順序として

定義24 分割図

$[\ \ ]\times\phi$

を，まぎれるおそれのないかぎり，単に

$[\ \ ]$

ともかく．

定義25 分割図

$a_1=t_1\times s_1$

$a_2=t_2\times s_2$

について，それらの転置構造

t_1, t_2 の接着子 $\boldsymbol{r}$

をまた，a_1, a_2 の接着子ともいう．そうして

$t=t_1+t_2$

$s=s_1\,\boldsymbol{r}\,s_2$

$a=t\times s$

としたとき，この a を，分割図 a_1, a_2 の和，くわしくは接着子 $\boldsymbol{r}$ による和といい

$a=a_1+a_2$，ただし $+:\boldsymbol{r}$

あるいは

$a=a_1\dashv \boldsymbol{r} \vdash a_2$

とかく．

定義26 分割図

$a=t\times s$

について，その接着構造 s はまた，転置構造 t' にも適合するが，分割図

$$t' \times s = a'$$

とかき，これを a の転置という．

つまり，転置構造どうしの関係としての転置

t にたいし t'

にもとづいて，分割図どうしの関係としての転置

a にたいし a'

を定義する．この転置のように，一般に

定義27 分割図 a にたいし，なにか分割図 a^* を対応させる規則は，**図変換**を定めるという．

図変換 * により，分割図 a に対応させられる分割図を

a^*

とかき，a を * で変換した図．などという．

ここで，規則の与え方によっては，ことなる分割図が変換した結果，おなじになることもありうるが

定義28 ちがう分割図は，ちがう分割図に変換され

$a_1 \neq a_2$ なら $a_1^* \neq a_2^*$

のとき，図変換 * は**1対1**，という（この条件は，また

$a_1^* = a_2^*$ ならば実は $a_1 = a_2$

といってもよい）．

転置 $'$ の場合

$$a = t \times s$$

を，まず転置して

$$a' = t' \times s$$

ふたたび転置して

$$a'' = t'' \times s = t \times s = a$$

このように

補題13 図変換 * で，かってな分割図について

$$a^{**} = a$$

となるものは，1対1

なぜなら，

$$a_1^* = a_2^*$$

ならば，さらに * で変換して

$$a_1^{**} = a_2^{**}$$

ところが仮定から，これは

$$a_1 = a_2$$

この場合，* によって

a は a^* に

a^* は a に

のように変換され，つまり

a と a^*

とが，たがいにいれかわる．

ただし，いれかわるといっても，図によっては

$$a^* = a$$

で，全然かわらないこともある．このような a

定義29 図変換 * にたいして

$$a^* = a$$

となる図 a は，* について**対称**，略して * 対称という．

たとえば，転置の場合，定義24のいみの[ ]について

$$[\ ]' = [\ ]$$

つまり，分割図

[ ] は，$'$ 対称

になる．この関係を，図の側からみて，$'$ は[ ]を対称にする，あるいは

$'$ は，[ ]の対称変換

といってもよい．

はじめにあげた，8種の置き方，というより置き換え法は，幾何学で

正方形の対称変換

などとよばれている．正方形を，動かすけれども，もとへかえす，ことを指している．その8種の，3要素

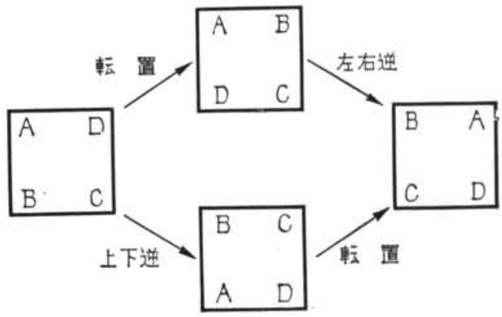
転置・左右逆・上下逆

のうち，転置はすんだから，左右逆・上下逆を，つぎに定義してみよう．

これらは，[ ]の対称変換になるが，一般の分割図にたいしては，それをちがった分割図に変換する．どう変換するか，その変わり方の規則を分析することによって，記号法的に，これらの変換を定義する．その場合，一般的になりたつべき重要な関係として

転置の左右逆＝上下逆の転置

これを利用し，左右逆・上下逆を連関させて定義する．



§11. 図 変 換（2）
左右逆と上下逆

順序として，はじめには，転置構造についての，変換を考えよう．つまり，転置構造に転置構造を対応させる，変換として，問題の左右逆・上下逆を，まず定義する．

定理10 転置構造の変換

左右逆 $\cdot\!|\!\cdot$

上下逆 $\div$

が，つぎのようにして，一意に定められる．

（1）［ ］は，それらについて対称

$$[\ \ ]^{\cdot|\cdot}=[\ \ ]$$
$$[\ \ ]^{\div}=[\ \ ]$$

（2）和については

$$(u+v)^{\cdot|\cdot}=v^{\cdot|\cdot}+u^{\cdot|\cdot}$$
$$(u+v)^{\div}=u^{\div}+v^{\div}$$

（3）転置については

$$[u]^{\cdot|\cdot}=(u^{\div})'$$
$$[u]^{\div}=(u^{\cdot|\cdot})'$$

ただしuは，転置ずみでもなく，［ ］ともちがうものとする．

このような定義で，変換が一意に定まるわけは，型関数の場合とおなじい．（2）で，結合律をためしてみると

$$((u+v)+w)^{\cdot|\cdot}$$
$$=w^{\cdot|\cdot}+(u+v)^{\cdot|\cdot}$$
$$=w^{\cdot|\cdot}+v^{\cdot|\cdot}+u^{\cdot|\cdot}$$
$$=(v+w)^{\cdot|\cdot}+u^{\cdot|\cdot}$$
$$=(u+(v+w))^{\cdot|\cdot}$$

