

各種境界条件における基礎の復元力および減衰特性

山原 浩
広瀬 道孝

はじめに

最近“動的解析”という言葉が流行している。これは構造物が地震力や機械力のように時間的に変化する力を受けたとき、その挙動を動的に求めようとするものである。構造物はすべて地盤に接しているため、構造物の振動現象を考えると、地盤の効果を全く無視するわけにはいかない。地盤の弾性的性質に関する研究は、案外古くから行なわれてきた。まず地盤を質量のないばねに考え、単位面積当りのばね定数を地盤係数と呼ばれた^{1),2)}。さらに基礎とともに運動する土ということで付加質量という概念が用いられた^{3),4)}。このような地盤係数とか付加質量なる概念は、さまざまな条件において実験的に求めざるを得なかった。

一方、地盤を等方等質なる半無限完全弾性体といういわゆる理想地盤に仮定し、その地表に置かれた基礎の動的挙動を純粋に解析的に求めようとする試みが行なわれてきた^{5),6),7),8)}。当初はすべて円形基礎を想定して解析が進められてきたが、その後矩形基礎に関する解も発表されるに至った^{9),10)}。これら一連の研究では、動的変位に関する最終解を次のような形で表わしている。

$$\text{円形基礎} \quad u = \frac{F}{a\mu} [f_1 + if_2]$$

$$\text{矩形基礎} \quad u = \frac{F}{\pi^2 bc\mu} [f_1 + if_2]$$

上式において $[f_1 + if_2]/a\mu$, $[f_1 + if_2]/\pi^2 bc\mu$ に相当する項をグランドコンプライアンス(Ground Compliance)と呼ばれ、丁度剛性(Stiffness)の逆数の次元をもっている。グランドコンプライアンスが複素数で表わされているということは、基礎が受ける力の中に外力に対して同じ位相の成分と 90° 位相が進んだ成分があるということになる。前者がいわゆるばねによる復元力であり、後者が減衰力に相当する。この場合の減衰力は、振動エネルギーが波動として地中に逸散することに起因する。そこでこのような減衰を一般に地下逸散減衰と呼んでいる。

さて地盤係数—付加質量にもとづく考え方は、工学的には非常に理解しやすいのであるが、すべて経験的なものに依存するので、かなり個人差を生ずる。とくに地盤のばね定数が、基礎の面積に比例するという仮定に問題がある。さらに地盤の減衰効果については全く掘りどころがないので、変位計算においてはかなりあいまいなものになってしまう。

一方理想地盤による解析的方法では、実用上次のような問題に当面する。

- (1) 厳密に動的な問題として解析するため計算が非常に難しく、一般の技術者のレベルでは容易には理解できない。
- (2) グランドコンプライアンスの素子が振動数の関数になっているので、地震応答のように振動数が一定しない場合には適用しがたい。

このような2つの事情から、理想地盤による既往の研究は、理論的には優れたものでありながら、実用面ではほとんど利用されてこなかった。そこでなんとかしてこの方法を実用化することが、かねてからの課題であった。そのためには理想地盤による解析法における基本的なものはできるだけ保存し、かつ、計算を簡素化すると同時に、地盤の振動素子(ばね定数と減衰定数)を振動数に無関係な定数として与えることである。

実用化のための一方法として、筆者は次の2つの仮定を設けることによって、円形基礎について実用目的に十分な近似解を得ることに成功した¹¹⁾。

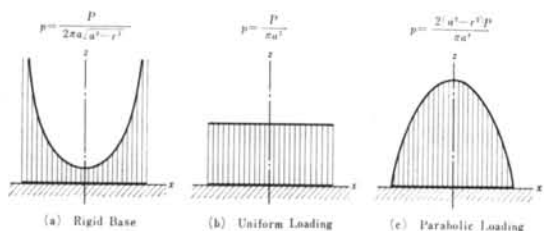
【仮定1】 静的な荷重による地中応力の分布は、動的な荷重においてもそのまま保存される。

【仮定2】 基礎版の振動によって地中に逸散する波動は基礎板に極く接近したところで平面波状になっている。

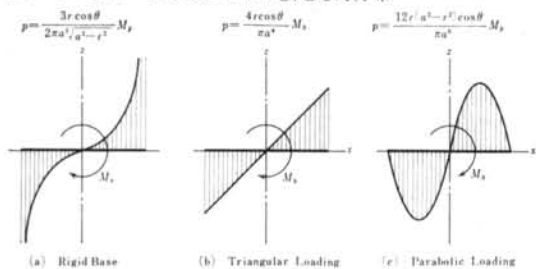
本論文においては上記の仮定による解法を矩形基礎に発展させ、各種の境界条件による解を示すことにした。

§ 1. 境界条件

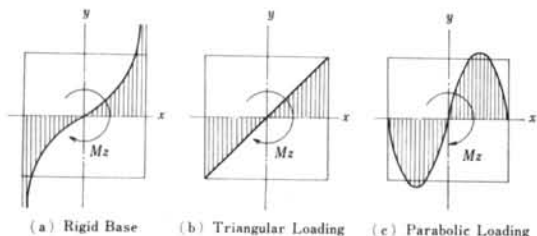
まず地盤を、等方等質なる半無限完全弾性体という理想地盤に仮定する。基礎—地盤系のばね定数を計算するに当って、基礎版の接地応力分布を仮定しなくてはならない。この接地応力分布としてSung³⁾は、上下および水平動に関して図—1に示す3つの形態を示した。それぞ



