

## 振動系のモデル解析

小西 康之

### まえがき

地震に対する建物の動きや、設備機械の振動、あるいは騒音などの問題は、建設関係における研究の重要な一分野であるが、それらを標準化された系として考えることにより、数学的な表現方法を介して、電気や熱や、または他の種々な系と同様に、線型や非線型などの形態を問わず、相似的な取り扱いができる。

このような考え方はSIMULATION METHOD の上で広く利用され、また振動系の解析手段としても重要であるが、シミュレーション機器や手法の進歩により、今後さらに多くの分野に応用されるものであろう。

ここでは、主として建築構造物の振動解析に例をとり、ある程度理想化されたモデルについて、いくつかの応用を試みた。

### 伝送系のレスポンス

多質点系の運動や、相関性を有するいくつかの系の特性について解析するにあたり、今のところ固有値問題として、あるいは摂動法などによって処理されることが多いが、函数パラメーターを含むような非線型問題等を、解析的に厳密に解くことは、事実上不可能に近い。

しかし、一方において近年特に、そのような系について解析する需要が高まっているが、必ずしも厳密な解を必要とはせず、多くの場合、系がある刺激に対して、どのように応答するかということがわかればよいので、これらの系を1つのブラック・ボックスと考え、その伝送特性をうることによって目的は達成される。

一般化されたブラック・ボックスでは、任意の数の入力および出力を持つものと考えねばならない。そこで、入力の群を各要素が時間函数であらわされる  $n$  元の函数マトリックス  $\Phi(n)$  とし、出力の群もやはり同様なマトリックス  $\Psi(m)$  とすれば、系の伝送特性は次の関係を

みたすような、伝達函数を要素とする函数マトリックス  $\Omega(n, m)$  であらわされる。

$$\Psi(m) = \Omega(n, m) \cdot \Phi(n) \quad \dots(1)$$

ある入力  $\Phi(n)$  によって、常に一定の出力  $\Psi(m)$  が得られるような定常的な系については、マトリックス  $\Omega(n, m)$  が確定するが、履歴現象や遅延時間をもつ系などについて、一義的に  $\Omega$  を定めることは困難である。しかし、適応範囲の限定、あるいは、いくつかの状態ごとに、それぞれ条件を定めることによって、近似的にとりあつかうことができる。

### 振動系のモデル化

実際的な系のモデル化における基本例として、まず、1質点の力学的共振系について考えてみる。

図-1 に示す共振系の運動方程式は、力のつりあいから次のように表わされる。

$$-m \frac{d^2x}{dt^2} + \nu \frac{d(x-x_0)}{dt} + \kappa(x-x_0) = 0 \quad \dots(2)$$

ここで、支点の変位を  $x_0$ 、質点の変位を  $x$  とし、 $m$  を質量、 $\nu$  を減衰定数、 $\kappa$  を弾性定数とする。

(2)式を2度積分することによって次式を得る。

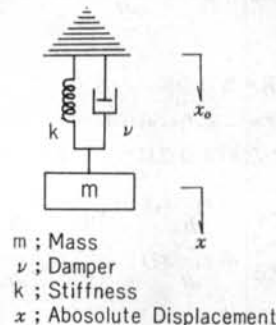


図-1

$$-m\dot{x} + \nu \int (x - x_0) dt + \kappa \iint (x - x_0) dt^2 = Pt + Q \quad \dots(3)'$$

積分定数PおよびQは系の初期位置，ならびに初速度によって定まる量であるが，相対的な運動について論ずる場合には，それぞれ0とおいてさしつかえない。したがって図-1の運動方程式の積分形として，次式が確定する。

$$-m\dot{x} + \nu \int (x - x_0) dt + \kappa \iint (x - x_0) dt^2 = 0 \quad \dots(3)$$

以上は，変位置量を変数として扱ったものであるが，次に加速度を変数とした場合について検討する。

図-1における  $x_0, x$  の各々に対してその加速度を  $\alpha_0, \alpha$  とすれば，力のつりあいから次式を得る。

$$-m\dot{\alpha} + \nu \int (\alpha - \alpha_0) dt + \kappa \iint (\alpha - \alpha_0) dt^2 = 0 \quad \dots(4)$$

(4)式は， $x \leftrightarrow \alpha$  の置きかえにより，形式的に(3)式と同一視することができる。また，

$$\iint \alpha dt = x \quad \dots(5)$$

の関係によって，加速度についての解析から同時に変位置量の応答を得ることもできる。

しかし，逆の場合はかなり困難である。それは，一般にシミュレーターが，原理的に時間微分の演算を十分な精度で実行し得ないことによるものである。

物理的な量は，かならずノイズやその他の外的要因を含んでいるために，微分によって誤差が大きくなる傾向

にある。このことは，数学的に函数が必ずしも微分可能ではないことに対応している。微分可能な函数は限られていて，それを物理的な系に再現することにも，おのずとその再現性に限度がある。