上下逆÷については，明らか．

なお（3）についていうと，uにたいする仮定から，uは和分解されているから，その変換

$$u^{\div},\ \ u^{\cdot|\cdot}$$

は，（2）で定義されている．それらは（2）の右辺から，和の形で，転置ずみではない．したがって，その転置は

$$(u^{\div})'=[u^{\div}]$$
$$(u^{\cdot|\cdot})'=[u^{\cdot|\cdot}]$$

とかかれる．だから，（3）は，もっとつりあった形に

$$[u]^{\cdot|\cdot}=[u^{\div}]$$
$$[u]^{\div}=[u^{\cdot|\cdot}]$$

とかくことができる．

しかしむしろ，′ 記号を専用して

$$(u')^{\cdot|\cdot}=(u^{\div})'$$
$$(u')^{\div}=(u^{\cdot|\cdot})'$$

とかいてみる．この第2式は，両辺を転置した

$$((u')^{\div})'=u^{\cdot|\cdot}$$

の形にかきかえてよい．あるいは

$$u^{\cdot|\cdot}=((u')^{\div})'$$

ここでさらに

$$u'=v$$

したがって

$$u=v'$$

とおけば

$$(v')^{\cdot|\cdot}=(v^{\div})'$$

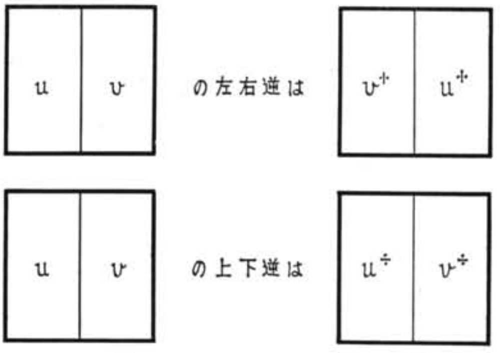
この形にかきかえておいてよい．そうすると，式の形は第1式と同一になり，まとめて

（3′） 転置については

$$(u')^{\cdot|\cdot}=(u^{\div})'$$

これを，（3）のかわりに，あげてもよい．ただし（3′）のほうは，定義式としては，場合に応じて，左辺から右辺へ，右辺から左辺へと，使いわけることになる．

定義の，論理上の問題は，これでよいとして，幾何学的ないみとの連絡のため，図をかかげておこう．



定理11 転置構造tの，各辺の分点数について

$$\vdash\cdot t^{\cdot|\cdot}=\dashv\cdot t,\quad \vdash\cdot t^{\div}=\vdash\cdot t$$
$$\dashv\cdot t^{\cdot|\cdot}=\vdash\cdot t,\quad \dashv\cdot t^{\div}=\dashv\cdot t$$
$$\top\cdot t^{\cdot|\cdot}=\top\cdot t,\quad \top\cdot t^{\div}=\bot\cdot t$$
$$\bot\cdot t^{\cdot|\cdot}=\bot\cdot t,\quad \bot\cdot t^{\div}=\top\cdot t$$

なぜなら，まず

（1） $t=[\ \ ]$ ならば，8式ともなりたつ．

というのは，定義から各式とも

$$0=0$$

つぎに，和について，定理にいう8式を

（2） 転置構造u，vがみたせば

$$t=u+v$$

もみたす

ことを証明する．まず

$$\vdash\cdot t^{+}=\vdash\cdot(u+v)^{+}$$
$$=\vdash\cdot v^{+}+u^{+}=\vdash\cdot v^{+}$$
$$\dashv\cdot t=\dashv\cdot u+v=\dashv\cdot v$$

だから，もしも

$$\vdash\cdot v^{+}=\dashv\cdot v$$

ならば，

$$\vdash\cdot t^{+}=\dashv\cdot t$$

おなじようにして，

$$\dashv\cdot t^{+}=\dashv\cdot v^{+}+u^{+}=\dashv\cdot u^{+}$$
$$\vdash\cdot t=\vdash\cdot u+v=\vdash\cdot u$$

それから

$$\top\cdot t^{+}=\top\cdot v^{+}+u^{+}$$
$$=\top\cdot v^{+}+\top\cdot u^{+}+1$$
$$=\top\cdot u^{+}+\top\cdot v^{+}+1$$
$$\top\cdot t=\top\cdot u+\top\cdot v+1$$

また

$$\bot\cdot t^{+}=\bot\cdot u^{+}+\bot\cdot v^{+}+1$$
$$\bot\cdot t=\bot\cdot u+\bot\cdot v+1$$

さらに，上下逆についても，たとえば

$$\vdash\cdot t^{\div}=\vdash\cdot(u+v)^{\div}$$
$$=\vdash\cdot u^{\div}+v^{\div}=\vdash\cdot u^{\div}$$
$$\vdash\cdot t=\vdash\cdot u+v=\vdash\cdot u$$

また

$$\top\cdot t^{\div}=\top\cdot u^{\div}+\top\cdot v^{\div}+1$$
$$\bot\cdot t=\bot\cdot u+\bot\cdot v+1$$

など．これらの関係から(2)がいえる．

つぎに，転置については，定理にいう8式を

（3） 転置構造 t がみたせば，t' もみたすことを証明する．まず

$$\vdash\cdot t'^{+}=\vdash\cdot t^{\div\prime}=\top\cdot t^{\div}$$
$$\dashv\cdot t'=\bot\cdot t$$

だから，もしも

$$\top\cdot t^{\div}=\bot\cdot t$$

ならば

$$\vdash\cdot t'^{+}=\dashv\cdot t'$$

おなじようにして

$$\dashv\cdot t'^{+}=\dashv\cdot t^{\div\prime}=\bot\cdot t^{\div}$$
$$\vdash\cdot t'=\top\cdot t$$

それから

$$\top\cdot t'^{+}=\top\cdot t^{\div\prime}=\vdash\cdot t^{\div}$$
$$\top\cdot t'=\vdash\cdot t$$

また

$$\bot\cdot t'^{+}=\bot\cdot t^{\div\prime}=\dashv\cdot t^{\div}$$
$$\bot\cdot t'=\dashv\cdot t$$

さらに，上下逆についても，たとえば

$$\vdash\cdot t'^{\div}=\vdash\cdot t^{+\prime}=\top\cdot t^{+}$$
$$\vdash\cdot t'=\top\cdot t$$

また

$$\top\cdot t'^{\div}=\top\cdot t^{+\prime}=\vdash\cdot t^{+}$$
$$\bot\cdot t'=\dashv\cdot t$$

など．これらの関係から(3)がいえる．

そうして(1)〜(3)から，かってな転置構造について定理のなりたつことが，わかる．

定義30 左右逆・上下逆を，接着記号にも定めておく

$$\vdash^{+}=\dashv,\quad \dashv^{+}=\vdash,\quad \top^{+}=\top,\quad \bot^{+}=\bot$$
$$\vdash^{\div}=\vdash,\quad \dashv^{\div}=\dashv,\quad \top^{\div}=\bot,\quad \bot^{\div}=\top$$

そうすれば，定理11の8式は，共通の形にかかれる．

$$s\cdot t^{\sigma}=s^{\sigma}\cdot t$$

ただし　$s=\vdash,\ \dashv,\ \top,\ \bot$

$\sigma=\cdot|\cdot,\ \div$

しかし，この定義30を，接着記号の列に対して，適用することはできない．接着記号列，とくに接着子については，つぎのように定義する．

定義31 接着子

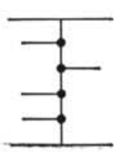
$s=s_1\cdots\cdots s_n,$　　s_i は$\vdash$または$\dashv$

