

## 有限要素法によるコンクリート構造物の2次元弾塑性解析

磯 畑 脩

## § 1. まえがき

鉄筋コンクリート等のコンクリートが素材となるような構造物の弾塑性挙動を解明する目的で、有限要素法による解析を行なった。

鋼、アルミニウムのように引張特性と圧縮特性にあまり差がなく、かつ延性に富んだ金属材料については、塑性理論に基づいて有限要素法が適用され良い結果が得られている<sup>1),2),3)</sup>。

コンクリートの場合はその素材が骨材とセメントペーストの多種多様な組み合わせから成立しているため、材料の力学特性は一律でない。特に圧縮特性と引張特性の相違もあって、延性材料における塑性条件または破壊条件をそのまま適用するわけにはいかない。

したがってコンクリートに関する有限要素法による弾塑性解析では、素材をどのようにモデル化するかが重要なポイントとなっている。

この一方法としてトラス置換法<sup>4)</sup>があるが、材料が塑性化する時のポアソン比の取扱いに困難を生じている。一方、コンクリートを直交異方性弾性体として扱う方法<sup>5),6)</sup>はひびわれを前提として弾性特性を定義するには便利な方法であり、本解析ではこれに基づいて1つの弾塑性モデルを設定した。

このモデルでは等質等方性弾性体の常数 ( $E, \nu$ ) に対応して弾塑性係数 ( $E_p, \nu_p$ ) を想定し、材料の1軸特性に基づく変換パラメータ ( $\eta, \xi$ ) を用いて弾塑性体を ( $E, \nu, \eta, \xi$ ) で表わすことを試みた。

ここに ( $E_p, \nu_p$ ) または ( $\eta, \xi$ ) は一般には要素の主ひずみの関数として表わすことができる。

コンクリートに関する弾塑性解析を考える場合は、さらに素材の塑性化と共に必然的に破断または破壊現象があり、解析上の条件設定をむずかしくしている。この材料の塑性化に続いて生ずる破壊現象は次に述べる理由から、有限要素法では本質的に塑性限界内とは異なる取扱いをする必要がある。

すなわち特定の要素の塑性状態と破壊状態での剛性の点では開きがなくても、要素に蓄積されている弾性ひずみエネルギーの点では後者の場合はもはや失われているところからまったく差がある。要素の有するこの弾性ひずみエネルギーは破断または破壊に応じて、何らかの形で解放されねばならないが、本解析では解放すべき内部応力を要素の節点荷重に置換する方法を導入することによって考慮した。

弾塑性解析上はさらに、除荷過程（またはひずみの逆行）での要素剛性、有限変形（幾何的非線形性）、クリープ等の時間に依存する材料特性などの諸条件を考慮せねばならないが、今回は直交異方性理論の適用に主眼を置き、ひずみの逆行については便宜的な仮定を設けたほかは特に考えていない。

以上、本論文では有限要素法による数値解析を前提として、コンクリートについて1つの弾塑性体を設定する方法を述べ、単純支持はりに関して実験値と解析値を比較しながら本解析法の適応性を検討する。

## § 2. 弾塑性モデルの想定と要素の剛性マトリクス

## 2.1 弾性係数マトリクスの直交異方性表示

等方性弾性体の平面応力場における Hooke の法則は

$$\{\sigma_x, \sigma_y, \tau\}^T = [D] \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma\}^T \quad \dots(1)$$

で表わされ、弾性係数マトリクス  $D$  は次式で表わせる。

$$[D] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\nu/2 \end{bmatrix} \quad \dots(2)$$

一方、直交異方性弾性体の平面応力場における Hooke の法則は、異方性の主軸を ( $x, y$ ) として弾性常数を ( $E_x, E_y, G_{xy}, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ ) と置くと、式(2)に対応するものは、

$$[D_N] = \frac{1}{1-\nu_x\nu_y} \begin{pmatrix} E_x & \nu_y E_x & 0 \\ \nu_x E_y & E_y & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu_x\nu_y)G_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots(3)$$

ここに、 $\nu_x = \nu_{xy}$ ,  $\nu_y = \nu_{yx}$  である。Maxwell-Betti の相反定理は次のようになる。

$$\frac{\nu_x}{E_x} = \frac{\nu_y}{E_y} \quad \text{または} \quad \nu_x E_y = \nu_y E_x \quad \dots(4)$$