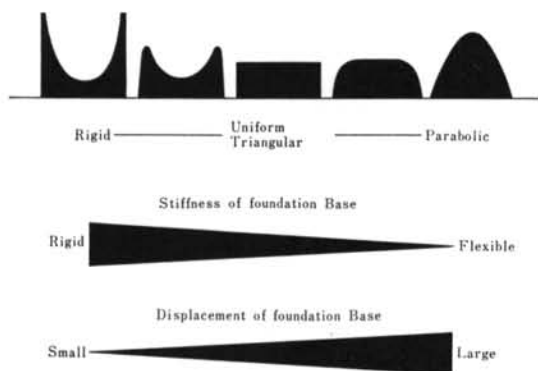
図—1 上下・水平動における接地応力分布



図—2 回転動における接地応力分布



図—3 振り動における接地応力分布



図—4 基礎版の剛性と変位の大小による接地応力分布の変化

れ(a)剛基礎 (Rigid Base), (b)均等分布 (Uniform Loading), (c)放物線分布 (Parabolic Loading) と呼ばれる。

これらの接地応力分布を回転動および振り動の場合に対応させると、それぞれ図—2および図—3に示すようなものになる。この場合、均等分布は三角分布 (Triangular Loading) に対応する。

仮定する接地応力の分布の違いによって、地盤のばね定数はかなり変化する。いずれの振動形においてもばね定数は剛基礎の場合に最も大きく、放物線分布の場合に最小になる。もし基礎版が完全な剛体で全く変形しないならば、理想地盤においては剛基礎の接地応力分布をとる。地盤に比べて基礎版の剛性が相対的に低くなるにつれて、接地応力分布は均等分布 (または三角分布) から放物線分布の方へ移行する。また地盤そのものは実際には完全弾性体ではなく、かなり非線形の特性をもっている。したがって基礎版の変位が大きくなるにつれて、接地応力分布は剛基礎—均等分布 (三角分布)—放物線分布の方向に移行することになる。図—4はそのような傾向を図で示したものである。

したがって実際の構造物の動的解析では、およそ次のような目安で接地応力分布を考えればよい。

- (1) 比較的平面規模が小さく剛性が高い機械基礎などで比較的微小変位を対象とする場合には剛基礎とする。
- (2) 上記の場合で比較的大きな変位までを問題にする場合には均等分布 (または三角分布) とする。
- (3) 比較的平面規模が大きい実在建物では均等分布 (または三角分布) とし、とくに大きな変形までを考えるとときには放物線分布とする。

このように実際の適用に当っては、接地応力分布は地盤の堅さ、基礎版の平面寸法および剛性、考える変位の大きさ、振動の形態などを考慮し、ある程度工学的判断によって選択しなくてはならない。

§ 2. 円形基礎のばね定数と等価減衰係数

円形基礎について接地応力分布は、外力と接地面における抵抗の釣合いから、それぞれ表—1に示すようになる。上下・水平・回転・振りの4種の振動形について表—1に示す接地応力分布を仮定し、地盤のばね定数を計算すると表—2に示す結果を得る。また参考までに同表に等価減衰係数を示しておいた。この場合の等価減衰係数とは地下逸散減衰によるもので、別に波動リアクタンス¹¹⁾とも名づけられている。このように先に示した2つの仮定を設けることにより、地盤はともに振動数に無関係

| vibration mode | stress distribution function(ton/cm ²) | | |
|----------------|--|--|--|
| | rigid base | uniform loading triangular loading | parabolic loading |
| vertical | $\frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2-r^2}}$ | $\frac{P}{\pi a^2}$ | $\frac{2(a^2-r^2)P}{\pi a^4}$ |
| horizontal | $\frac{Q}{2\pi a \sqrt{a^2-r^2}}$ | $\frac{Q}{\pi a^2}$ | $\frac{2(a^2-r^2)P}{\pi a^4}$ |
| rolling | $\frac{3r \cos \theta \cdot M_y}{2\pi a^3 \sqrt{a^2-r^2}}$ | $\frac{4r \cos \theta \cdot M_y}{\pi a^4}$ | $\frac{12r(a^2-r^2) \cos \theta \cdot M_y}{\pi a^6}$ |
| torsional | $\frac{3r M_z}{4\pi a^3 \sqrt{a^2-r^2}}$ | $\frac{2r M_z}{\pi a^4}$ | $\frac{6r(a^2-r^2) M_z}{\pi a^6}$ |

表一 円形基礎における接地応力分布

| vibration mode | spring constant (ton/cm) | | | damping constant (ton·sec/cm) |
|----------------|----------------------------|---------------------------------------|-------------------------------|----------------------------------|
| | rigid base | uniform loading triangular loading | parabolic loading | |
| vertical | $\frac{4a\mu}{1-\nu}$ | $\frac{\pi a\mu}{1-\nu}$ | $\frac{3\pi a\mu}{4(1-\nu)}$ | $\rho V_p S$ |
| horizontal | $\frac{8a\mu}{2-\nu}$ | $\frac{2\pi a\mu}{2-\nu}$ | $\frac{3\pi a\mu}{2(2-\nu)}$ | $\rho V_s S$ |
| rolling | $\frac{8a^3\mu}{3(1-\nu)}$ | $\frac{\pi a^3\mu}{2(1-\nu)}$ | $\frac{\pi a^3\mu}{4(1-\nu)}$ | $\rho V_p J_y$ |
| torsional | $\frac{8a^3\mu}{3(1-\nu)}$ | $\frac{\pi a^3\mu}{2(1-\nu)}$ | $\frac{\pi a^3\mu}{4(1-\nu)}$ | $\rho V_s I_z$ |

$$(\mu \equiv \rho V_s^2)$$

表二 円形基礎のばね定数と減衰係数

な線形のばねとダッシュポットに近似されることになる。かくして動的解析における地盤の理論的扱いは大幅に簡略化され、それだけ実用性は高くなる。

しかしこれらは一つの近似解であるがゆえに、その近似の程度と適用条件をあらかじめ認識しておく必要がある。そこで本方法による結果を、既往の研究による精解値と比較してみることにしよう。