これに対して，積分は積分範囲が有限であるかぎり安定であり，したがって，シミュレーションの実行にあたっては，すべて積分形として演算が行なわれる。

(3)式，あるいは(4)式は，そのシミュレーションを実行させるために，図-2に示すようなブロック線図として表現される。同時にまた，図-3のような電気的な系で表わすこともできるが，そこでは電流が加速度あるいは変位に相当する。

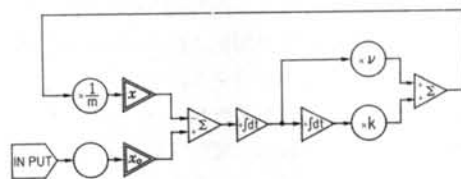
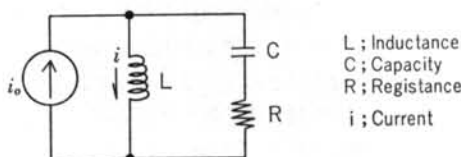


図-2



$$-L \frac{di}{dt} + R(i - i_0) + \frac{1}{C} \int (i - i_0) dt = 0$$

図-3

## 多質点系のシミュレーション

以上の方法を多質点系に拡張するにあたって高層建築物のせん断振動系に例をとることとする。これは図-4のようなモデルに置きかえて考えることができよう。第n番目の層についての運動方程式は次式で表わされる。

$$m_n \frac{d^2 x_n}{dt^2} + \nu_{(n-1, n)} \frac{d(x_{n-1} - x_n)}{dt} - \nu_{(n, n+1)} \frac{d(x_n - x_{n+1})}{dt} + \kappa_{(n-1, n)}(x_{n-1} - x_n) - \kappa_{(n, n+1)}(x_n - x_{n+1}) = 0 \quad \dots(6)$$

ここで  $x_n$  は第n番目の質点の変位，また  $m_n$  をその質量とし， $\kappa_{(n-1, n)}$ ， $\kappa_{(n, n+1)}$  はそれぞれ前後との質点間の弾性定数，また  $\nu_{(n-1, n)}$ ， $\nu_{(n, n+1)}$  は同じく質点間の減衰定数とする。

次に，簡略化のため3質点について考察を進めることとすると，全体の系は次のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \nu_{01} \frac{d(x_0 - x_1)}{dt} - \nu_{12} \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} + \kappa_{01}(x_0 - x_1) - \kappa_{12}(x_1 - x_2) &= 0 \\ m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} + \nu_{12} \frac{d(x_1 - x_2)}{dt} - \nu_{23} \frac{d(x_2 - x_3)}{dt} + \kappa_{12}(x_1 - x_2) - \kappa_{23}(x_2 - x_3) &= 0 \\ m_3 \frac{d^2 x_3}{dt^2} + \nu_{23} \frac{d(x_2 - x_3)}{dt} + \kappa_{23}(x_2 - x_3) &= 0 \end{aligned} \right\} \dots(7)$$