ヤング係数およびポアソン比に関するパラメータ  $\eta$ ,  $\xi$  をそれぞれ、

$$\left. \begin{aligned} E_x &= \eta_x E, & E_y &= \eta_y E, & G_{xy} &= \eta_{xy} G \\ \nu_x \nu_y &= \xi_{xy} \nu^2 \end{aligned} \right\} \quad \dots(5)$$

と定義すると、式(4)は次式で表わせる。

$$\nu_y E_x = \nu_x E_y = \xi_{xy} (\eta_x \eta_y)^{1/2} \nu E \quad \dots(6)$$

式(5), (6)を式(3)に代入すると、

$$[D_N] = \frac{E}{1-\xi_{xy}\nu^2} \begin{pmatrix} \eta_x & \xi_{xy}\eta_x^{1/2}\eta_y^{1/2}\nu & \\ \xi_{xy}\eta_x^{1/2}\eta_y^{1/2}\nu & \eta_y & \\ 0 & 0 & \frac{1-\xi_{xy}\nu^2}{2(1+\nu)}\eta_{xy} \end{pmatrix} \quad \dots(7)$$

そこで、

$$[D_N] = [A]^T [F] [A] \quad \dots(8)$$

とおくと、

$$[A] = \begin{pmatrix} \eta_x^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_y^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_{xy}^{1/2} \end{pmatrix} \quad \dots(9)$$

$$[F] = \frac{E}{1-\xi_{xy}\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \xi_{xy}\nu & 0 \\ \xi_{xy}\nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi_{xy}\nu^2/2(1+\nu) \end{pmatrix}$$

$$= [D] + \frac{(\xi_{xy}-1)\nu E}{(1-\xi_{xy}\nu^2)(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} (1+\xi_{xy})\nu & 1+\xi_{xy}\nu^2 & 0 \\ 1+\xi_{xy}\nu^2 & (1+\xi_{xy})\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \dots(10)$$

## 2.2 弾塑性モデルの想定

等方性弾性体 ( $E, \nu$ ) に対応して弾塑性体 ( $E_p, \nu_p$ ) を考える。 ( $E_p, \nu_p$ ) は要素のひずみ状態に応じて弾性体 ( $E, \nu$ ) が直交異方性化することによって生ずるものとする。要素の主ひずみ方向を ( $x, y$ ) とし、それぞれ

れの方角についてのヤング係数とポアソン比  $\eta_x E, \xi_{xy} \nu, \eta_y E, \xi_{yx} \nu$  は素材の1軸応力状態によって決まる値をとるものとする。直交異方性におけるせん断弾性係数  $G_{xy}$  は一義的には決めることはできず材料によって固有な値をとる<sup>7),8)</sup>。本解析の場合は、せん断剛性とヤング係数、ポアソン比の間に、

### 〔記号一覧表〕

$E, \nu$ : 等方性弾性体のヤング係数とポアソン比  
 $E_p, \nu_p$ : 弾塑性モデルのヤング係数とポアソン比  
 $E_x, E_y, \nu_x, \nu_y$ : 直交異方性弾性体のヤング係数とポアソン比  
 $G, G_{xy}$ : 等方性弾性体および直交異方性弾体のせん断弾性係数  
 $\{\sigma\}, \sigma_x, \sigma_y, \tau$ : 応力ベクトルとその成分  
 $\{\epsilon\}, \epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$ : ひずみベクトルとその成分  
 $\eta_x, \eta_y$ : ヤング係数に関する変換パラメータ  
 $\eta_{xy}$ : せん断弾性係数に関する変換パラメータ  
 $\xi_{xy}$ : ポアソン比に関する変換パラメータ  
 $x, y$ : 局所座標系または直交異方性の主方向  
 $\bar{x}, \bar{y}$ : 基準座標系

$\theta$ : 局所座標系と基準座標系のなす角度  
 $[D]$ : 等方性弾性体の弾性係数マトリクス  
 $[D_{ep}]$ : 弾塑性係数マトリクス  
 $[D_N]$ : 直交異方性弾性体の弾性係数マトリクス  
 $[I]$ : ヤング係数に関する異方性マトリクス  
 $[A_p]$ : 弾塑性モデルにおけるヤング係数パラメータに関する係数マトリクス  
 $[H_p]$ : 弾塑性モデルにおけるポアソン比の変化に依存する偏差マトリクス  
 Suffix  $n$ : 数値計算上考える荷重ステップを表わす

$$\eta_x = \eta_y = 1, \quad \xi_x = \xi_y = 1; \quad G_{xy} = G \quad (\text{等方性弾性体})$$

$$\left. \begin{aligned} \eta_x = \xi_x = 0, \quad \eta_y \neq 0, \quad \xi_y \neq 0 \\ \eta_y = \xi_y = 0, \quad \eta_x \neq 0, \quad \xi_x \neq 0 \end{aligned} \right\}; \quad G_{xy} = 0 \quad (\text{軸応力状態})$$