にたいして

$s^{+}=s_1{}^{+}\cdots\cdots s_n{}^{+}$　（記号を反対にする）

$s^{\div}=s_n\cdots\cdots s_1$　（順序を反対にする）

その幾何学的ないみは，つぎのとおり．


の左右逆は



の上下逆は


補題14 接着子 s 中の$\vdash$，$\dashv$記号数について

$$\vdash\cdot s^{+}=\dashv\cdot s,\quad \dashv\cdot s^{+}=\vdash\cdot s$$
$$\vdash\cdot s^{\div}=\vdash\cdot s,\quad \dashv\cdot s^{\div}=\dashv\cdot s$$

定義30の記法をつかってかけば

$$s_1\cdot s^{\sigma}=s_1{}^{\sigma}\cdot s$$

ただし　$s_1=\vdash,\ \dashv$

$\sigma=\cdot|\cdot,\ \div$

補題15 転置構造 u, v にたいし

s が u, v の接着子

ならば

$s^{\cdot|\cdot}$ は $v^{\cdot|\cdot}$, $u^{\cdot|\cdot}$ の接着子

$s^{\div}$ は $u^{\div}$, $v^{\div}$ の接着子

なぜなら，接着子の定義から，仮定は

$\dashv \cdot s = \dashv \cdot u$, $\vdash \cdot s = \vdash \cdot v$

証明すべきことは

$\dashv \cdot s^{\cdot|\cdot} = \dashv \cdot v^{\cdot|\cdot}$, $\vdash \cdot s^{\cdot|\cdot} = \vdash \cdot u^{\cdot|\cdot}$

$\dashv \cdot s^{\div} = \dashv \cdot u^{\div}$, $\vdash \cdot s^{\div} = \vdash \cdot v^{\div}$

ところが，補題によって

$s_1 = \dashv$, $\vdash$

$\sigma = \cdot|\cdot$, $\div$

について

$s_1 \cdot s^{\sigma} = s_1{}^{\tau} \cdot s$

また定理11から

$s_1 \cdot t^{\sigma} = s_1{}^{\sigma} \cdot t$

したがって，証明すべき式は，つぎの形になる．

$s_1{}^{\sigma} \cdot s = s_1{}^{\tau} \cdot t$

具体的にかけば

$\vdash \cdot s = \vdash \cdot v$, $\dashv \cdot s = \dashv \cdot u$

$\dashv \cdot s = \dashv \cdot u$, $\vdash \cdot s = \vdash \cdot v$

これは，仮定にほかならない．

定理12 分割図の変換

左右逆 $\cdot|\cdot$

上下逆 $\div$

が，つぎのようにして，一意に定められる．

（1） [ ]は，それらについて対称

$[\ \ ]^{\cdot|\cdot} = [\ \ ]$

$[\ \ ]^{\div} = [\ \ ]$

（2） 和については（定義25の記法で）

$(a \dashv s \vdash b)^{\cdot|\cdot} = b^{\cdot|\cdot} \dashv s^{\cdot|\cdot} \vdash a^{\cdot|\cdot}$

$(a \dashv s \vdash b)^{\div} = a^{\div} \dashv s^{\div} \vdash b^{\div}$

（3） 転置については

$(a')^{\cdot|\cdot} = (a^{\div})'$

この定義の仕方で，(3)は，いつものように，定義式としては，場合に応じて，左辺から右辺へ，右辺から左辺へと，使いわけを考えればよい．問題なのは(2)で，この式が意味をもつためには

$s^{\cdot|\cdot}$ が $b^{\cdot|\cdot}$ と $a^{\cdot|\cdot}$ の接着子

$s^{\div}$ が $a^{\div}$ と $b^{\div}$ の接着子

でなければならない．これを保証するため，

補題16 分割図

$a = t \times s$

を，定理12でいう左右逆または上下逆の σ で変換し

$a^{\sigma} = t^* \times s^*$

となったとすると，この転置構造の部分は，実は

$t^* = t^{\sigma}$

と，定理10でいう σ で変換されている．

この補題を使ってよければ，(2)の問題は解決する．というのは，いま

$a = u \times p$, $b = v \times q$

とすると，

s が a, b の接着子

のとき，つまり（定義25）

s が u, v の接着子

のとき，補題15から

$s^{\cdot|\cdot}$ は，$v^{\cdot|\cdot}$, $u^{\cdot|\cdot}$ の接着子

$s^{\div}$ は，$u^{\div}$, $v^{\div}$ の接着子

そこで，補題16にいうように

$a^{\sigma} = u^{\sigma} \times p^*$, $b^{\sigma} = v^{\sigma} \times q^*$

となっていたとすれば，上のことは，

$s^{\cdot|\cdot}$ は，$b^{\cdot|\cdot}$, $a^{\cdot|\cdot}$ の接着子

$s^{\div}$ は，$a^{\div}$, $b^{\div}$ の接着子

といいかえられて，定理の(2)が確実になる．

けれども，補題16は，定理12のまえに，証明することができない．そもそも，図変換 σ が定義されないうちは補題16はいみがない．ここは，しかし，こう考える．定理12と補題16とを，いっしょにして，それを段階的に証明する．まず

（1） $[\ \ ] \times \phi$ については，問題がない．

つぎに，和については

（2） a, b については，σ が定義され，補題がなりたつ，と仮定すると

いま証明したように，定理の(2)が確定して，和

$$a \dashv s \vdash b = (u \times p) \dashv s \vdash (v \times q) = (u + v) \times p\ s\ q$$

の σ が定義され

$$\begin{aligned}(a \dashv s \vdash b)^{\cdot|\cdot} &= b^{\cdot|\cdot} \dashv s^{\cdot|\cdot} \vdash a^{\cdot|\cdot} \\ &= (v^{\cdot|\cdot} \times q^*) \dashv s^{\cdot|\cdot} \vdash (u^{\cdot|\cdot} \times p^*) \\ &= (v^{\cdot|\cdot} + u^{\cdot|\cdot}) \times q^* s^{\cdot|\cdot} p^* \\ &= (u + v)^{\cdot|\cdot} \times q^* s^{\cdot|\cdot} p^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(a \dashv s \vdash b)^{\div} &= a^{\div} \dashv s^{\div} \vdash b^{\div} \\ &= (u^{\div} \times p^*) \dashv s^{\div} \vdash (v^{\div} \times q^*) \\ &= (u^{\div} + v^{\div}) \times p^* s^{\div} q^* \\ &= (u + v)^{\div} \times p^* s^{\div} q^*\end{aligned}$$