円形基礎に関する動的な場合の基礎の変位は、

$$u = \frac{F_0}{a\mu} [f_1 + if_2] e^{i\omega t} \quad \dots\dots(1)$$

なる形で与えられる。これを等価の意味でのばね定数 K_E と減衰係数 C_E におきかえるとすれば、

$$f_1 + if_2 = \frac{1}{K_E + ia_0 C_E} \quad \dots\dots(2)$$

となることから、

$$K_E = \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2}, \quad C_E = \frac{-f_2}{a_0(f_1^2 + f_2^2)} \quad \dots\dots(3)$$

となる。1例として水平動に関する Arnold³⁾ の結果から、(3)式によって K_E および C_E を計算すると図一五の

実線のようになる。一方、質量のない基礎について本方法による変位は、

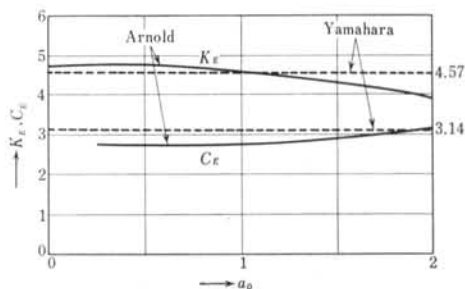
$$u = \frac{F_0}{K + i\omega C_e} e^{i\omega t} \quad \dots\dots(4)$$

で表わされる。水平動の場合には、

$$K_x = 8a\mu / (2 - \nu), \quad C_{ex} = \rho V_s S$$

であるから、これらを式(4)に代入し、

$$u = \frac{F_0}{a\mu} \frac{1}{\frac{8}{2-\nu} + ia_0\pi} e^{i\omega t} \quad \dots\dots(5)$$



図一五 本方法による結果と Arnold の結果との比較

なる形に書きかえられる。式(2)と式(5)を比較すれば、本方法による K_E および C_E はそれぞれ次のようになる。

$$K_E = 8/(2-\nu), \quad C_E = \pi$$

図-5の破線は $\nu=0.25$ として、本方法から得られる K_E および C_E の値を示したものである。

つぎに本方法による結果から逆にグランドコンプライ

$$f_2 = a\mu \frac{K}{K^2 + \omega^2 C_e^2}, \quad f_2 = -a\mu \frac{\omega C_e}{K^2 + \omega^2 C_e^2} \quad \dots\dots\dots(7)$$

となる。式(7)に K および C_e の値を代入し整理すると、

$$(\text{水平動}) \quad f_1 = \frac{8(2-\nu)}{64 + \pi^2(2-\nu)^2 a_0^2}, \quad -f_2 = \frac{\pi(2-\nu)^2 a_0}{64 + \pi^2(2-\nu)^2 a_0^2} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$(\text{上下動}) \quad f_1 = \frac{4(1-\nu)}{16 + \pi^2 a_0^2 2(1-\nu)^2 / (1-2\nu)}, \quad -f_2 = \frac{\pi a_0(1-\nu)^2 \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)}}{16 + \pi^2 a_0^2 2(1-\nu)^2 / (1-2\nu)} \quad \dots\dots\dots(9)$$

となる。 $\nu=0.25$ として式(8)(9)を計算し、Arnoldの結果と比較すると、それぞれ図-6および図-7のようになる。これらの図から、 a_0 の比較的小さい範囲 ($0 < a_0 < 1.5$) において、両者は良く合っていることがわかる。

ここで a_0 とは無次元化振動数で、次式によって定義される。

$$a_0 = \omega a \sqrt{\frac{\rho}{\mu}} = \frac{\omega a}{V_s} \quad \dots\dots\dots(10)$$

実際に、機械基礎の振動計算などでは ω は大きくても a が小さく、建物の地震応答計算などでは a は大きくても ω が小さく、 a_0 が 2 を越すことは非常に稀である。既往のすべての研究においても、 $0 < a_0 < 1.2 \sim 2.0$ の範囲について解が与えられている。したがって a_0 の実用的範囲で論ずるかぎり、本方法による結果は精解値と実用上支障ない程度に良く一致することが立証された。

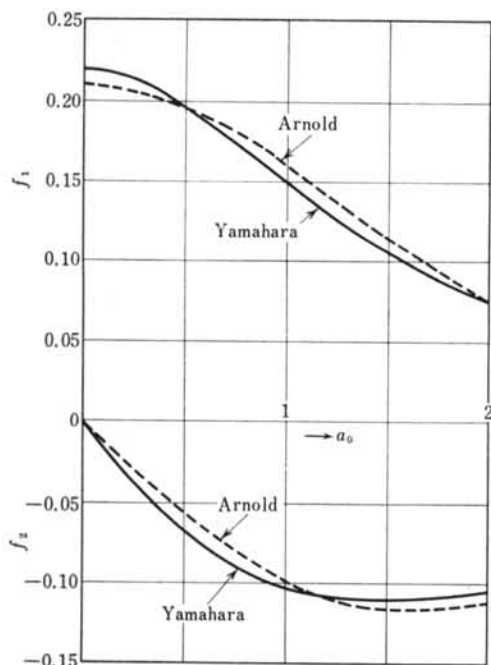


図-6 グランドコンプライアンス素子による Arnold の結果との比較 (水平動)