の関係があるからこれを満足させるように、 $G_{xy}$  を次式のような直交方向のヤング係数とポアソン比の関数におく<sup>8)</sup>。

$$G_{xy} = \frac{E_x^{1/2} E_y^{1/2}}{2(1 + \nu_x^{1/2} \nu_y^{1/2})} = \frac{\eta_x^{1/2} \eta_y^{1/2} E}{2(1 + \xi_{xy} \nu)} \quad \dots (1)$$

$$\xi_{xy} = \xi_x^{1/2} \xi_y^{1/2} \quad \dots (2)$$

式(5), (1)から次の関係が得られる。

$$\eta_{xy} = \frac{1 + \nu}{1 + \xi_{xy} \nu} \eta_x^{1/2} \eta_y^{1/2} \quad \dots (3)$$

さて、 $\xi_{xy} \nu$  は  $x, y$  面における直交する2つのポアソン比  $\nu_x, \nu_y$  の相乗平均であることが式(5)で示されるから、当面のモデルについては等方弾性体のポアソン比に対応するところの、 $x, y$  面における弾塑性状態下の仮想ポアソン比  $\nu_p$  と考えることができる。すなわち、

$$(\xi_x \nu_x \cdot \xi_y \nu_y)^{1/2} = \xi_{xy} \nu = \nu_p \quad \dots (4)$$

式(3), (4)を式(1)に代入すると、弾性係数マトリクス  $D$

$$[H_p] = \frac{(\nu_p - \nu)E}{(1 - \nu_p^2)(1 - \nu)} \begin{bmatrix} \nu + \nu_p & 1 + \nu_p & 0 \\ 1 + \nu_p & \nu + \nu_p & 0 \\ 0 & 0 & -(1 - \nu)(1 - \nu_p)/2 \end{bmatrix} \quad \dots (7)$$

### 2.3 弾塑性係数マトリクスの座標変換

異方性の主軸は要素のひずみ状態に応じて任意に生じ得る。基準座標系を  $(\bar{x}, \bar{y})$  とし、異方性の主軸を局所座標系  $(x, y)$  とすると、応力およびひずみに関する座標変換マトリクス

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \quad \dots (8-1)$$

$$[T_\varepsilon] = [T_\sigma^{-1}]^T \quad \dots (8-2)$$

を用いてそれぞれの座標系に関する応力、ひずみは式次で表わせる。

$$\{\sigma_{ep}\} = [T_\sigma] \{\bar{\sigma}_{ep}\}, \quad \{\varepsilon_{ep}\} = [T_\varepsilon] \{\bar{\varepsilon}_{ep}\} \quad \dots (9)$$

ここに Suffix  $ep$  は弾塑性状態における量を表わし、 $\theta$  は両座標系間の基準座標系からみた角度である。各座標系に関する Hooke の法則は、

$$\{\sigma_{ep}\} = [D_{ep}] \{\varepsilon_{ep}\}, \quad \{\bar{\sigma}_{ep}\} = [\bar{D}_{ep}] \{\bar{\varepsilon}_{ep}\} \quad \dots (10)$$

であるから、この第1式に式(9), (8-2)を代入して基準座標系に関する弾塑性係数マトリクス  $\bar{D}_{ep}$  を求めると、

$$[\bar{D}_{ep}] = [T_p]^T ([D] + [H_p]) [T_p] \quad \dots (11)$$

ここに、

$$[T_p] = [A_p] [T_\sigma^{-1}]^T \quad \dots (12)$$

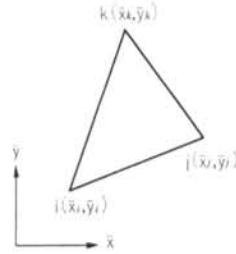


図-1 3 角形要素

に対応した弾塑性係数マトリクス  $D_{ep}$  を次のように想定することができる。

$$[D_{ep}] = [A_p]^T \{ [D] + [H_p] \} [A_p] \quad \dots (13)$$

ここに  $A_p$  はヤング係数の変化を表わす係数マトリクスであり、 $H_p$  はポアソン比の変化のみに依存する偏差マトリクスで、それぞれ次のように表わせる。

$$[A_p] = \begin{bmatrix} \eta_x^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & \eta_y^{1/2} & 0 \\ 0 & 0 & \eta_x^{1/4} \eta_y^{1/4} \end{bmatrix} \quad \dots (14)$$