このように，転置構造の部分は

$u+v$　が　$(u+v)^{\cdot|\cdot}$　に
$(u+v)^{\div}$　に

と変換されている．つまり

和についてもσが定義され，補題がなりたつ．

それから，転置にたいして

（3）　aについてσが定義され，補題がなりたてば
a'についてもσが定義され，補題がなりたつ

ことをいう．定義されることに問題はなく，いま

$a=t\times s,\quad a'=t'\times s$

$a^{\cdot|\cdot}=t^{\cdot|\cdot}\times p,\quad a^{\div}=t^{\div}\times q$

とすると

$a'^{\div}=a^{\cdot|\cdot\,\prime}=(t^{\cdot|\cdot}\times p)'=t^{\cdot|\cdot\,\prime}\times p$

$=t'^{\div}\times p$

$a'^{\cdot|\cdot}=a^{\div\prime}=(t^{\div}\times q)'=t^{\div\prime}\times q$

$=t'^{\cdot|\cdot}\times q$

つまり，a'の転置構造t'は，補題のように変換する．

§12. 図　変　換（3）
変換の合成表

以上で，左右逆・上下逆の，定義はできたけれども，その変換としての性質，たとえば

$a^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=a$

などは，のこしてきた．ここで，それを片づけよう．

ふたたび，転置構造の変換にたちかえる．まず

補題17　かってな転置構造uにたいし

$u'^{\cdot|\cdot}=u^{\div\prime}$

$u^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=u$

$u^{\div\div}=u$

$u^{\cdot|\cdot\,\div}=u^{\div\,\cdot|\cdot}$

ここで，くわしくは，たとえば，

$(u')^{\cdot|\cdot}$

とかくべきところを，これまでにもしたように，

$u'^{\cdot|\cdot}$

とかいている．略式というより，実は，

定義32　変換σ，τがあるとき，これをこの順に続けておこなうと，つまり，まず

u　を　u^{σ}　に

変換，この

u^{σ}　を　$(u^{\sigma})^{\tau}$　に

と変換，けっきょく

u　を　$(u^{\sigma})^{\tau}$　に

変換するということで，ひとつの変換ρが定まる．

$u^{\rho}=(u^{\sigma})^{\tau}$

このρを，σとτの**合成**，あるいは**積**といい

$\rho=\sigma\tau$

とかく．つまり

$u^{\sigma\tau}=(u^{\sigma})^{\tau}$

この，変換の積については，結合法則

$(\rho\sigma)\tau=\rho(\sigma\tau)$

がなりたつから，

$\rho\sigma\tau$

のように，続けがきしてよい．

定義33　変換のとくべつな場合として

u　に　u自身を

対応させるもの，を考えることができる．これを，不動変換，あるいは**単位変換**といって，1で表わす．

$u^{1}=u$

このような定義によれば，証明すべき式は，変換の合成結果が，変換として何にひとしい，という関係

$'\,\cdot|\cdot=\div\,'$

$\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot=1$

$\div\div=1$

$\cdot|\cdot\,\div=\div\,\cdot|\cdot$

の形にかける．

この第1式は，左右逆・上下逆の定義にふくまれている．そこで，つぎに第2，3式を証明しよう．例によって，段階を追っていう．まず

（1）　$[\quad]^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=[\quad]^{\cdot|\cdot}=[\quad]$
$[\quad]^{\div\div}=[\quad]^{\div}=[\quad]$

つぎに，和については

$(u+v)^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=(v^{\cdot|\cdot}+u^{\cdot|\cdot})^{\cdot|\cdot}$

$=u^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}+v^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}$

$(u+v)^{\div\div}=u^{\div\div}+v^{\div\div}$

そこで

（2）　もしも

$u^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=u,\quad v^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=v$

ならば

$(u+v)^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=u+v$

またもしも

$u^{\div\div}=u,\quad v^{\div\div}=v$

ならば

$(u+v)^{\div\div}=u+v$

そうして，転置については

$u'^{\cdot|\cdot}=u^{\div\prime}$

の両辺の左右逆をすると

$u'^{\cdot|\cdot\,\div}=u^{\div\prime\div}$

ここで，

$u^{\div}=v$

とおけば

$v'^{\div}=v^{\cdot|\cdot\,\prime}=u^{\div\,\cdot|\cdot\,\prime}$

まとめて

$u'^{\cdot|\cdot\,\div}=u^{\div\,\cdot|\cdot\,\prime}$

おなじように

$u'^{\div\,\cdot|\cdot}=u^{\cdot|\cdot\,\prime\,\cdot|\cdot}=u^{\cdot|\cdot\,\div\prime}$

そこで

（3） もしも

$u^{\div\div}=u,\ \ u^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=u$

ならば

$u'=w$

についても

$w^{\div\div}=w,\ \ w^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=w$

以上から，第2，3式がいわれる．

さいごに第4式を証明しよう．まず

（1） $[\quad]^{\cdot|\cdot\,\div}=[\quad]=[\quad]^{\div\,\cdot|\cdot}$

つぎに，和については

$(u+v)^{\div\,\cdot|\cdot}=(v^{\div}+u^{\div})^{\cdot|\cdot}$

$=v^{\div\,\cdot|\cdot}+u^{\div\,\cdot|\cdot}$

$(v+v)^{\cdot|\cdot\,\div}=(u^{\cdot|\cdot}+v^{\cdot|\cdot})^{\div}$

$=v^{\cdot|\cdot\,\div}+u^{\cdot|\cdot\,\div}$

だから

（2） もしも

$u^{\cdot|\cdot\,\div}=u^{\div\,\cdot|\cdot},\ \ v^{\cdot|\cdot\,\div}=v^{\div\,\cdot|\cdot}$

ならば

$(u+v)^{\cdot|\cdot\,\div}=(u+v)^{\div\,\cdot|\cdot}$

それから転置については

$u'^{\cdot|\cdot\,\div}=u^{\div\prime\div}=u^{\div\,\cdot|\cdot\,\prime}$

$u'^{\div\,\cdot|\cdot}=u^{\cdot|\cdot\,\prime\,\cdot|\cdot}=u^{\cdot|\cdot\,\div\prime}$

そこで

（3） もしも

$u^{\div\,\cdot|\cdot}=u^{\cdot|\cdot\,\div}$

ならば，

$(u')^{\div\,\cdot|\cdot}=(u')^{\cdot|\cdot\,\div}$

以上から，第4式がいわれる．

つぎに，接着子の変換を問題にする．

補題18 接着子 s にたいして

$s^{\div\div}=s$ （変換として $\div\div=1$）

$s^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=s$ （変換として $\cdot|\cdot\ \cdot|\cdot=1$）

$s^{\cdot|\cdot\,\div}=s^{\div\,\cdot|\cdot}$ （変換として $\cdot|\cdot\,\div=\div\,\cdot|\cdot$）

