

断面が急変する板の有限要素法による2次元弾性解析

磯 畑 脩

§ 1. はじめに

2次元弾性解析では板厚とその方向の応力分布は一定である。板厚が急変する場合はその付近、特に厚板側の断面方向の応力分布が一様でなくなる。それゆえ、このような板を厳密に解析しようとするれば3次元問題になるが、断面方向の応力、変位の全体に及ぼす影響が少ないならば、これを無視して2次元の問題として扱うことができる。

一例として構面内に力を受ける壁付架構をとり上げてみよう。この構造は骨組と壁板の2次元の結合体として通常は扱われるけれども、その場合壁板と骨組の結合部付近の局所的な挙動は無視されている。連続体としての立場からこの壁付架構を考えるならば、3次元として扱うのは厄介であり、断面が急変する所の局所的な影響を考慮した上で2次元問題として扱えると、骨組置換による解析を補える点でもうまい。

このような方法の1つとして断面の応力分布の不均一によって生ずる面内への影響を、面内変形に関して等価な板厚に置換し、局所的に異方性を有する一定厚板として有限要素法で解析する方法を述べる。

§ 2. 板厚係数による Hooke の法則の表示

x方向に関して厚さが急変する図-1に示すモデルを考える。板厚の薄い部分Iは等方性 $[E, \nu]$ であって、厚い部分IIを直交異方性 $[E_x, E_y, \nu_x, \nu_y]$ と考えてこの部分の板厚係数 η_x, η_y を(1)式のように定義する。

$$E_x = \eta_x E, \quad E_y = \eta_y E \quad \dots(1)$$

直交異方性板に関する Maxwell-Betti の相反定理

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y} \quad \dots(2)$$

からポアソン比は次のようにおける。

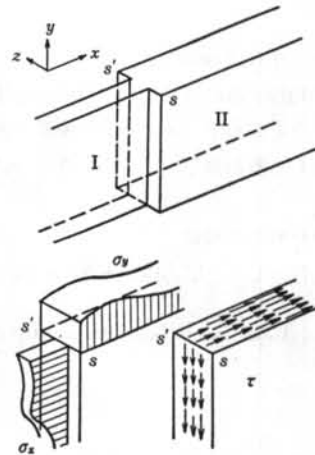


図-1 断面急変板と応力分布のモデル化

$$\nu_x = \frac{\eta_x}{\sqrt{\eta_x \eta_y}} \nu, \quad \nu_y = \frac{\eta_y}{\sqrt{\eta_x \eta_y}} \nu \quad \dots(3)$$

一方、せん断弾性係数 G_{xy} は、

$$\eta_{xy} = \sqrt{\eta_x \eta_y} \quad \dots(4)$$

とおくと、等方性のせん断弾性係数 G を用いて

$$G_{xy} = \frac{\sqrt{\eta_x \eta_y}}{2(1 + \sqrt{\eta_x \eta_y})} = \eta_{xy} G \quad \dots(5)$$

で表わせる。したがって厚い部分に対する Hooke の法則を(1), (3), (5)式を用いて表わすと、(6), (6)'式が得られる。

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} &= \frac{1}{1 - \nu_x \nu_y} \begin{bmatrix} E_x & \nu_y E_x & 0 \\ \nu_x E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & G_{xy} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} \\ &= \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} \eta_x & \eta_{xy} \nu & 0 \\ \eta_{xy} \nu & \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\eta_{xy}(1 - \nu)}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (6) \end{aligned}$$

$$\{\delta\} = [D_N] \{\epsilon\} \quad \dots(6)'$$

注1) 有限要素法の概要は付録に述べてある

§ 3. 板厚係数による等価異方性置換

3次元弾性体を、未知量を減らして2次元弾性体として解析する目的のために、急変部分の断面方向の応力分布の影響を、(1)、(4)式に示す板厚係数としてあらかじめ解析的に求めておく。x方向に断面が急変する場合の応力を図-2に表わす。η_xを厚い部分bの直応力σ_xと薄い部分hの直応力σ_{x0}に関する比

$$\eta_x = \frac{\sigma_{x0}}{\frac{1}{h} \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} \frac{h}{2} \sigma_x dz} \quad \dots(7)$$

から求める。そうすればη_xhは、直応力σ_xによる板幅hのx方向平均ひずみに等しい均一ひずみを生ずるような等価厚さを表わす。σ_xはzの関数であるが、z方向分布すなわち断面分布が均一のときはη_x=b/hと