アンスを求め、既往の精解値と比較してみよう。式(4)は次のように書きかえられる。

$$U = F_0 \left[\frac{K}{K^2 + \omega^2 C_e^2} - i \frac{\omega C_e}{K^2 + \omega^2 C_e^2} \right] e^{i\omega t} \\ = \frac{F_0}{a\mu} [f_1 + if_2] e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(6)$$

よって、

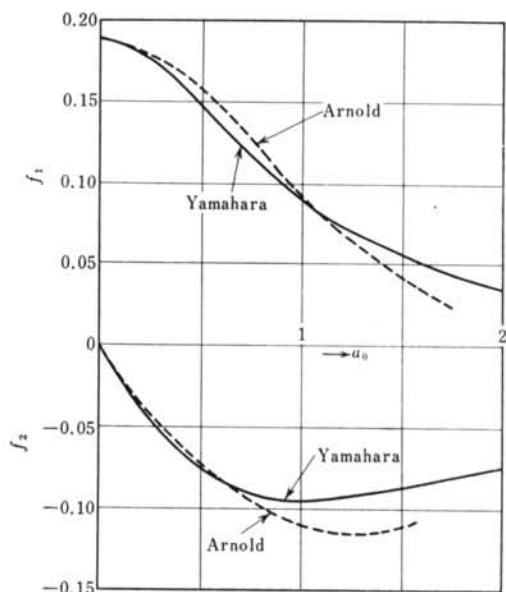


図-7 グランドコンプライアンス素子による Arnold の結果との比較 (上下動)

§ 3. 矩形基礎のばね定数と減衰係数

この種の理論は、基礎を円形とすることによって数学的に非常に楽になるので、多くの場合円形基礎として解析が進められてきた。しかし実際の構造物では矩形基礎による場合が圧倒的に多い。Thomson & Kobori¹²⁾ は正方基礎について求めた解を円形基礎に関するSung⁹⁾の解と比較し、正方断面の等価円半径として次のように提案している。

$$a_e = 1.13c \quad \dots\dots(11)$$

また田治見¹⁰⁾も円形基礎と矩形基礎による解を比較し、等価円半径を次のように示している。

$$a_e = 1.1\sqrt{S}/2 = 0.55\sqrt{S} \quad \dots(12)$$

式(11)と(12)はほぼ同じのものであり、これらは円形断面と正方断面の面積を等しくする条件でもある。したがって矩形基礎の断面が比較的正方形に近い場合には、式(12)によって等価の円形断面におきかえて計算しても、実用上ほとんど問題はない。

矩形基礎が比較的細長くなると、それを正方形断面として近似したときの誤差が大きくなる。とくに回転動について考えるときその誤差が大きくなる。そこで本章において、上下・水平・回転・振りの4種の運動形態について、それぞれ3種の接地応力分布における静的な意味でのばね定数を求めることにした。

3.1 接地応力分布

矩形基礎の場合の接地応力分布も、円形基礎の場合にならぬ、(1)剛基礎、(2)均等分布(または三角分布)、(3)放物線分布の3種類を仮定する。それぞれの接地応力分布関数を表一3に示した。

表一3において $A_1 \sim A_{10}$ は、外力(またはモーメント)と接地抵抗(またはモーメント)との釣合いによって定まる係数で、次のように計算される。

(1) 剛基礎

(上下動)

$$P = 4A_1P \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta \right]$$

より、

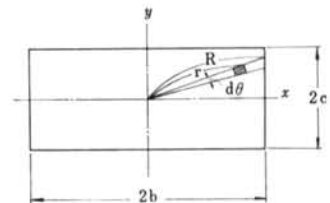
$$A_1 = \frac{1}{4} \left[b \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + c \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right]^{-1}$$

(水平動)

$$Q = 4A_2Q \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \frac{r}{\sqrt{\left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta \right]$$

より、

| vibration mode | stress distribution function (ton/cm ²) | | |
|----------------|---|---------------------------------------|------------------------------------|
| | rigid base | uniform loading triangular loading | parabolic loading |
| vertical | $\frac{A_1 P}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ | $\frac{P}{4bc}$ | $A_7(R^2 - r^2)P$ |
| horizontal | $\frac{A_2 Q}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ | $\frac{Q}{4bc}$ | $A_8(R^2 - r^2)Q$ |
| rolling | $\frac{A_3 M_y r \cos\theta}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ | $A_9 M_y r \cos\theta$ | $A_9 M_y (R^2 - r^2) r \cos\theta$ |
| torsional | $\frac{A_4 M_z r}{\sqrt{R^2 - r^2}}$ | $A_6 M_z r$ | $A_{10} M_z (R^2 - r^2) r$ |



図一8 矩形基礎の寸法

表一3 矩形基礎における接地応力分布

$$A_2 = \frac{1}{4} \left[b \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + c \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right]^{-1}$$

(回転動)

$$M_y = 4A_3 M_y \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \frac{r^3 \cos^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \frac{r^3 \sin^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta \right]$$

より,

$$A_3 = \frac{3}{8} \left[b^3 \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + c^3 \left\{ \frac{1}{2} \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} - \frac{1}{2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right]^{-1}$$

(振り動)

$$M_z = 4A_4 M_z \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \frac{r^3}{\sqrt{\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \frac{r^3}{\sqrt{\left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta \right]$$