### 2.4 要素の剛性マトリクス

荷重の任意のステップを  $n$  とすると、要素に対する節点力  $\bar{F}_n$  による外力仕事  $W_{ex}$  および内部弾性ひずみエネルギー  $W_{in}$  は、ステップ  $n$  での節点変位を  $\bar{\delta}_n$  とするとそれぞれ次式で表わせる。

$$W_{ex} = \frac{1}{2} \{\bar{\delta}\}_n^T \{\bar{F}\}_n,$$

$$W_{in} = \frac{1}{2} \int_V \{\bar{\varepsilon}\}_n^T [\bar{D}_{ep}]_n \{\bar{\varepsilon}\}_n dV \quad \dots (15)$$

次に要素のひずみと節点変位の関係を、

$$\{\bar{\varepsilon}\}_n = [N]_n \{\bar{\delta}\}_n \quad \dots (16)$$

とおいて(15)の2つの式に代入し、両者を等しく置くと要素の剛性マトリクス  $k_n$  として次式が得られる。

$$[k]_n = \int_V [N]_n^T [\bar{D}_{ep}]_n [N]_n dV \quad \dots (17)$$

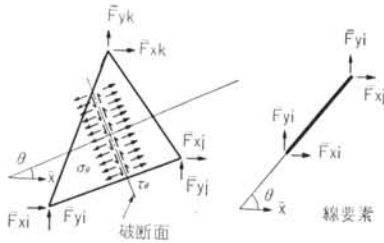
図-1 に示す3角形要素  $(i, j, k)$  が均一ひずみを生ずるような場合は、剛性マトリクスは次式で表わせる。

$$[k]_n = k A_n [N]_n^T [\bar{D}_{ep}]_n [N]_n \quad \dots (18)$$

ここに、 $A_n$  は要素の面積、 $h$  は厚さを表わし、かつ

$$[N]_n = \frac{1}{2A_n} \begin{bmatrix} Y_{jk} & 0 & Y_{ki} & 0 & Y_{ij} & 0 \\ 0 & -X_{jk} & 0 & -X_{ki} & 0 & -X_{ij} \\ -X_{jk} & Y_{jk} & -X_{ki} & Y_{ki} & -X_{ij} & Y_{ij} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$Y_{jk} = \bar{y}_j - \bar{y}_k, \quad X_{jk} = \bar{x}_j - \bar{x}_k, \quad \text{etc.}$$



図一 2 解放節点力

### § 3. 要素の破壊の取扱い

塑性状態にある要素はひずみの増大によってある荷重ステップでは破壊する。コンクリートのように引張強度が圧縮強度に比べ著しく劣る材料では、Structure としては十分安定している状態でも引張りひずみ限界を超えて部分的に破断する現象は極く普通である。このような時破断によってその部分に蓄積されていた弾性ひずみエネルギーの一部が解放される。本解析では、破断によって解放すべき弾性ひずみエネルギーに関しては内部応力に等価な要素節点力に置換する方法を用いた。

破断によって生ずる要素の剛性低下の評価には2通りある。1つは隣接する要素間に破断面を設けて、節点を分離することにより構造体を変える方法である<sup>9)</sup>。もう1つは本解析のように直交異方性化した要素の剛性を修正する方法である。したがって、破断またはひびわれに対する解釈で2つの方法には差異があり、前者が位置的な取扱いであるのに対し、後者は領域的な考えに立脚している。

次に、3角形要素と線要素について等価節点力を求める。

#### 3.1 3角形要素の等価節点力

要素の面積の  $n$  個のステップについて平均値を  $\Delta$  とし、要素の釣合式を  $n$  個のステップについて和をとると

$$\sum_n \{\bar{f}\}_n = h\Delta \sum_n [N]_n^T [\bar{D}_{ep}]_n [N]_n \{\delta\}_n \quad \dots \cdot 28$$