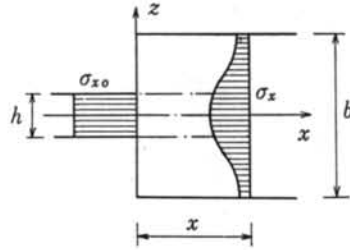


図-2

なり薄板と厚板の厚さ比を表わしている。

急変部分(厚板側)が有限であるために2つの境界条件が影響しあう場合とそうでない場合に分けて(7)式をAiryの応力関数を用いて求めてみよう。

3.1 急変部分が有限の場合

両端を同一条件として、応力関数Fを(8)式のようにおく。

$$F = \sum_m \frac{1}{\lambda^2} (A_m \cosh \lambda x + B_m \lambda x \sinh \lambda x) \cos \lambda z - f(x) \quad \dots(8)$$

$$\text{ここに, } \lambda = \frac{2m\pi}{b}$$

応力σ_x, τは(9)、(10)式のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \\ &= -\sum_m (A_m \cosh \lambda x + B_m \lambda x \sinh \lambda x) \cos \lambda z - \frac{\partial^2 f(x)}{\partial z^2} \end{aligned} \quad \dots(9)$$

$$\begin{aligned} \tau &= -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \\ &= \sum_m [(A_m + B_m) \sinh \lambda x + B_m \lambda x \cosh \lambda x] \sin \lambda z \end{aligned} \quad \dots(10)$$

x = -a/2 における境界条件を

$$\begin{aligned} \tau &= 0, \\ \sigma_x &= \sigma_{x0} \quad (-h/2 \leq z \leq h/2) \\ &= \frac{h}{b} \sigma_{x0} \left\{ 1 + \sum_m \frac{2 \sin \beta_1}{\beta_1} \cos \lambda z \right\}, \\ \beta_1 &= m\pi h/b \end{aligned} \quad \dots(11)$$

とにおいて未定係数A_m, B_mを求めると、

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{\sinh \alpha_1 + \alpha_1 \cosh \alpha_1}{\alpha_1 + \sinh \alpha_1 \cosh \alpha_1} \cdot \frac{2h\sigma_{x0} \sin \beta_1}{\beta_1}, \\ B_m &= \frac{\sinh \alpha_1}{\sinh \alpha_1 + \alpha_1 \cosh \alpha_1} A_m, \\ \alpha_1 &= m\pi a/b \end{aligned} \quad \dots(12)$$

および,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{h}{b} \sigma_{x0} \quad \dots(13)$$

が得られる。(12), (13)式を(7)式に代入して η_x を求めると(14)式ようになる。

$$\eta_x = \frac{1 + \sum_m \frac{2\sin^2\beta_1}{\beta_1^2}}{1 + \sum_m \frac{2\sin^2\beta_1 [(\sinh\alpha_1 + \alpha_1 \cosh\alpha_1) \cosh\lambda x - \sinh\alpha_1 \cdot \lambda x \sinh\lambda x]}{\beta_1^2 (\alpha_1 + \sinh\alpha_1 \cosh\alpha_1)}} \quad \dots(14)$$

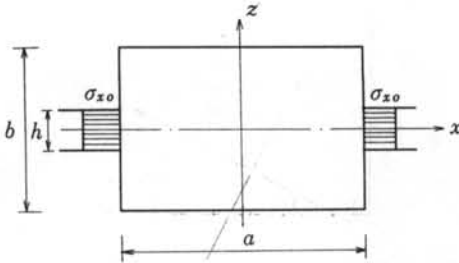


図-3

3.2 急変部分が十分に長い場合

$$F = \sum_m \frac{1}{\lambda^2} \{A_m + B_m \lambda x\} \exp(-\lambda x) - f(x) \quad (15)$$

とおくと, $x=0$ にて(11)の境界条件を用いて A_m, B_m を求め, 3.1 と同様にして(7)式を算出すると(16)式が得られる。

$$\eta_x = \frac{1 + \sum_m \frac{2\sin^2\beta_1}{\beta_1^2}}{1 + \sum_m \frac{2\sin^2\beta_1}{\beta_1^2} (1 + \lambda x) \exp(-\lambda x)} \quad (16)$$

(15), (16)式は境界条件(11)で Fourier 級数展開し

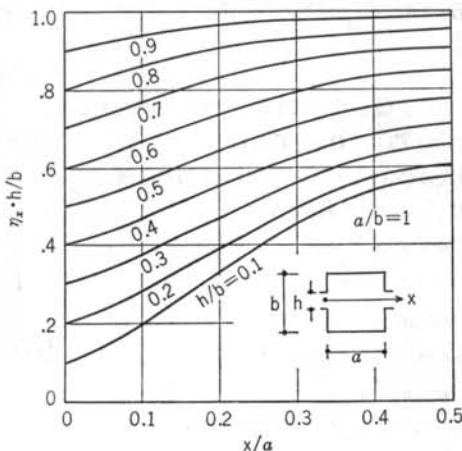


図-4 板厚係数 (有限対称の場合)

た σ_{x0} に対する解であるが, x/b が大きくなると収束が極めて悪くなる。その場合は級数展開しない σ_{x0} に対する解として, (15), (16)式の分子を b/h とおくと避けられる。

急変部分から十分離れて σ_x の断面分布が均一になると $\eta_x = \eta_y = b/h$ であり, これを(6)式に代入すると,

$$[DN] = \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{b}{h} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \quad \dots(17)$$

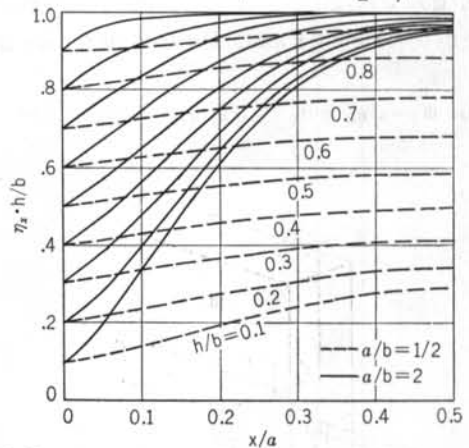


図-5 板厚係数 (有限対称の場合)