これは，やさしい．

$\cdot|\cdot$ は 記号の種類を反対にする

$\div$ は 記号の順序を反対にする

そうして，

反対の反対は，もともと

だから

$\cdot|\cdot\ \cdot|\cdot=1,\quad \div\div=1$

また，種類と順序の反対は，独立なことで

$s=s_1\cdots\cdots s_n$

とすると

$s^{\cdot|\cdot}=s_1{}^{\cdot|\cdot}\cdots\cdots s_n{}^{\cdot|\cdot}$

$s^{\cdot|\cdot\,\div}=s_n{}^{\cdot|\cdot}\cdots\cdots s_1{}^{\cdot|\cdot}$

おなじようにして

$s^{\div\,\cdot|\cdot}=s_n{}^{\cdot|\cdot}\cdots\cdots s_1{}^{\cdot|\cdot}$

そこで，いよいよ，分割図の変換を考える．

定理13 分割図の変換として

$''=1$

$'\,\cdot|\cdot=\div\,'$

$\cdot|\cdot\ \cdot|\cdot=\div\div=1$

$\cdot|\cdot\,\div=\div\,\cdot|\cdot$

なぜなら，第1～2式はよいとして，あとのも，まず

（1） $[\quad]$については，問題がない．

もともと，どの変換 σ についても

$[\quad]^{\sigma}=[\quad]$

つぎに和については

$(a\dashv s\vdash b)^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=(b^{\cdot|\cdot}\dashv s^{\cdot|\cdot}\vdash a^{\cdot|\cdot})^{\cdot|\cdot}$

$=a^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}\dashv s^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}\vdash b^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}$

$=a^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}\dashv s\vdash b^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}$

$(a\dashv s\vdash b)^{\div\div}$

$=a^{\div\div}\dashv s\vdash b^{\div\div}$

また

$(a\dashv s\vdash b)^{\cdot|\cdot\,\div}$

$=b^{\cdot|\cdot\,\div}\dashv s^{\cdot|\cdot\,\div}\vdash a^{\cdot|\cdot\,\div}$

$(a\dashv s\vdash b)^{\div\,\cdot|\cdot}$

$=b^{\div\,\cdot|\cdot}\dashv s^{\div\,\cdot|\cdot}\vdash a^{\cdot|\cdot\,\div}$

$=b^{\div\,\cdot|\cdot}\dashv s^{\cdot|\cdot\,\div}\vdash a^{\cdot|\cdot\,\div}$

そこで

（2） a，b にたいして，

$x^{\cdot|\cdot\,\cdot|\cdot}=x^{\div\div}=x$

$x^{\cdot|\cdot\,\div}=x^{\div\,\cdot|\cdot}$

ならば，

a ⊣ s ⊢ b

についても，おなじ関係がなりたつ．

そうして転置については，補題17とおなじ計算で

（3） aにたいして，上の関係がなりたてば，a'についても，おなじ関係がなりたつ．

以上から，定理がいわれる．

この定理によって，

転置・左右逆・上下逆

′　⟊　÷

から生ずる，種々の変換に関して，合成の公式が，すべてもとめられる．それで，定理にあげたのを，基本関係とよぶことができる．

定義34　合成変換

⟊÷＝÷⟊＝π

とおいて，平角迴転または点対称という．

定義35　合成変換

⟊′＝R

とおいて，直角迴転，また

÷′＝$\overline{R}$

とおいて，負の直角迴転

π′＝‵

とおいて，かりに，別の転置という．

ここで，注意として，$\overline{R}$は

÷′＝′⟊

この両辺に，′ を合成すると

÷″＝′⟊′

ここで，転置の転置

″＝1

は，合成にたいして，影響を及ぼさない．

補題19　かってな変換σにたいして

$\sigma 1 = 1\sigma = \sigma$

そのいみは

$a^{\sigma 1} = a^{1\sigma} = a$

もともと，単位変換1というのは

$x^1 = x$

として定義されているから，これは明らか．

そこで，さきの関係は

÷＝′⟊′

この両辺を ′ に合成すると

′÷＝″⟊′＝⟊′＝R

これで，3種の基本的変換の，直接の合成規則が，わかった．単位変換1までふくめ，

4×4＝16

通りの合成結果を，まとめてあげれば

11＝1,　′1＝′,　⟊1＝⟊,　÷1＝÷,
1′＝′,　″＝1,　⟊′＝R,　÷′＝$\overline{R}$,
1⟊＝⟊,　′⟊＝$\overline{R}$,　⟊⟊＝1,　÷⟊＝π
1÷＝÷,　′÷＝R　⟊÷＝π,　÷÷＝1

この表には，基本的なもの以外の

π，R，$\overline{R}$

もあらわれてきているから，規則としてまだ完全でないすぐ考えつくこととして，たとえば

′R＝″÷＝÷
⟊R＝⟊⟊′＝′
÷R＝÷⟊′＝π′＝‵

こんどは，‵ がでてきたから，たとえば，

′‵＝′÷⟊′＝⟊′⟊′＝⟊÷″＝⟊÷＝π
⟊‵＝⟊÷⟊′＝÷⟊⟊′＝÷1′＝÷′＝$\overline{R}$
÷‵＝÷÷⟊′＝1⟊′＝⟊′＝R

こういうようにして，しらべてゆくと

1，′，⟊，÷，π，R，$\overline{R}$，‵

という，8種の変換にたいする

8×8

通りの合成の規則がもとめられる．その結果は，すべてこれら8種のどれかであらわされており，そのいみで，完全な表になる．つぎに，その結論をかかげよう．表の

σ が，たとえば⟊の行を横に
τ が，たとえば÷の列を縦に

見ていって，ぶつかったところが，この順の合成

⟊÷，一般にいえば　$\sigma\tau$

定理14　図変換8種の合成規則

σ \ τ	1	⟊	÷	π	′	R	$\overline{R}$	‵
1	1	⟊	÷	π	′	R	$\overline{R}$	‵
⟊	⟊	1	π	÷	R	′	‵	$\overline{R}$
÷	÷	π	1	⟊	$\overline{R}$	‵	′	R
π	π	÷	⟊	1	‵	$\overline{R}$	R	′
′	′	$\overline{R}$	R	‵	1	÷	⟊	π
R	R	‵	′	$\overline{R}$	⟊	π	1	÷
$\overline{R}$	$\overline{R}$	′	‵	R	÷	1	π	⟊
‵	‵	R	$\overline{R}$	′	π	⟊	÷	1

ここで，8種とかいたけれども，それらがみな，本当に別々の変換であることを，いっておく必要がある．

a＝[[[ ] [ ]] [ ]] [ ]×⊣⊣

について，ためしてみると，$a^1=a$　以下

$a^{\dagger}$=[ ] [[[ ] [ ]] [ ]]×⊢⊣

$a^{\div}$=[[ ] [[ ] [ ]]] [ ]×⊢⊣

a^{π}=[ ] [[ ] [[ ] [ ]]]×⊢⊢

a'=[[[[ ] [ ]] [ ]] [ ]]×⊣⊣

a^R=[[ ] [[[ ] [ ]] [ ]]]×⊢⊣

$a^{\overline{R}}$=[[[ ] [[ ] [ ]]] [ ]]×⊢⊣

$a^{\grave{}}$=[[ ] [[ ] [[ ] [ ]]]]×⊢⊢

となって，みな結果がちがい，変換として同一でない.