より,

$$A_4 = \frac{3}{4} \left[b^3 \left\{ \frac{c}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) \right\} + C^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right]^{-1}$$

(2) 均等分布 (三角分布)

(回転動)

$$M_y = A_5 M_y \int_0^{2\pi} \int_0^R (r \cos\theta)^2 r dr d\theta = A_5 M_y I_y$$

ここで I_y は基礎断面の y 軸まわりの断面 2 次モーメントである。よって,

$$A_5 = 3/4cb^3$$

(振り動)

$$M_z = A_6 M_z \int_0^{2\pi} \int_0^R r^2 r dr d\theta = A_6 M_z I_z$$

ここで I_z は基礎断面の z 軸まわりの断面 2 次極モーメントである。よって,

$$A_6 = 3/4bc(b^2 + c^2)$$

(3) 放物線分布

(上下動)

$$P = 4A_7 P \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} r dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} r dr d\theta \right]$$

より,

$$A_7 = 3/4bc(b^2 + c^2)$$

(水平動)

$$Q = 4A_8 Q \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} r dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} r dr d\theta \right]$$

より,

$$A_8 = 3/4bc(b^2 + c^2)$$

(回転動)

$$M_y = 4A_9 M_y \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} r^3 \left\{ \left(\frac{b}{\cos\theta} \right)^2 - r^2 \right\} \cos^2\theta dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} r^3 \left\{ \left(\frac{c}{\cos\theta} \right)^2 - r^2 \right\} \sin^2\theta dr d\theta \right]$$

より,

$$A_9 = \left[\frac{b^6}{9} \left\{ \frac{c}{b} \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \right) + 2 \frac{c}{b} \right\} + \frac{c^6}{15} \left\{ \frac{b}{c} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) - \frac{1}{3} \frac{b}{c} \left(1 + \frac{b^2}{c^2} \right) - \frac{2}{3} \frac{b}{c} \right\} \right]^{-1}$$

(振り動)

$$M_z = 4A_{10} M_z \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} r^3 \left\{ \left(\frac{b}{\cos\theta} \right)^2 - r^2 \right\} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} r^3 \left\{ \left(\frac{c}{\cos\theta} \right)^2 - r^2 \right\} dr d\theta \right]$$

より,

$$A_{10} = \left[\frac{2}{9} bc(b^2 + c^2)^2 + \frac{8}{45} bc(b^4 + c^4) \right]^{-1}$$

3.2 ばね定数

以上のようにして求めた接地応力分布を仮定すれば、基礎—地盤系のばね定数は基礎中心部の変位または回転角を計算することによって得られる。

(1) 剛基礎

(上下動)

$$u_z = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} 4A_1 P \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta \right] = \frac{\pi(1-\nu)}{2\mu} A_1 P$$

(水平動)

$$u_x = \frac{1}{2\pi\mu} 4A_2 Q \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \frac{1-\nu\sin^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \frac{1-\nu\cos^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta \right] = \frac{\pi(2-\nu)}{4\mu} A_2 Q$$

(回転動)

$$\phi = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} 4A_3 M_y \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \frac{\cos^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \frac{\sin^2\theta}{\sqrt{\left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta \right] = \frac{\pi(1-\nu)}{4\mu} A_3 M_y$$

(振り動)

$$\theta = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} 4A_4 M_z \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2}} dr d\theta \right] = \frac{\pi(1-\nu)}{2\mu} A_4 M_z$$

(2) 均等分布 (三角分布)

(上下動)

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \frac{P}{bc} \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} dr d\theta \right] \\ &= \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \frac{P}{bc} \left[b \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + c \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right] \end{aligned}$$

(水平動)

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{1}{2\pi\mu} \frac{Q}{bc} \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} (1-\nu\sin^2\theta) dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} (1-\nu\cos^2\theta) dr d\theta \right] \\ &= \frac{1}{2\pi\mu} \frac{Q}{bc} \left[b(1-\nu) \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b}\right) + c \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c}\right) \right]\end{aligned}$$

(回転動)

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1-\nu}{2\pi\mu} 4A_5M_y \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \cos^2\theta dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \sin^2\theta dr d\theta \right] \\ &= \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} A_5M_y c \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c}\right)\end{aligned}$$

(振り動)

$$\begin{aligned}\theta &= \frac{1-\nu}{2\pi\mu} 4A_6M_x \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} dr d\theta \right] \\ &= \frac{2(1-\nu)}{\pi\mu} A_6M_x \left[b \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b}\right) + c \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c}\right) \right]\end{aligned}$$

(3) 放物線分布

(上下動)

$$\begin{aligned}u_z &= \frac{1-\nu}{2\pi\mu} 4A_7P \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} dr d\theta + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} dr d\theta \right] \\ &= \frac{2(1-\nu)}{3\pi\mu} A_7P \left[b^3 \left\{ \frac{c}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b}\right)^2} + \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b}\right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + c^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} + \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c}\right) \right\} \right]\end{aligned}$$

(水平動)

$$\begin{aligned}u_x &= \frac{1}{2\pi\mu} 4A_8Q \left[\int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{b/\cos\theta} (1-\nu\sin^2\theta) \left\{ \left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} dr d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{c/\cos\theta} (1-\nu\cos^2\theta) \left\{ \left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} dr d\theta \right] \\ &= \frac{2}{3\pi\mu} A_8Q \left[(2-\nu)bc\sqrt{b^2+c^2} + (1+\nu)b^3 \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b}\right) \right. \\ &\quad \left. + (1-2\nu)c^3 \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c}\right) \right]\end{aligned}$$