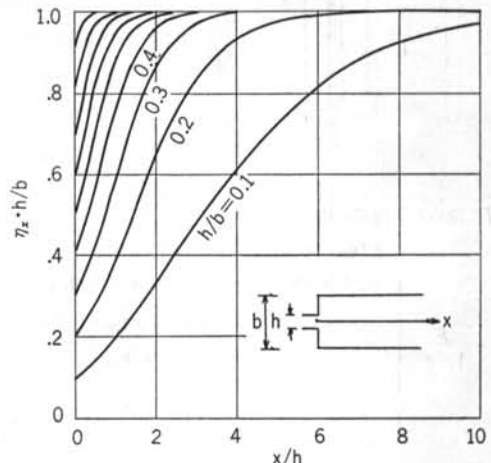


図-6 板厚係数 (一端無限の場合)

となり、これは板厚が b/h 倍の等方性板であることを示すに他ならない。板厚係数と薄板の厚さの積すなわち、 $\eta_x h$, $\eta_y h$, $\eta_{xy} h$ はそれぞれ断面急変部分の厚板の x, y 方向の直応力およびせん断に対する等価厚さを表わす。

断面が y 方向に急変する場合も同様にして η_y が得られる。(14), (16)式の計算結果を図-4~6に示す。

3.3 薄板側が不連続の場合

3.1, 3.2はいずれも薄板が x, y 両方向に連続する場合であるが、断面が x 方向に急変し、かつ、 y 方向に不連続な場合(図-7 参照)の板厚係数は次のようにして求められる。厚板II部分の板厚係数 $\eta_x(\text{II})$ は薄板Iと厚板IIに関して3.1または3.2から得られる η_x に等しい。

厚板IIIの板厚係数 $\eta_x(\text{III})$ は $y=0$ における x 方向の等価板厚 $\eta_x h$ を薄板値の厚さ h' として、局所座標系 (x', z') から求めた $\eta_{x'}$ を用いて次式から得られる。

$$\eta_x(\text{III}) = \sqrt{\eta_x \eta_{x'}} \quad \dots (18)$$

したがって厚板IIIのせん断に対する板厚係数 $\eta_{xy}(\text{III})$ は

$$\eta_{xy}(\text{III}) = \sqrt{\eta_x(\text{III}) \eta_y} = \sqrt{\eta_{x'} \eta_{xy}} \quad \dots (19)$$

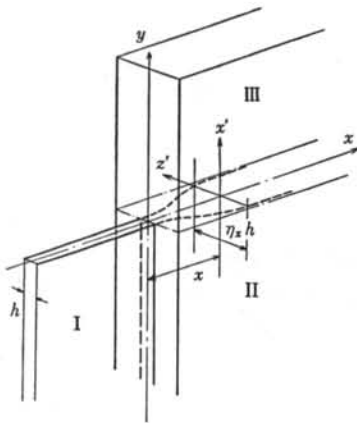


図-7 薄板が不連続の場合

$$= \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \ell^4 \eta_x + m^4 \eta_y & \ell^2 m^2 (\eta_x + \eta_y) & \ell^2 m^2 (\ell^2 \eta_x - m^2 \eta_y) \\ + 2 \ell^2 m^2 \eta_{xy} & + (2 \ell^2 m^2 + \nu) \eta_{xy} & - (\ell^3 m - \ell m^3) \eta_{xy} \\ * & m^4 \eta_x + \ell^4 \eta_y & \ell^2 m^2 (m^2 \eta_x - \ell^2 \eta_y) \\ * & + 2 \ell^2 m^2 \eta_{xy} & - \ell m^3 - \ell^3 m \eta_{xy} \\ & * & \ell^2 m^2 (\eta_x + \eta_y) \\ & & + \left\{ \frac{1+\nu}{2} (\ell^2 - m^2)^2 - \nu (\ell^4 + m^4) \right\} \eta_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots (27)$$

ここに、 $\ell = \cos \theta$, $m = \sin \theta$ 。

§ 4. 板厚係数の直交座標変換

局部的に異方性を有する厚板部分の主方向が (x, y) 座標系と一致しない場合、すなわち薄板と厚板の接合面が傾斜しているときは (\bar{x}, \bar{y}) を主方向とすると、次の座標変換から (x, y) 座標系に対する D_N が求められる。

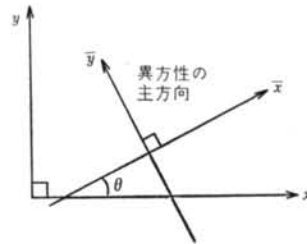


図-8

$$[T_\epsilon] = \begin{pmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -\sin \theta \cos \theta \\ -2 \sin \theta \cos \theta & 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad \dots (20)$$