ステップにおける要素に関する Hooke の法則は、

$$\{\sigma\}_n = [\bar{D}_{ep}]_n \{\varepsilon\}_n = [\bar{D}_{ep}]_n [N]_n \{\delta\}_n \quad \dots \cdot 29$$

$n$  個のステップについて和をとると、

$$\sum_n \{\sigma\}_n = \sum_n [\bar{D}_{ep}]_n [N]_n \{\delta\}_n \quad \dots \cdot 30$$

$N$  は節点座標の関数であるが、有限変位の影響を無視するかまたは  $[N] = \text{mean}[N]_n$  とおくと、式30を式29に代入して次の関係が得られる。

$$\begin{aligned} \sum_n \{\bar{f}\}_n &= h\Delta [N]^T \sum_n [\bar{D}_{ep}]_n [N]_n \{\delta\}_n \\ &= h\Delta [N]^T \sum_n \{\bar{\sigma}\}_n \quad \dots \cdot 31 \end{aligned}$$

破断の生ずる主ひずみ方向を  $\theta$  とすると、応力、ひずみの座標変換マトリクスを用いて、

$$\sum_n \{\bar{\sigma}\}_n = [T_\theta] \{\sigma_\theta\}_n \quad \dots \cdot 32$$

式32を式31に代入すると破断時に解放すべき要素内力に等価な節点力  $\{F\}_n$  が求まる。

$$\{\bar{F}\}_n = \sum_n \{\bar{f}\}_n = h\Delta [N]^T [T_\theta] \{\sigma_\theta\}_n \quad \dots \cdot 33$$

ここに  $\sigma_{\theta,n}$  はステップにまでの要素応力の和の  $\theta$  方向成分のうち、 $\theta$  に直角方向の応力を零においたものである。すなわち図一2において、

$$\{\sigma_\theta\}_n = \{\sigma_\theta, 0, \tau_\theta\}^T \quad \dots \cdot 34$$

#### 3.2 線要素の等価節点力

補強筋を想定した線要素に関する等価節点力は次のようにして得られる。線要素における主ひずみと節点変位の関係は、ステップ  $n$  における線要素の長さを  $L_n$  とすると、

$$\{\varepsilon\}_n = \frac{1}{L_n} [V]_n \{\delta\}_n \quad \dots \cdot 35$$

$$[V]_n = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots \cdot 36$$

したがって軸力と節点変位の関係は、ステップ  $n$  におけるヤング係数  $E_n$  と断面積  $A_n$  を用いて、

$$A_n \{\sigma\}_n = \frac{E_n A_n}{L_n} [V]_n \{\delta\}_n \quad \dots \cdot 37$$

一方、節点力と節点変位の関係は、

$$\{\bar{f}\}_n = [k]_n \{\delta\}_n = \frac{E_n A_n}{L_n} [U]_n \{\delta\}_n \quad \dots \cdot 38$$

ここに、

$$[U]_n = \begin{bmatrix} \cos^2\theta & & & \text{sym.} \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta & & \\ -\cos^2\theta & -\sin\theta\cos\theta & \cos^2\theta & \\ -\sin\theta\cos\theta & -\sin^2\theta & \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix} \quad \dots \cdot 39$$

$$[U]_n = [V]_n^T [V]_n \quad \dots \cdot 40$$

式40を式38に代入して節点力を軸力で表わすと、



$$d\varepsilon_n = -(\varepsilon_{n-1} - \varepsilon_n) \left(1 - \frac{\eta_m}{\eta_0}\right) \quad \dots (47)$$

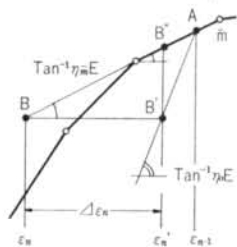


図-4 ひずみの補正

に基づいて行ない、新しいひずみの出発点は便宜上  $B'$  点とした。

ここに  $\eta_m$  は  $\varepsilon_{n-1}$  が属するひずみステージ  $m$  に対応し、 $\eta_0$  はひずみが戻る場合の荷重-ひずみ曲線に対応する値である(本解析例では  $\eta_0 = 1$  とした)。剛性マトリクスの補正は  $\varepsilon_n'$  の属するひずみステージに