(回転動)

$$\begin{aligned}\phi &= \frac{1-\nu}{2\pi\mu} 4A_9M_y \left[\int_0^{\tan^{-1}c/b} \int_0^{b/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{b}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} \cos^2\theta dr d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{c}{\cos\theta}\right)^2 - r^2 \right\} \sin^2\theta dr d\theta \right] \\ &= \frac{2(1-\nu)}{3\pi\mu} A_9M_y \left[2b^3 \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b}\right) \right. \\ &\quad \left. + c^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c}\right)^2} - \log \tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c}\right) \right\} \right]\end{aligned}$$

(振り動)

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{1-\nu}{2\pi\mu} 4A_{10}M_z \left[\int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{b}{\cos\theta} \right)^2 - r^2 \right\} dr d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{\tan^{-1}b/c} \int_0^{c/\cos\theta} \left\{ \left(\frac{c}{\cos\theta} \right)^2 - r^2 \right\} dr d\theta \right] \\ &= \frac{2(1-\nu)}{3\pi\mu} A_{10}M_z \left[b^3 \left\{ \frac{c}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) \right\} \right. \\ &\quad \left. + c^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right] \end{aligned}$$

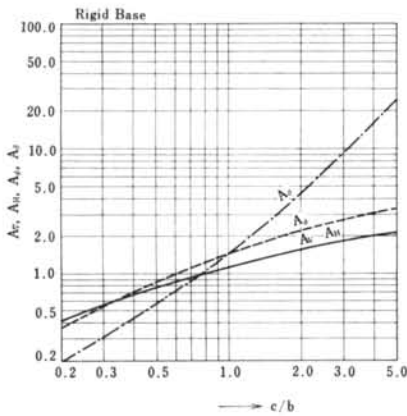


図-9 矩形基礎ばね定数の形状係数 (Rigid Base)

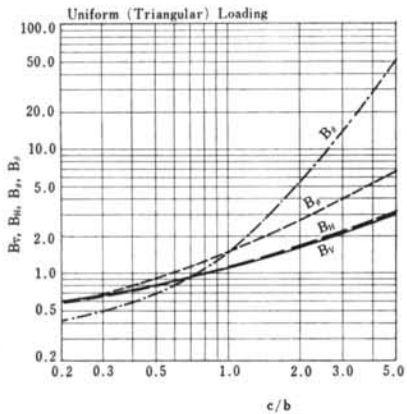


図-10 矩形基礎ばね定数の形状係数 (Uniform-Triangular Loading)

以上の結果から矩形基礎のばね定数を要約すると、表-4のようになる。同表においては円形基礎の場合との対応を容易にするため、半径 a を半辺長 b に対応させ式の形はすべて円形基礎の場合と同じく表現してある。したがって $A_v \sim C_e$ は一種の形状係数であり、すべて寸法比 c/b の関数として与えられる。ただし B_H と C_H はポアソン比にも関係する。

参考までに $A_v \sim C_e$ を計算し、それぞれ図-9～図-11に示した。

つぎに矩形基礎と同じばね定数を与える円形基礎の半径を等価円半径とすれば、等価円半径 a_e はそれぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} \text{(上下動)} \quad & a_e = A_v b, \quad a_e = B_v b, \quad a_e = C_v b \\ \text{(水平動)} \quad & a_e = A_H b, \quad a_e = B_H b, \quad a_e = C_H b \end{aligned}$$

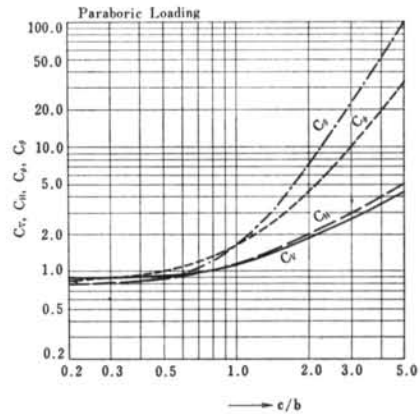


図-11 矩形基礎ばね定数の形状係数 (Parabolic Loading)

| vibration mode | spring constant (ton/cm) | | | damping constant (ton·sec/cm) |
|----------------|-------------------------------------|--|--|-------------------------------|
| | rigid base | uniform loading triangular loading | parabolic loading | |
| vertical | $\frac{4b\mu}{1-\nu} A_V$ | $\frac{\pi b\mu}{1-\nu} B_V$ | $\frac{3\pi b\mu}{4(1-\nu)} C_V$ | $\rho V_p S$ |
| horizontal | $\frac{8b\mu}{2-\nu} A_H$ | $\frac{2\pi b\mu}{2-\nu} B_H$ | $\frac{3\pi b\mu}{2(2-\nu)} C_H$ | $\rho V_p S$ |
| rolling | $\frac{8b^3\mu}{3(1-\nu)} A_\phi$ | $\frac{\pi b^3\mu}{2(1-\nu)} B_\phi$ | $\frac{\pi b^3\mu}{4(1-\nu)} C_\phi$ | $\rho V_p I_y$ |
| torsional | $\frac{8b^3\mu}{3(1-\nu)} A_\theta$ | $\frac{\pi b^3\mu}{2(1-\nu)} B_\theta$ | $\frac{\pi b^3\mu}{4(1-\nu)} C_\theta$ | $\rho V_p I_z$ |

$$(\mu \equiv \rho V_p^2)$$

$$A_V = \frac{2}{\pi} \left\{ \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \frac{c}{b} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\}$$