とおくと、 (x, y) 座標系に関するひずみ ϵ , 応力 δ と (\bar{x}, \bar{y}) 座標系に関するひずみ $\bar{\epsilon}$, 応力 $\bar{\delta}$ の関係は、

$$\{\epsilon\} = [T_\epsilon] \{\bar{\epsilon}\}, \quad \dots (21)$$

$$\{\delta\} = [T_\sigma] \{\bar{\delta}\}, \quad \dots (22)$$

$$[T_\sigma] = [T_\epsilon^T]^{-1} \quad \dots (23)$$

(\bar{x}, \bar{y}) 座標系における Hooke の法則は

$$\{\bar{\sigma}\} = [\bar{D}_N] \{\bar{\epsilon}\}, \quad \dots (24)$$

$$[\bar{D}_N] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} \eta_x & \nu \eta_{xy} & 0 \\ \nu \eta_{xy} & \eta_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots (25)$$

であるから、(24)式に(21), (22)式を代入すると、

$$\{\sigma\} = [T_\sigma]^{-1} [\bar{D}_N] [T_\epsilon] \{\epsilon\} \quad \dots (26)$$

(26)式に(23)式を代入して結局 $[D_N]$ は、

$$[D_N] = [T_\epsilon]^T [\bar{D}_N] [T_\epsilon] \quad \dots (27)$$

§ 5. 要素の剛性マトリクス

板厚に関しては板厚係数によって置換されているから基準厚さ h に対する断面方向の定積分を行なうと、要素の剛性マトリクス k は(28)式で表わせる。

$$[k] = \iiint [N]^T [D_N] [N] dx dy dz$$

$$= h \iint [N]^T [D_N] [N] dx dy \quad \dots (28)$$

ここに N は要素の変位関数 $u(x, y)$, $v(x, y)$ から決まる。3 角形要素の変位関数を

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y, \\ v(x, y) &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \dots (29)$$

とすると、剛性マトリクス k_T は表-1 のようになる。また長方形要素の変位関数を

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 xy, \\ v(x, y) &= \alpha_5 + \alpha_6 x + \alpha_7 y + \alpha_8 xy \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

とすると、要素の剛性マトリクス k_R は表-2 のようになる。

要素の節点力 f_m と節点変位 δ_m の関係は

$$\{f_m\} = [k] \{\delta_m\} \quad \dots (31)$$

で表わすことができ、全要素に対する連立方程式(31)を平衡法によって未知変位 δ_m を解けばよい。

$\eta_x Y_{jk}^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{jk}^2$	$-\frac{1+\nu}{2} \eta_{xy} X_{jk} Y_{jk}$	$\eta_x Y_{jk} Y_{ki} + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{jk} X_{ki}$	$-\nu \eta_{xy} Y_{jk} X_{ki} - \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{jk} Y_{ki}$	$\eta_x Y_{ij} Y_{jk} + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{ij} X_{jk}$	$-\nu \eta_{xy} X_{ij} Y_{jk} - \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{ij} X_{jk}$	u_i
	$\eta_y X_{jk}^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{jk}^2$	$-\nu \eta_{xy} X_{jk} Y_{ki} - \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{jk} X_{ki}$	$\eta_y X_{jk} X_{ki} + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{jk} Y_{ki}$	$-\nu \eta_{xy} Y_{ij} X_{jk} - \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{ij} Y_{jk}$	$\eta_y X_{ij} X_{jk} + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{ij} Y_{jk}$	v_i
		$\eta_x Y_{ki}^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{ki}^2$	$-\frac{1+\nu}{2} \eta_{xy} X_{ki} Y_{ki}$	$\eta_x Y_{ki} Y_{ij} + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{ki} X_{ij}$	$-\nu \eta_{xy} Y_{ki} X_{ij} - \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{ki} Y_{ij}$	u_j
			$\eta_y X_{ki}^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{ki}^2$	$-\nu \eta_{xy} X_{ki} Y_{ij} - \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{ki} X_{ij}$	$\eta_y X_{ki} X_{ij} + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{ki} Y_{ij}$	v_j
				$\eta_x Y_{ij}^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} X_{ij}^2$	$-\frac{1+\nu}{2} \eta_{xy} X_{ij} Y_{ij}$	u_k
					$\eta_y X_{ij}^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} Y_{ij}^2$	v_k

単位: $\frac{Eh}{4(1-\nu^2)A}$

$X_{ij} = x_i - x_j$
 $Y_{ij} = y_i - y_j$

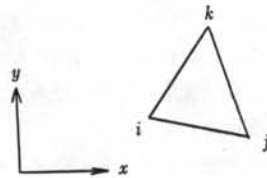


表-1 3 角形要素のマトリクス k_T (x, y が主方向の場合)

d_1	e_1	g_1	e_2	$-d_1/2$	$-e_1$	$-f_1$	$-e_2$	u_i	$d_1 = 4 \left(\frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} a^2 + \eta_x b^2 \right)$
	d_2	$-e_2$	g_2	$-e_1$	$-d_2/2$	e_2	$-f_2$	v_i	
		d_1	$-e_1$	$-f_1$	e_2	$-d_1/2$	e_1	u_j	$d_2 = 4 \left(\eta_y a^2 + \frac{1-\nu}{2} \eta_{xy} b^2 \right)$
			d_2	$-e_2$	$-f_2$	e_1	$-d_2/2$	v_j	
				d_1	e_1	g_1	e_2	u_k	$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = 3 \eta_{xy} ab \left\{ \nu \pm \frac{1-\nu}{2} \right\}$
					d_2	$-e_2$	g_2	v_k	
						d_1	e_1	u_l	$f_1 = 2 \{ (1-\nu) \eta_{xy} a^2 - \eta_x b^2 \}$
							d_2	v_l	$f_2 = \{ 4 \eta_y a^2 - (1-\nu) \eta_{xy} b^2 \}$
									$g_1 = (1-\nu) \eta_{xy} a^2 - 4 \eta_x b^2$
									$g_2 = 2 \{ \eta_y a^2 - (1-\nu) \eta_{xy} b^2 \}$