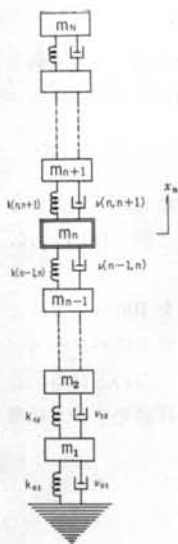


図-4

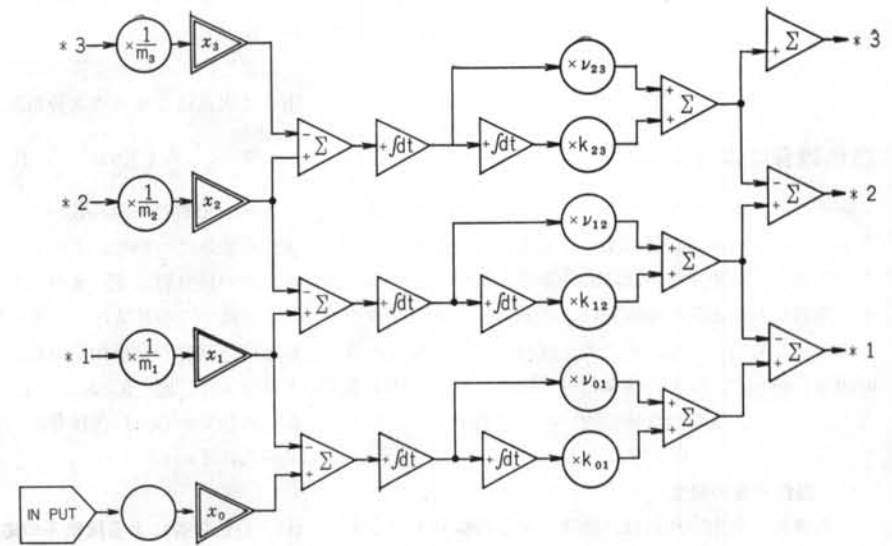


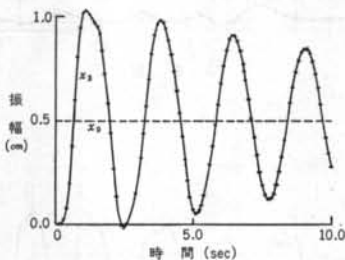
図-5

(7)式を2度積分して次式を得る.

$$\left. \begin{aligned}
 m_1 x_1 + \nu_{01} \int (x_0 - x_1) dt - \nu_{12} \int (x_1 - x_2) dt + \kappa_{01} \iint (x_0 - x_1) dt^2 - \kappa_{12} \iint (x_1 - x_2) dt^2 &= 0 \\
 m_2 x_2 + \nu_{12} \int (x_1 - x_2) dt - \nu_{23} \int (x_2 - x_3) dt + \kappa_{12} \iint (x_1 - x_2) dt^2 - \kappa_{23} \iint (x_2 - x_3) dt^2 &= 0 \\
 m_3 x_3 + \nu_{23} \int (x_2 - x_3) dt + \kappa_{23} \iint (x_2 - x_3) dt^2 &= 0
 \end{aligned} \right\} \dots (8)$$

1質点系の場合と同様にして、(8)式のブロック線図を作成すると、図-5 のようになる。

一例として、地盤に相当する  $m_0$  の点に入力が入ったときの最上部  $m_N$  のインシデンス応答を、デジタル・コンピューター (IBM1620) によって実行させると、図-6 の結果が得られる。なお、単位系は任意に選択できる。このほか層間変位や、各質点の変位なども必要に応じて取り出すことができる。



$$\begin{aligned}
 \kappa_{01} = \kappa_{12} = \kappa_{23} &= 1.00 \text{ (dyne/cm)} \\
 \nu_{01} = \nu_{12} = \nu_{23} &= 0.02124 \text{ (dyne}\cdot\text{sec/cm)} \\
 m_1 = m_2 = m_3 &= 0.03380 \text{ (gram)} \\
 x_0 &= \begin{cases} 0 & (t=0) \\ 0.5 & (t>0) \end{cases} \text{ (cm)}
 \end{aligned}$$

図-6

### シミュレーターについて

ここではシミュレーターとしてデジタル・コンピューターを使用しているが、本来、この種の目的にはアナログコンピューターが広く使用されている。

両者にはそれぞれ得失があり、一概にその優劣を論ずることはできないが、アナログ-デジタルコンバーターなどの利用によって、シミュレーションをデジタル・コンピューターで実行する上での制約は、ほとんどない。このためプログラム作成上の簡便さとか、任意函数

や非線型要素を、自由に扱うことができるなどの利点と相まって、実験的なシミュレーターとしては、デジタル・コンピューターの使用が有利であろうと思われる。

## 白色雑音による応答

前述のような線型な系の特性は、インシデンス応答、あるいはインパルス応答によって確実に表現されるが、それらの入力エネルギーは時間の原点に集中しているため、地震などの実際的な現象によるレスポンスとは、やや異なったものとなる。そこで、連続した白色雑音から時間幅を持った、現実の現象に近い疑似信号を合成することによって、実際の状態に近い応答を得ようとした。

### i) 白色雑音の発生

白色雑音の発生方法には、物理現象から信号を得るものとか、数学的に発生させるものなど各種の方法があるが、ここではデジタル計算機によるシミュレーションを前提としているため、やはり計算機を使用して擬似乱数から、ガウス分布乱数を作成することとした。