$$A_H = A_V$$

$$A_\phi = \frac{4}{\pi} \left[\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{b} \right)^3 \left\{ \frac{1}{2} \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} - \frac{1}{2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right]$$

$$A_\theta = \frac{1}{\pi} \left[\frac{c}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) + \left(\frac{c}{b} \right)^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right]$$

$$B_V = 2 \left[\frac{b}{c} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right]^{-1}$$

$$B_H = (2 - \nu) \left[\frac{b}{c} (1 - \nu) \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right]^{-1}$$

$$B_\phi = \frac{4}{3} \left[\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right]^{-1}$$

$$B_\theta = \frac{4}{3} \frac{c}{b} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 \right\} \left[\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \frac{c}{b} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right]^{-1}$$

$$C_V = \frac{8}{3} \frac{c}{b} \left\{ 1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2 \right\} \left[\frac{c}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{b} \right)^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right]^{-1}$$

$$C_H = \frac{4}{3} (2 - \nu) \left[\frac{2-\nu}{\sqrt{1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2}} + \frac{1+\nu}{b} \left\{ 1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right\} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \frac{1-2\nu}{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right]^{-1}$$

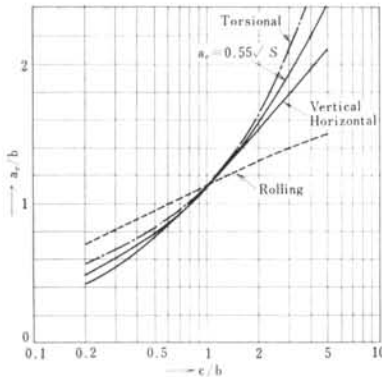
$$C_\phi = \left[\frac{2}{3} \left\{ \frac{c}{b} \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \right) + 2 \frac{c}{b} \right\} + \frac{2}{5} \left(\frac{c}{b} \right)^3 \left\{ \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b} \right)^2 - \frac{1}{3} \left(1 + \frac{c^2}{b^2} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. \times \left[2 \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{b} \right)^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} - \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right] \right]^{-1}$$

$$C_\theta = \left[\frac{4}{3} \frac{c}{b} \left\{ 1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2 \right\}^2 + \frac{16}{15} \frac{c}{b} \left\{ 1 + \left(\frac{c}{b} \right)^4 \right\} \right. \\ \left. \times \left[\frac{c}{b} \sqrt{1 + \left(\frac{c}{b} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{c}{b} \right) + \left(\frac{c}{b} \right)^3 \left\{ \frac{b}{c} \sqrt{1 + \left(\frac{b}{c} \right)^2} + \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{c} \right) \right\} \right] \right]^{-1}$$

表-4 矩形基礎のばね定数と減衰係数

| c/b | a_e/b | | | | | | | | | | | |
|-------|------------|-------|-------|-------|------------------------------|-------|-------|-------|-------------------|-------|-------|-------|
| | Rigid Base | | | | Uniform (Triangular) Loading | | | | Parabolic Loading | | | |
| | Ver. | Hor. | Rol. | Tor. | Ver. | Hor. | Rol. | Tor. | Ver. | Hor. | Rol. | Tor. |
| 0.20 | 0.421 | 0.421 | 0.719 | 0.584 | 0.605 | 0.572 | 0.832 | 0.749 | 0.887 | 0.790 | 0.944 | 0.930 |
| 0.30 | 0.555 | 0.555 | 0.816 | 0.677 | 0.689 | 0.658 | 0.886 | 0.794 | 0.895 | 0.809 | 0.961 | 0.936 |
| 0.40 | 0.668 | 0.668 | 0.889 | 0.756 | 0.763 | 0.736 | 0.932 | 0.839 | 0.912 | 0.837 | 0.982 | 0.948 |
| 0.50 | 0.766 | 0.766 | 0.949 | 0.827 | 0.831 | 0.808 | 0.974 | 0.885 | 0.937 | 0.873 | 1.006 | 0.967 |
| 0.60 | 0.852 | 0.852 | 0.998 | 0.894 | 0.896 | 0.877 | 1.013 | 0.933 | 0.969 | 0.918 | 1.035 | 0.994 |
| 0.70 | 0.930 | 0.930 | 1.039 | 0.957 | 0.958 | 0.944 | 1.049 | 0.984 | 1.009 | 0.970 | 1.066 | 1.028 |
| 0.80 | 1.000 | 1.000 | 1.075 | 1.018 | 1.019 | 1.009 | 1.084 | 1.037 | 1.054 | 1.028 | 1.100 | 1.071 |
| 0.90 | 1.064 | 1.064 | 1.107 | 1.077 | 1.077 | 1.072 | 1.117 | 1.091 | 1.106 | 1.093 | 1.137 | 1.120 |
| 1.00 | 1.122 | 1.122 | 1.135 | 1.135 | 1.135 | 1.135 | 1.148 | 1.148 | 1.162 | 1.162 | 1.176 | 1.176 |
| 1.20 | 1.226 | 1.226 | 1.182 | 1.246 | 1.246 | 1.256 | 1.207 | 1.266 | 1.285 | 1.312 | 1.259 | 1.304 |
| 1.40 | 1.317 | 1.317 | 1.221 | 1.353 | 1.353 | 1.374 | 1.261 | 1.388 | 1.421 | 1.476 | 1.349 | 1.447 |
| 1.60 | 1.396 | 1.396 | 1.254 | 1.456 | 1.459 | 1.489 | 1.312 | 1.513 | 1.565 | 1.650 | 1.442 | 1.602 |
| 1.80 | 1.467 | 1.467 | 1.283 | 1.557 | 1.562 | 1.601 | 1.360 | 1.640 | 1.717 | 1.832 | 1.540 | 1.765 |
| 2.00 | 1.532 | 1.532 | 1.307 | 1.655 | 1.663 | 1.711 | 1.405 | 1.770 | 1.873 | 2.019 | 1.639 | 1.934 |
| 2.50 | 1.669 | 1.669 | 1.358 | 1.890 | 1.907 | 1.979 | 1.506 | 2.097 | 2.279 | 2.505 | 1.897 | 2.369 |
| 3.00 | 1.783 | 1.783 | 1.397 | 2.113 | 2.142 | 2.238 | 1.597 | 2.426 | 2.700 | 3.005 | 2.161 | 2.817 |
| 3.50 | 1.880 | 1.880 | 1.429 | 2.326 | 2.371 | 2.489 | 1.679 | 2.756 | 3.128 | 3.514 | 2.427 | 3.271 |
| 4.00 | 1.964 | 1.964 | 1.456 | 2.531 | 2.594 | 2.734 | 1.753 | 3.086 | 3.562 | 4.027 | 2.696 | 3.728 |
| 4.50 | 2.038 | 2.038 | 1.479 | 2.728 | 2.812 | 2.973 | 1.822 | 3.415 | 3.998 | 4.544 | 2.964 | 4.187 |
| 5.00 | 2.104 | 2.104 | 1.499 | 2.919 | 3.025 | 3.208 | 1.886 | 3.743 | 4.437 | 5.062 | 3.233 | 4.648 |