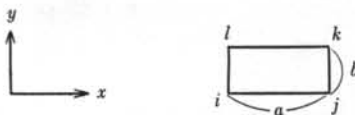


表-2 長方形要素の剛性マトリクス k_R (x, y が主方向の場合)

注2) (35)式の $[B][T]^{-1}$ が $[N]$ である

§ 6. 要素の応力

(30), (31)式に要素の節点座標を代入すると次式で表わせる.

$$\begin{Bmatrix} u_m \\ v_m \end{Bmatrix} = [D_m] \boldsymbol{\alpha}, \quad \dots(32)$$

$$[D_m] = [T][\boldsymbol{\alpha}] \quad \dots(33)$$

また(30), (31)式を x, y で偏微分して, 要素のひずみ度 $\boldsymbol{\epsilon}$ を表わすと,

$$\boldsymbol{\epsilon} = [B][\boldsymbol{\alpha}] \quad \dots(34)$$

(33), (34)式から $\boldsymbol{\alpha}$ を消去して要素のひずみを節点変位で表わすと次式のようになる.

$$\boldsymbol{\epsilon} = [B][T]^{-1} \boldsymbol{\delta}_m \quad \dots(35)$$

(35)式を(6)'式に代入すると薄板の厚さ h に対する要素の応力が求められる. また(35)式を通常の等方性板に対する Hooke の法則

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [D][\boldsymbol{\epsilon}], \quad \dots(36)$$

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{pmatrix} \quad \dots(37)$$

に代入すると等価板厚に関する応力 ($\eta_x h$ に対する σ_x , $\eta_y h$ に対する σ_y および $\eta_{xy} h$ に対する τ) が得られる.

§ 7. 急変厚板に関する例題

7.1 上下面に薄板を有する片持はり

以上の解析の応用例として上下面に薄板を有する片持はりの先端に鉛直荷重が加わる場合の計算結果を示そう(図-9). 断面の全厚を採って作った要素剛性マトリクスから得られる解をA解とし, 板厚係数による等価板厚

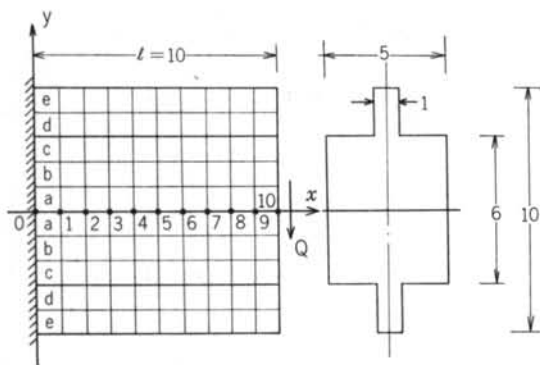


図-9 片持はり

で同様の手段で得られる解をB解とする. B解については基準厚さを1として $\eta_x, \eta_y, \eta_{xy}$ は表-3のような値になる.

要素	a	b	c	d	e
η_x	5	5	5	1	1
η_y	3.45	2.55	1.45	1	1
η_{xy}	4.15	3.57	2.69	1	1

表-3 板厚係数

一方, はり曲げの理論から得られる中立軸の弾性たわみは, はり曲げ剛性を EI , 断面積を A , セン断応力に関する断面形状係数を κ とすると, (38)式のようにせん断たわみ δ_s と曲げたわみ δ_B の和で表わせる.

$$\delta = \delta_s + \delta_B = \frac{\kappa Q}{GA} x + \frac{Q}{6EI} (3l - x)x^2, \quad (38)$$

$$\kappa = 1.335$$

これをC解とし, $\nu = 0.2$ とおいて中立軸の y 方向変形に関する3つの計算値を比較すると図-10のようになる. また $l/2$ の位置における断面のせん断応力分布は図-11のようになる.

外力として純曲げが作用する場合と同じ剛性マトリクスを用いて計算してみると, A, B両解は極めてよく一致する. これは曲げ主方向の有効板厚が全厚に等しく, かつ, 曲げ変形に支配的であるからであって, 断面急変の影響はない.

さて例題のようなせん断荷重の場合は図-10のC解にあるようにせん断変形の占める割合が大きいため, 断面急変による局所的な変形の影響が計算結果に現われている.

すなわちB解による変形はA解による変形よりも大きく, 全厚を採って作った剛性マトリクスを用いるA解は構造を硬めに評価していることを図-10は示している.