§13. 図　変　換　(4)
変換群での同値類別

定義36　一般に，記号の集まりがあって，

1）そのなかの記号α，βにたいし，その合成あるいは積とよばれる

$$\alpha\beta$$

が，記号中のものとして定められており

2）それが結合法則

$$(\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma)$$

をみたし

3）また，記号中のかってなαにたいして

$$1\alpha=\alpha 1=\alpha$$

となるような，**単位**1が，その記号のなかにあり

4）この1に関し，かってなαにたいして，その**逆**とよばれる$\overline{\alpha}$が定められていて

$$\alpha\overline{\alpha}=\overline{\alpha}\alpha=1$$

こういうとき，その記号の集まりは，**群**になっているという.

とくに，変換の集まりの場合，定義32のいみの合成によるときは，これを変換群という．その場合，結合法則は，当然になりたっているから，ほかの条件だけためせばよい．図変換の場合，8種ぜんぶを考えれば

1）その中で，結合ができる.

2）結合法則は，よろしい.

3）1は，条件の式をみたす.

$$1\alpha=\alpha 1=\alpha$$

4）どのαに対しても，$\overline{\alpha}$があって

$$\alpha\overline{\alpha}=\overline{\alpha}\alpha=1$$

この4）を，ためせばよい．しかし

$$1\,1=1$$

$$\dagger\dagger=1$$

$$\div\div=1$$

$$\pi\pi=1$$

$$''=1$$

$$\grave{}\grave{}=1$$

これらについては

$$\alpha=\overline{\alpha}$$

として，条件を満足する．のこるR，$\overline{R}$についても，ちょうど

$$R\overline{R}=\overline{R}R=1$$

定理15　図変換は，8種で，群になっている．これを単に図変換群とよんで，Gとかく.

Gは，すなわち

1，†，÷，π，′，R，$\overline{R}$，`

という，8種の変換の集まりで，その変換のひとつを，代表的に，γなどとかく.

そこでいよいよ，この群を分割図の種々と関連させてみよう．ひとつの分割図aから，群Gの変換によって

$$a^1,\ a^{\dagger},\ a^{\div},\ a^{\pi},\ a',\ a^R,\ a^{\overline{R}},\ a^{\grave{}}$$

という，図ができる．これら8個は，一般にはそれぞれちがった図となるけれども，特別な場合には，おなじものがでてくることがある．極端な場合として

a=[ ]

ならば，8個といっても，すべてa．そこまでゆかずとも，たとえば

a=[[ ] [ ]] [ ]×⊣

とすると

$$a^1=a^{\div},\ a^{\dagger}=a^{\pi},\ a'=a^R,\ a^{\overline{R}}=a^{\grave{}}$$

となって，8個が4種になる．そのくわしくは，あとにゆずり，8個が何種かになる，とする．何種かは，はっきりしなくても，ともかく，分割図の一組

$$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_m$$

ができる．このような分割図は，見掛け上はことなっても，実質的にはおなじとみる．そうして，たがいに同値とか，同意とかいうことにする．条件をわけてかけば

定義37　分割図a，bのあいだに，

$a^{\gamma}=b$　　γは図変換群G中のある変換

の関係がなりたつとき，

$$a\sim b$$

とかいて，aはbに**同値**，あるいは同意などという.

補題20　この同値という関係について

1）$a\sim a$

2）$a\sim b$　ならば　$b\sim a$

3）$a\sim b$，$b\sim c$　ならば　$a\sim c$

がなりたつ.

なぜなら，図変換群G中には1があって

$$a^1=a$$

となるから，定義から

$$a\sim a$$

つぎに

$$a\sim b$$

つまり，G中のあるγで

$$a^\gamma=b$$

とする．群の定義から，このγに対し逆$\overline{\gamma}$があって

$$\gamma\,\overline{\gamma}=1$$

したがって，とくに

$$a^{\gamma\overline{\gamma}}=a^1=a$$

一方，仮定の式から，これは

$$(a^\gamma)^{\overline{\gamma}}=b^{\overline{\gamma}}$$

にひとしく

$$b^{\overline{\gamma}}=a$$

だから

$$b\sim a$$

それから，

$$a\sim b,\quad b\sim c$$

とすると，G中のあるα，βで

$$a^\alpha=b,\quad b^\beta=c$$

そうすると，このα，βの積がG中にあって，

$$a^{\alpha\beta}=(a^\alpha)^\beta=b^\beta=c$$

したがって，

$$a\sim c$$

この補題の関係から，同値について，たがいに，というういいかたが，ゆるされることになる．つまり，aがbに同値なら，bもaに同値だから，aとbとはたがいに同値といってよい．aとb，bとcが同値なら，aとcも同値だから，a, b, cはたがいに同値といってよい．a，b，c，dなどについても同様．

定義38 たがいに同値な分割図をひとまとめにしたものを，分割図の同値類という．

同値類は，その中のひとつ，たとえばaに同値なものの全体，といってもよい．aに同値なものは，おたがいに同値

$$a\sim b,\ c,\ \cdots\cdots \quad \text{ならば} \quad b\sim c \quad \text{等}$$

で，また，そうした

$$b,\ c,\ \cdots\cdots$$

のどれかと同値なものは，もともとaと同値になる．

さらに，同値の定義にかえっていえば，この同値類中の，ひとつのaに，図変換G中の変換を，ひと通りほどこしたもの

$$a^1,\ a^{\cdot|\cdot},\ a^{\div},\ a^{\pi},\ a',\ a^R,\ a^{\overline{R}},\ a^{\grave{}}$$

が，同値類にほかならない．ただし，重複が起こるのはゆるすとする．

定義39 分割図aをふくむ同値類を，

$$\overline{a} \qquad \text{あるいは} \qquad |a|$$

で表わし，aで代表させることのできる**分割型**という．

分割図が同値というのを，いいかえて，おなじ同値類に属する，おなじ分割型を代表する，などとしてよい．分割型とは，分割図の同値類で，図変換群Gの作用，図の置き方のちがいを，差別しない見地に，対応する．この分割型の定義ができて，記号法は一段落ついた．