まず、次の合同式によって計算される乱数列は、0からM-1までの間において、一様乱数とみなされる。

$$\gamma_{n+1} \equiv K\gamma_n \pmod{M} \quad \dots(9)$$

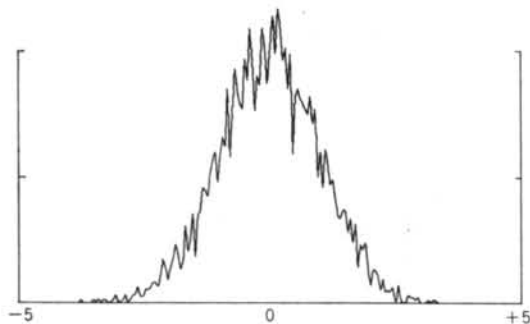


図-7

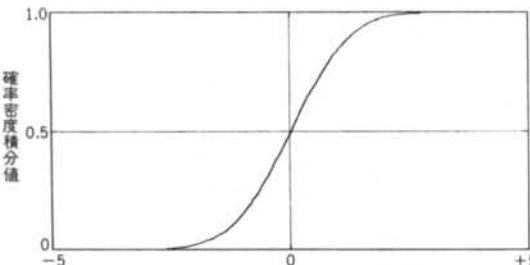


図-8

ここでは、 $K=23, M=10^8+1$  とし  $\gamma_0$  は0以外の8けたの任意数であるが、実際の計算にあたっては31415927から出発した。

次にこのようにして得られた一様乱数のうちのn個を用いて次式によりガウス分布乱数の要素gを計算する。

$$g = \sqrt{\frac{3}{n}} \left( \sum \gamma_n - \frac{n}{2} \right) \quad \dots(10)$$

各々が50個の一様乱数から計算された5,000個のガウス分布乱数について、その分布を画くと図-7のように、またその積分値は図-8のようになる。

さらに、この乱数について単位時間を10msecとみなした白色雑音の自己相関関数、ならびにそのパワースペクトラムは、図-9、および図-10にあらわされる。これらの結果から、白色雑音として、ほぼ満足すべき結果が得られている。

### ii) 白色雑音による振動系の応答

ある系の白色雑音による応答を求めることは、近似的に、すべての振動数にわたる系の伝達特性を得ることに相当し、その応答をフーリエ交換することにより、伝達関数が計算される。

図-4に示した系について、この白色雑音による応答を計算したのが図-11である。ここではフーリエ交換を行なわないが、1次のモードをはじめとして、高次の振動が確認される。

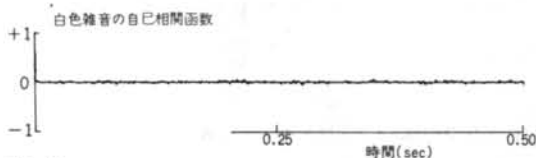


図-9

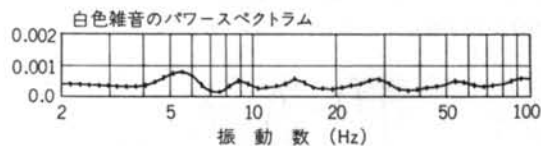


図-10

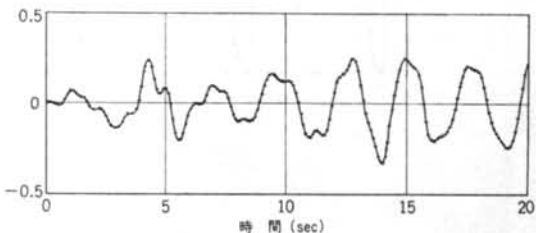


図-11

### iii) 疑似信号

白色雑音は近似的にすべての振動数成分を含み、エルゴード性を有する信号であり、定常的な系の解析には都合がよいが、実際に存在する現象は各種の周波数特性を持ち、また、時間的な振幅変動をともなうものである。そこで、ある種の現象に対しては、多数の信号を統計的に処理することによって、再現性の高い、標準的な疑似信号を白色雑音から合成することができよう。

建造物に作用する外力のうち、地震については数多くの観測データがあり、各々の特徴によってある程度定型化することができる。そこで建物の地震応答解析を標準化するために、建設予定地の特性を加味して合成した疑似地震波を用いるのが適当と思われるが、これについて

は、後に稿を改めて述べることにする。

### まとめ

本文においては、シミュレーションによる系の解析方法と、その入力信号の取り扱いについての一法を述べたに過ぎないが、今後、このような方法は複雑な系の解析にあたって、広く利用されるものと予想される。

なお、もう少し具体的な問題についての検討が必要となるであろうが、とりあえずは標準化した疑似地震波を合成することにより、実際の建築物のモデル解析に応用して行く所存である。最後に、計算にあたって協力を願った、広瀬道孝氏に深く感謝する次第である。

### <参考文献>

- 1) W. T. Thomson: "Vibration Theory and Applications" Prentice-Hall
- 2) S. H. Crandall: "Random Vibration" M.I.T. Press
- 3) J. Mcleod: "Simulation" McGraw-Hill
- 4) B. Janson: "Random Number Generators" V. Pettersons Bokindustri Aktiefbolag
- 5) 高橋秀俊: "振動と回路(現代物理学)" 岩波
- 6) 関英男: "情報理論(現代物理学)" 岩波
- 7) 宮武, 中山: "モンテカルロ法" 日刊工業新聞社