ただし, A, B, C 3解ともそのたわみ形状はほとんど一致する. したがって変形の絶対量は要素の分割に依存しているのであって, 分割をさらに細くするとA解はC解に近づくがB解による y 方向変位はC解よりも大きくなる. 中立軸の最大たわみは, B解/A解=1.075であるからC解の約7.5%増と考えてよい. なお断面の応力分布は全厚に関する応力度で比較すると図-11に示すようにほぼ一致する.

7.2 上下に壁のついた柱

薄板側が不連続な場合の例として, 図-12に示すような下り壁と, 腰壁のある柱のせん断変形を計算してみよう.

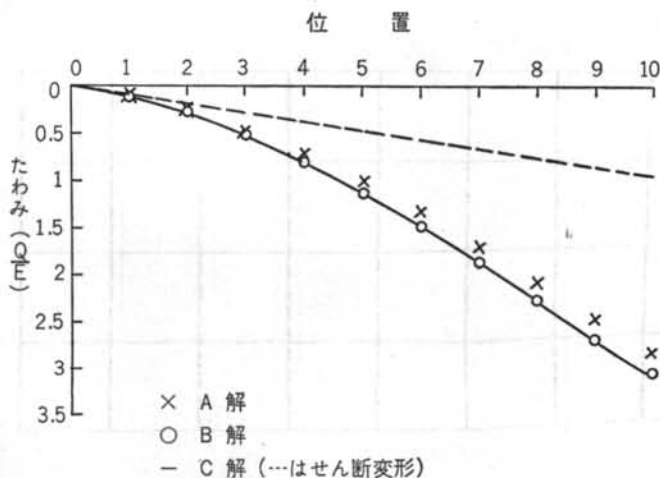


図-10 中立軸のたわみ

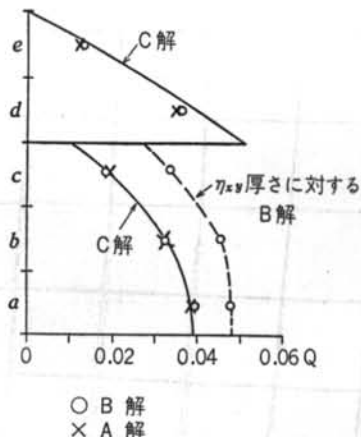


図-11 $l/2$ における断面のせん断応力分布

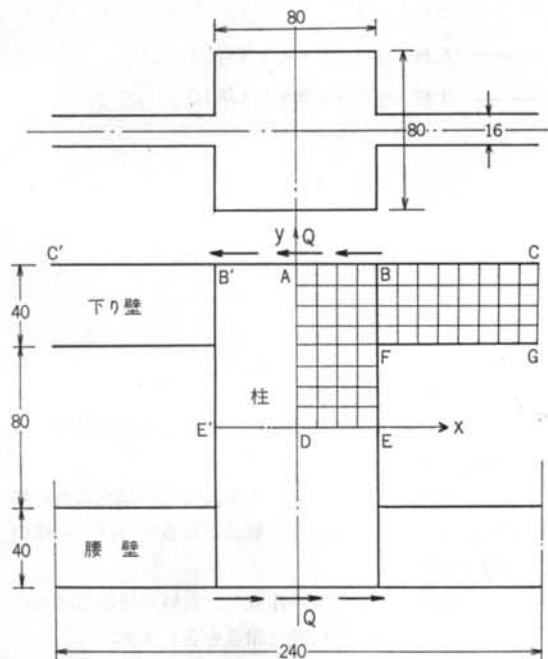


図-12 上下壁のついた柱

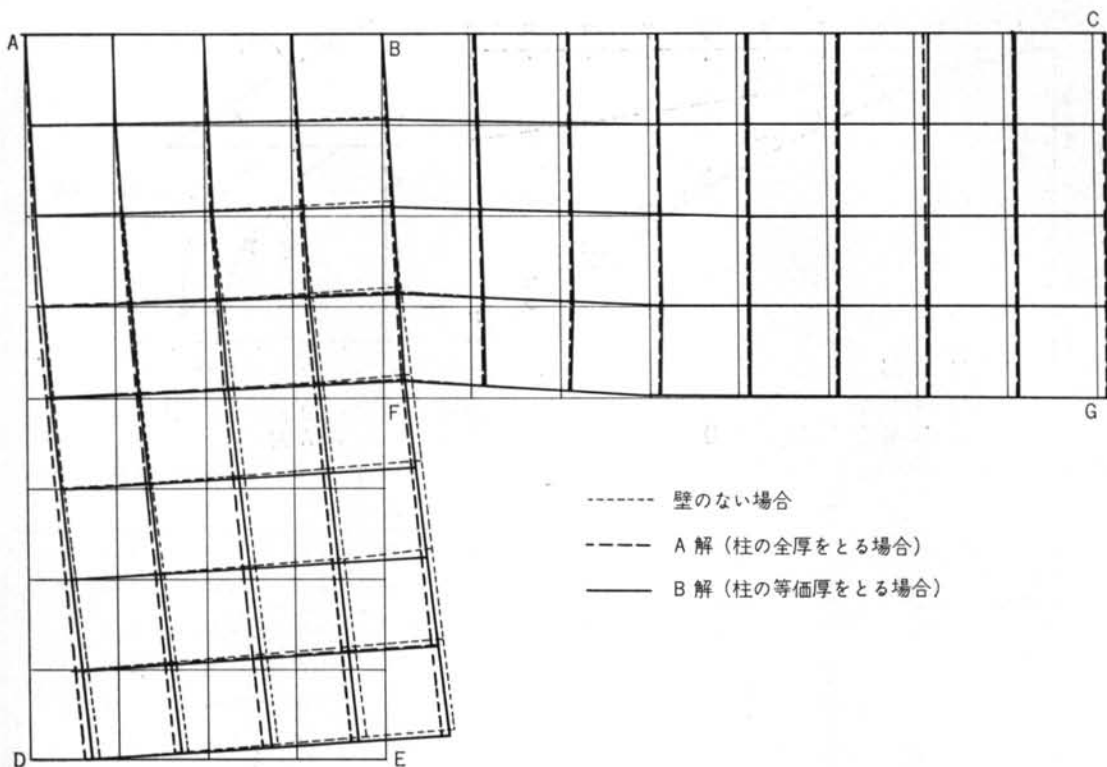
構造の対称性を利用して EE' 面にはこの面が平面を保つように剛トラスをつけ、せん断荷重 Q を加える。計算上の仮定として CC' 面の y 方向変形および BB' 面の x 方向変形を拘束する。 CG 面は各柱が x 方向に一樣に連続して存在すれば対称面であり、したがって自由辺として扱える。