なおすこし，補足をしておこう．

定義40 分割図aで

1) $a^{\cdot|\cdot}=a$ となるのを 左右対称

2) $a^{\div}=a$ となるのを 上下対称

3) $a^{\pi}=a$ となるのを 点対称

という．（定義29そのままによると，左右逆対称，上下逆対称，点対称対称，といったことになるが）．

そのほかの変換については，何対称ということを，とくには定義しない．というのは，まず

定義41 変換8箇を2組にわけ

$$1,\ \cdot|\cdot,\ \div,\ \pi \quad \text{を第1種}$$

$$',\ \ R,\ \overline{R},\ \grave{} \quad \text{を第2種}$$

という．

補題21 分割図

$$a=t\times s$$

の転置構造の記号総数

$$[\cdot\ t+]\cdot t$$

は，第1種変換では変化せず，第2種変換では，一般には2だけ増減する．ただし，特別な場合として

$$a=[\ \ ]$$

のときだけは，全然変化しない．

なぜなら，分割図aの変化にともなう，転置構造tの変換というのは，$\cdot|\cdot$や$\div$の場合，もともと関係式

$$(u+v)^{\cdot|\cdot}=v^{\cdot|\cdot}+u^{\cdot|\cdot}$$

$$(u+v)^{\div}=u^{\div}+v^{\div}$$

$$u'^{\cdot|\cdot}=u^{\div\prime}$$

で定義されていて，その記号数に変化のないことが，段

階的に示される．そうだとすると，変換

$'$,　$R=+'$,　$\overline{R}=\div'$,　$`=+\div'$

の，記号数に対する効果を考える場合，$+$や$\div$は無視してよいことになる．ただ変換$'$だけについて調べればよい．ところが，$'$つまり転置については，一般には

$u'=[u]$　または　$u=[u']$

で，記号数が，［と］との2箇分，増減する．ただし

$u=[\quad]$

の場合にかぎって

$u'=u$

この補題から，転置対称などといったのは，定義しても益のないことがわかる．

定義42　［ ］でないa，bの同値関係を2種にわけ，

第1種変換σで　$a^{\sigma}\sim b$　のとき　$a\cong b$

第2種変換τで　$a^{\tau}\sim b$　のとき　$a\ncong b$

この記号のうち，$\cong$については，補題20にいう関係が示される．なぜなら

1は第1種

σ が第1種なら，その逆$\overline{\sigma}$も第1種

σ_1, σ_2 が第1種なら，$\overline{\sigma_1}$, $\overline{\sigma_2}$ も第1種

で，まえの証明がそのままあてはまる．しかし$\ncong$のほうは，ちょうどふつうの$\neq$記号のように

$a\ncong b$　ならば　$b\ncong a$

となるだけで，あとの式はいわれない．

補題22　σ を第1種，τ を第2種とすると

$\sigma_1\sigma_2=\sigma_2\sigma_1$

$+\tau=\tau\div$,　$\div\tau=\tau+$

$\pi\tau=\tau\pi$

これは，変換の合成規則から，示される．要するに，

$\div+=\div+$,　$+'='\div$

にもとづいている．

補題23　同値と対称性との関係について

aが左右対称で　$a\cong b$　なら　bも左右対称

〃　$a\ncong b$　なら　bは上下対称

aが上下対称で　$a\cong b$　なら　bも上下対称

〃　$a\ncong b$　なら　bは左右対称

aが点対称で　$a\sim b$　なら　bも点対称

なぜなら，たとえば

$a^{+}=a$, $a^{\sigma}=b$, σ は第1種

のとき，補題22から

$b^{+}=a^{\sigma+}=a^{+\sigma}=a^{\sigma}=b$

また

$a^{+}=a$, $a^{\tau}=b$, τ は第2種

のとき

$b^{\div}=a^{\tau\div}=a^{+\tau}=a^{\tau}=b$

定義43　左右対称と上下対称とをひっくるめて，かりに線対称という．点対称で線対称のとき点線対称という．

補題24　この点，線，点線対称については，同値なものは，おなじ対称性をもつ．

定義44　分割型についても，それを代表するひとつの分割図の対称性に応じて，点・線，点線対称を定義する．

この対称性が，同値類の構成つまり

a^{1}, a^{+}, $a^{\div}$, a^{π}, a', a^{R}, $a^{\overline{R}}$, $a^{`}$

のあいだで起こりうる等式の関係に，どうあらわれるか．まず，前半4箇と後半4箇とにわけると，補題21により

$a\neq[\quad]$

なら，転置構造の記号数がちがうから

前半の$a^{\sigma}\neq$後半のa^{τ}

そうして，後半というのは，前半それぞれの転置

a', $a^{+\prime}$, $a^{\div\prime}$, $a^{\pi\prime}$

だから，たとえば

前半で　$a^{1}=a^{+}$

ならば

後半で　$a'=a^{+\prime}$

その逆もなりたつ．したがって，前半だけをしらべればよい．4個のあいだの等式関係は，組み合わせの数

$4\times3\div2=6$

種ある．それを，つぎのようにならべよう．

$a^{1}=a^{+}$,　$a^{\div}=a^{\pi}$

$a^{1}=a^{\div}$,　$a^{+}=a^{\pi}$

$a^{1}=a^{\pi}$,　$a^{+}=a^{\div}$

ここで，横にならべたものの，一方がなりたてば，他方も当然になりたつことになる．たとえば

$a^{1}=a^{+}$　なら　$a^{\div}=a^{+\div}=a^{\pi}$

その逆も正しい．そういうわけで，

補題25　等式関係が起こるとすれば，場合は

1）$a^{1}=a^{+}$, $a^{\div}=a^{\pi}$, $a'=a^{R}$, $a^{\overline{R}}=a^{`}$

2）$a^{1}=a^{\div}$, $a^{+}=a^{\pi}$, $a'=a^{\overline{R}}$, $a^{R}=a^{`}$

3）$a^{1}=a^{\pi}$, $a^{+}=a^{\div}$, $a'=a^{`}$, $a^{R}=a^{\overline{R}}$

ここで，またがった場合，たとえば1)2)が同時におこるとすれば

$a=a^{+}=a^{\div}$

となって，3)もおこることになる．そうすると実は

4)　$a^{1}=a^{+}=a^{\div}=a^{\pi}$，$a'=aR=a\overline{R}=a^{\backprime}$

さらに，全部がひとしくなることもあるが，それは

$a=$[　]