表一五 矩形基礎の等価円半径



図一12 矩形基礎の等価円半径 (Rigid Base)

(回転動) $a_e = \sqrt[3]{A_p}b$, $a_e = \sqrt[3]{B_p}b$, $a_e = \sqrt[3]{C_p}b$,

(振り動) $a_e = \sqrt[3]{A_p}b$, $a_e = \sqrt[3]{B_p}b$, $a_e = \sqrt[3]{C_p}b$,

表一五は矩形基礎の寸法比 c/b の各値に対する、等価円半径 a_e と半辺長 b との比 a_e/b を数表で示したものである。これを剛基礎の場合について図示すると、図一12のようになる。同図には式(12)による等価円半径の換算

式をも重ねて示してある。

図一12からわかるように、上下動・水平動・振り動の場合は式(12)による換算式と比較的傾向が似ているが、回転動の場合だけは他とかなり異質の傾向を示す。したがって、回転動を考えないときは無視できる場合には、 c/b のかなり広い範囲にわたって式(21)による換算が実用上適用できることがわかる。しかし回転動に関して式(21)を適用する場合には、基礎断面の形状がかなり正方形に近くないと誤差が大きくなる。

おわりに

地盤を含む構造モデルの動的解析において、地盤を等方等質の理想地盤と仮定したとしても、矩形基礎の場合の計算は面倒である。そこで一度きちんと計算し、その結果を図なり表なりに与えておけば、今後の実設計において容易に利用することができる。本論文はそのような実用的な効用をねらってまとめたものである。

また接地圧分布は、かつては均等分布あるいは剛基礎

の分布だけに限定して論じられてきたが、本論文ではそれに放物線分布を加えた3種の分布について並列に扱うことにした。これは接地圧分布の違いによって結果がかなり変ることを認識するためと、地盤の非線形効果を接

地圧分布の変化に置きかえて線形理論を適用するという将来への布石を兼ねている。

本論が実務に携わる設計者に、少しでも役立つことがあれば幸いである。

<参考文献>

- 1) H. Lorenz: "New Results of Dynamic Investigations of Foundation Soils" Zeitschrift des vereins deutscher Ingenieure, Mar. 24, 1934
- 2) 大築志夫: "防振基礎の設計法" オーム社, 1959
- 3) A. Paw: "A Dynamic Analogy for Foundation Systems" Symp. on Dynamic Testing of Soil, ASTM, 1953
- 4) H. A. Balakrishna: "A New Method for Predicting the Natural Frequency of Foundation Soil System" The Structural Engineering, Oct. 1960
- 5) E. Reissner: "Stationäre axialsche durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingen eines homogenen elastischen Halbraumes" Ingenieur Archiv, Vol. 7, 1936
- 6) T. Y. Sung: "Vibration in Semi-Infinite Solids Due to Periodic Surface Loading" ASTM Symp. on Dynamic Testing of Soils, No. 156, 1953
- 7) 鳥海 勲: "Vibrations in Foundations of Machines" Technology Report of Osaka Univ. Vol. 5, No. 146, 1955
- 8) R. N. Arnold and others: "Forced Vibration of a Body on an Infinite Elastic Solid" Journal of Applied Mechanics, Vol. 22, Trans. ASME, Vol. 77, 1955
- 9) 小堀鐸二: "Dynamic Response of Rectangular Foundation of an Elastic-Space" Proc. of Japan National Symp. On Earthquake Engineerings, 1962
- 10) 田治見宏: "耐震理論に関する基礎的研究" 東大生研報告 Vol.8, No. 1959
- 11) 山原 浩: "弾性地盤上の基礎および構造物の振動性状に関する研究(その1)(その2)" 建築学会論報 No.115, 1965, No.120, 1966
- 12) W. T. Thomson and T. Kobori: "Dynamic Compliance of Rectangular Foundation on an Elastic Half-Space" Journal of Applied Mechanics, Vol. 30, 1963