7.1 と同様にして断面全厚に対する剛性マトリクスを用いた解を A 解、等価厚による場合を B 解とする。B 解の場合の板厚係数は 3.3 から求めると表-4 のようになる。変形の計算結果を図-13 に示す。壁の変形拘束の効果は柱中心点 D における変位で表わすと、B 解は A 解よ

A		B			
2.96	2.55	1.87	1.24	1.00	
5.00	5.00	5.00	5.00	1.00	
3.84	3.57	3.05	2.48	1.00	
2.96	2.55	1.87	1.24	1.00	
5.00	5.00	5.00	5.00	1.00	
3.84	3.57	3.05	2.48	1.00	
2.96	2.55	1.87	1.24	1.00	
5.00	5.00	5.00	5.00	1.00	
3.84	3.75	2.48	2.48	1.00	
2.96	2.55	1.87	1.24	1.00	
5.00	5.00	5.00	5.00	1.00	
3.84	3.57	3.05	2.48	1.00	
3.10	2.73	2.05	1.46		F
5.00	5.00	5.00	5.00		上段 v_x
3.93	3.70	3.20	2.70		中段 v_y
3.55	3.21	2.58	2.06		下段 v_{xy}
5.00	5.00	5.00	5.00		基準厚さ 16
4.21	4.00	3.59	3.20		
3.91	3.61	3.10	2.69		
5.00	5.00	5.00	5.00		
4.42	4.24	3.93	3.66		
4.13	3.87	3.40	3.09		
5.00	5.00	5.00	5.00		
4.54	4.39	4.12	3.93		D

表-4 板厚係数表

り 14.3% 多い (また壁のない場合の変位を 100% とすれば A 解は 80.2%, B 解は 91.8% に相当する)。要素の応力は薄板と厚板の境界 F 付近に相違がみられる。



図一13 上下壁のついた柱の変形

§ 8. むすび

断面が急変するような板の場合でも、面内変形に関して等価な板厚に置換し、局部的に異方性を有する定厚板として扱おうと、等質等方性板の剛性マトリクスを修正するだけで2次元解析できる見通しがあった。

鉄筋コンクリート裾壁付柱のように板厚比が大きく、かつ、厚板側(柱)の長さが短い場合の水平剛性や、例題

6.2 のような上下壁のついた柱の剛域を求める目的にはこの解析方法が使えるであろう。

また、板厚が一定の場合でも断面内で局部的に力が加わるか、または他の構造物に繋結されるならば、同様のとり扱いができる。

終りに剛性マトリクスの作成と、数値計算にご助力いただいた設計部奥山吉松氏に謝意を表します。

〈参考文献〉

S. Timoshenko and J. N. Goodier: "Theory of Elasticity" McGraw-Hill, 1951

坪井善勝: "建築学大系(9)建築弾塑性学" 彰国社, 昭和34年

林 毅: "軽構造の理論とその応用" JUSE, 1966

R. K. Livesley: "Matrix Methods of Structural Analysis" Pergamon Press, 1964 (邦訳)

付録 有限要素法について

有限要素法 (Finite Element Method) はそのマトリクス形式によって簡単に表示できる上、大型電子計算機を用いれば容易に数値計算できるため、最近では各分野で広く使われつつある連続体の一近似解法である。

その手法は、解析しようとする連続体を有限要素でモデル化し、力の釣合条件と変形の適合条件から変位法 (変位が未知量) または応力法 (応力が未知量) により解くのであって、原理的には任意の弾性常数をもつ任意の形状をした構造物が静的または動的な外力を受ける場合を数値計算できる。

解の精度はこの時使用する有限要素の性質とその分割方法、分割数に依存しており、構造物を細分化すればするほど正解に近づく性質を持っている (有限要素でモデル化するため、内部変形に関して拘束を加えることになり、元の構造物に対して解は硬めの近似値を与える)。