ところで，上の1)と2)は，本質的には区別すべきでない．というのは，1)で

$a'=b$　したがって　$a=b'$

とおくと，等式は

$b'=b'^{+}=b^{+\prime}=b\overline{R}$

などとなって，2)の形のものになる．だから1) 2) は，いっしょに考えよう．その性格はといえば

$a^{+}=a$　または　$a^{\div}=a$

左右対称または上下対称，つまり線対称にほかならない．そうして3)は点対称，4)は点線対称に相当する．

定理16　(分離型の)分割図の同値類について，場合はつぎのように，きっかりとわけられる．

1)　8種ともちがう．
2)　点対称な4種からなる．
3)　線対称な4種からなる．
4)　点線対称な2種からなる．
5)　1種だけで，実は[　]の場合

非分離型までふくませられれば，もうひとつ

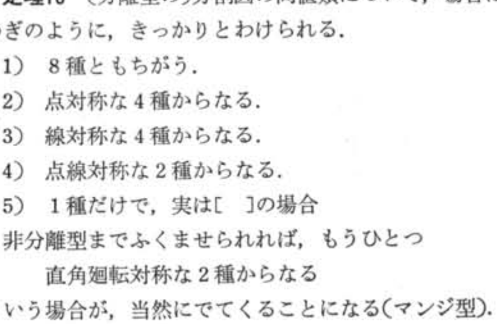
直角廻転対称な2種からなる

という場合が，当然にでてくることになる(マンジ型)．しかし，いまは，そこまで進めない．

2)～4)の場合の実例として，分割型を，それを代表する適当な分割図で，示しておこう．

2)　[[ ] [ ]] [[ ] [ ]]]×⊣⊢
3)　[[ ] [ ]] [ ]×⊣
4)　[ ] [ ]

図で示せば



補　一部読者のために(3)

本文でのべたように，分割型というものを，分割図の図変換群から生ずる同値類別によって，定義する手法は現代数学でおなじみのもの．とくにいうことはない．

ただし筆者としては，思い出がある．経済学部の卒業時だったかの試験で，計量経済学の自由題に，いわゆるパレート理論を，この手法で定式化し，優を（数すくなくしかとれなかった優のひとつを）いただいたことがある．それは，のちに，

「経済の数学」　小山書店・新初等数学講座

でも解説した．この手法は，まだいろいろなところに使って，重宝と思われる．

さて，ところで，問題は，図変換群の定義にある．この群，つまり正方形の対称群は，ふつうには，裏返し合同かどうかを第1に区別する立場から，扱われる．まず

直角廻転R，$R^{4}=1$

から生ずる，4位の巡同群

$\{1,\ R,\ \pi,\ \overline{R}\}=H$

これを，裏返し合同のひとつτで拡大して，Gを得る．

$\tau R\tau=\overline{R}$

この拡大の式は共通で，τとしてはどれをとってもよい．

$'$，$\backprime$，$+$，$\div$

それらは，あるいは対角線とか，あるいは対辺中点連結線とかについての，折り返しに相当すべきだけれども，対称群を抽象的に考えるさいには，区別がない．

正方形の，中点を順につないでえられる，双対的な正方形に移れば，対角線と対辺中点連結線とが，ちょうど入れかわるのだから，それは当然といえる．

しかし，本文の記号法の流儀にとっては

$'$，$\backprime$　と　$+$，$\div$

とは，はっきり区別がある．はじめから定めてある，縦と横に関して，前者は，それを入れかえるのに，後者はそうでない．

そもそも理論のはじめに，和分解につけ加えるべき概念として，縦・横を入れかえる変換が，まず必要になった．そういうものとしては，本文でいう第2種の

R，$\overline{R}$，$'$，$\backprime$

がある．幾何学ふつうの発想にしたがい，はじめにはRを採用しようかとも思ったが，位数4というのをきらって，転置$'$にした．あとから考えれば，それが幸運な選択であった．

さらに，変換群を構成するにしても，Rというのは，きめ手がない．それに対して

左右逆　$+$，　上下逆　$\div$

ならば，和分解および転置の手続きにしたがって，定義がうまくゆく．そういうことで，おなじみの生成元Rには，わき役にしりぞいてもらうことになった．変換群Gの，本文でのとらえ方では，2位の巡同群

$\{1,\ +\}=I$

{1, ÷}$=J$

の直積

$I\times J=K$

これが転置で拡大されるとGになる．その場合の関係

′⸽′＝÷

も，Kの生成元をいれかえる点では，前のと共通するけれども，KはもちろんHと同型でない．したがって，抽象群Gの構成法としても，これは前のとちがっている．

生成元と基本関係でGを示すのに，前のは

$R^4=\prime^2=1$

$R^\prime=\prime R^3$

で，生成元数２，関係数３．本文のは

⸽²＝÷²＝′²＝1

⸽÷＝÷⸽，　⸽′＝′÷

で，生成元数３，関係数５．この箇数だけからすれば，たしかに前の普通の流儀のほうが，かんたんといえるが，本文のは，生成元の位数がすべて２という点に，特色がある．幾何学的にいえば，点や線に関する対称変換で，一般に，それで運動群が生成されるというのが，　G・Thomsen の群論的幾何学基礎論の出発点であった．

ところで，その本文の方式で，うまく目的が達せられたについては，分離型という，おあつらえむきの土台がある．そこに一種の数学的帰納法，和・転置帰納法ともいうべきものが成りたって，種々の定理や定義が順調にはこばれた．この土台をとると，万事がむずかしくなる．

さらにさかのぼって，分割図における

転置構造と接着構造の分離

それは，この長々しい解説における，少数の急所の一つと思うけれども，その場合に

転置構造から，適合的な接着構造が規定される

という，重要な事実も，分点数の定義など，この和・転置帰納法で，支えられている．

本文の，残りの部分では，これまでの分離型という小世界から，一般の場合へ，記号法を拡張する問題を考察する．そこでは，自然さが失われてくるけれども

転置記号列と接着記号列の分離

という立場は，保存して進もう．計算機に入れるためには，この要請は欠かせない．そうして，第１着手としては，和の概念を拡張する．その拡張されたいみでの，和・転置帰納法によって，必要な概念をきずいてゆく．ただしこんどは，接着構造を転置構造だけから規定する，というわけにはゆかない．それやこれやで複雑になる．

数学的理論としては，これからが，本当に考えがいがあるのだけれども，しかし，手法の根本は，これまでのべたところで，ほぼつきている．拡張されたいみの和に関して，それらを適当に修正適応させてゆく，技巧が，のこりの問題といってもよい．数学において，技巧は，やはり重大だけれども，普通の読者に対しては，ここで打ち切ってもよい．せいぜい，和の概念の拡張をのべ，

一般の場合についても，同様にして……

その，同様にしてが，曲者であることを，知っている読者ならば，しかし，あえて一般の複雑な場合の解説に筆を進めようとする，筆者の心情を了解されるだろう．