次に平面応力問題における有限要素法の手法を具体的に示そう。

平面応力問題における応力、ひずみの関係は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \\ \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \\ \tau &= \frac{E}{2(1+\nu)} \gamma \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

(1) 式をマトリクス表示すると、

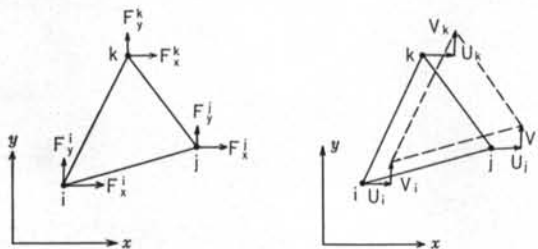
$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau \end{Bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma \end{Bmatrix} \dots (2)$$

または、

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \dots (3)$$

3角形有限要素として、

- 力は要素の節点を通じてのみ伝達される
- 要素の節点と辺において適合条件 (隣接辺との変形の



節点力

節点変位

付図

連続) を満足する

の2条件の下に変位関数を $\alpha_1 \sim \alpha_6$ を未定係数として次式で与える。

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \\ v &= \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

要素の節点変位を節点座標を用いて表わすと、

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \\ u_k \\ v_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \\ \alpha_6 \end{Bmatrix} \dots (5)$$

または、

$$\{\delta\} = [T]\{\alpha\} \dots (6)$$

(6) 式を逆変換して未定係 α を節点変位 δ で表わすと、

$$\{\alpha\} = [T]^{-1}\{\delta\} \dots (7)$$

要素のひずみは

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \dots (8)$$

に(4)式を代入すると、

$$\{\epsilon\} = [B]\{\alpha\}, \dots (9)$$

$$[B] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \dots (10)$$

B は定数のマトリクスであるから要素のひずみ ϵ は一定でありしたがって要素の各辺は変形後も直線であることがわかる (すなわち適合条件を満足している)。

(9) 式に(7)式を代入して未定係数 α を消去すると、

$$\{\epsilon\} = [B][T]^{-1}\{\delta\} = [N]\{\delta\} \dots (11)$$

次に要素の節点力 f と節点変位 δ の関係を要素のひずみエネルギーと外力仕事から求める。

単位単積当りのひずみエネルギー dw_{in} は、

$$\begin{aligned} dw_{in} &= \frac{1}{2} (\epsilon_x \sigma_x + \epsilon_y \sigma_y + \gamma \tau) = \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T \{\sigma\} \\ &= \frac{1}{2} \{\epsilon\}^T [D] \{\epsilon\} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T [N]^T [D] [N] \{\delta\} \end{aligned} \dots (12)$$

これを要素全体について積分すると、

$$w_{in} = \frac{1}{2} \{\delta\}^T \left(\iiint [N]^T [D] [N] dx dy dz \right) \{\delta\} \dots (13)$$

一方、節点力 f による外力仕事は、

$$w_{ex} = \frac{1}{2} \{\boldsymbol{\delta}\}^T \{\mathbf{f}\}, \quad \dots(14)$$

ここに,

$$\{\mathbf{f}\} = \begin{Bmatrix} F_x^i \\ F_y^i \\ F_x^j \\ F_y^j \\ F_x^k \\ F_y^k \end{Bmatrix} \quad \dots(15)$$

(13)式と(14)式を等置すると,

$$\{\mathbf{f}\} = \left(\iiint [N]^T [D] [N] dx dy dz \right) \{\boldsymbol{\delta}\} \quad \dots(16)$$

すなわち,

$$[\mathbf{k}] = \iiint [N]^T [D] [N] dx dy dz \quad \dots(17)$$

が(4)式で表わされるような変位関係を有する要素の剛性マトリクスである。要素の板厚を h とおくと、被積分項は x, y を含まないからただちに,

$$[\mathbf{k}] = h d [N]^T [D] [N] \quad \dots(18)$$

構造体の全要素について(16)式を作り,

$$\sum_m \mathbf{f}_m + \mathbf{P}_m = 0 \quad \dots(19)$$

で表わされる節点 m の力の釣合式 (\mathbf{P}_m は節点に働く外力) に代入して節点力 \mathbf{f} を消去する (変位法) と節点変位 $\boldsymbol{\delta}$ を未知量とする次の連立 1 次方程式が得られる。

$$[\mathbf{P}] = [\mathbf{K}] \{\boldsymbol{\delta}\} \quad \dots(20)$$

これを逆変換すると,

$$\{\boldsymbol{\delta}\} = [\mathbf{K}]^{-1} [\mathbf{P}] \quad \dots(21)$$

となって未知量 $\boldsymbol{\delta}$ が求められる。ここに $[\mathbf{K}]$ は要素の剛性マトリクス \mathbf{k} を重ね合わせて得られる構造体の剛性マトリクスである。

以上が、平面応力問題に対する 3 角形有限要素による変位法の応用である。有限要素として長方形を使うと、要素剛性マトリクスは大きくなる (8×8) が精度はよくなる。

有限要素法を平板曲げ、3 次元問題あるいは殻に応用する場合は未知量が増えるため、要素剛性マトリクスは大きくなる。