## § 5. 単純支持はりの解析

本節では、前節までに述べた弾塑性解析の応用計算例として、鉄筋コンクリート造単純支持はりを取上げ、計算値と実験値の両面から考察を加えながら、本解析法を検討した。

### 5.1 単純支持はりとその有限要素法によるモデル化

扱う単純支持はり、小粥・岡田によって行なわれたPIPくいと後打コンクリートの合成はりに関する一連のはり曲げ実験<sup>10)</sup>の中の一打ち試験体3体である。試験体は図-5に示すように、断面15cm×25cm、支持間隔140cmのコンクリートはりで12φ、6φの鉄筋で補強されている。特徴として断面中央よりやや上部にスパン方向に補強筋があるが、下端筋の断面積が圧倒的に大きいところから、通常の鉄筋コンクリートと考えることができる。また荷重点が間隔20cmの2点集中荷重であり、せん断スパン比は700/25=2.8となって曲げ破壊とせん断破壊が共存するような形状寸法である。

有限要素分割は図-5左辺に示すように、コンクリー

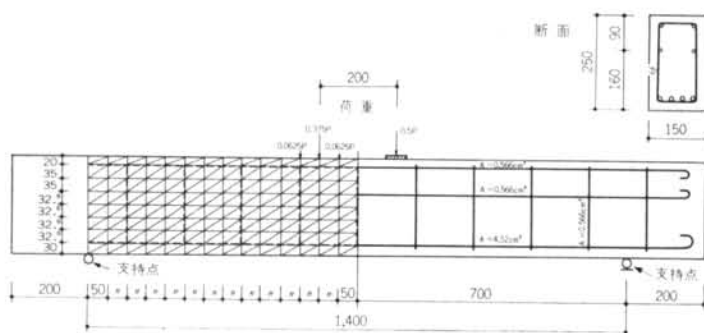


図-5 試験体とその有限要素化

トについては3角要素とし、補強筋はすべてコンクリート要素の節点間を結ぶ線要素とした。したがって補強筋とコンクリートの力の伝達は節点を通じて行なわれるものとした。

### 5.2 計算仮定

(1)弾塑性マトリクスの単純化: 本計算ではコンクリートのポアソン比に関する試験データがないため、ポアソン比を一様と考えた。すなわち式(17)で  $\nu_p = \nu$  とおくと、

$$[H_p] = 0 \quad \dots (48)$$

となり、式(21)に上式を代入すると、

$$[\bar{D}_{cp}] = [F]^T [D] [F] \quad \dots (49)$$

コンクリート要素の剛性マトリクスは式(49)を式(20)に代入して求めた。

(2)材料の諸性質: コンクリートについては1軸特性を図-6に示すような折線で近似化した。基準ヤング係数(計算上の Initial Tangent Modulus)は320,000kg/cm<sup>2</sup>であり、ポアソン比は0.17とした。引張りひずみ限界に

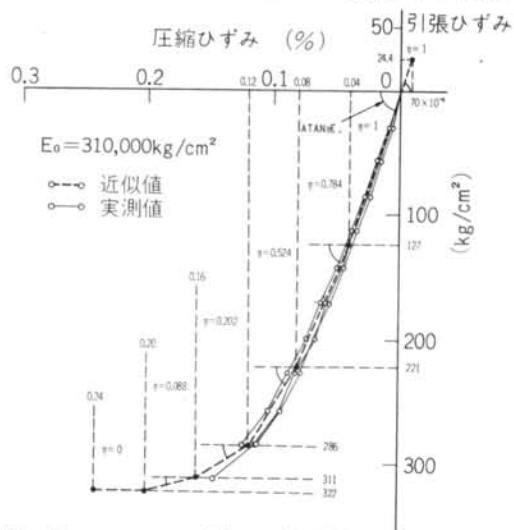


図-6 コンクリート応力-ひずみ特性

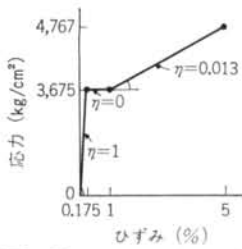


図-7 鋼材の応力-ひずみ特性

についてはコンクリートの割裂強度に相当する圧縮ひずみ曲線上のひずみから決めた。補強筋については材料試験に基づいて引張り、圧縮共に図-7に示すような1軸特性を仮定した。

(3)不安定な剛性マトリクスの取扱い：数値解析プログラムでは未知量としての変位は構造の剛性マトリクスの逆変換から求めた。しかしながら荷重増加に応じて要素の破壊が進行すると部分的に自由変位点が生ずるため、構造の剛性マトリクスのある対角要素が零になる。この結果全体構造としては耐力的に余力があっても部分的に不安定な個所が生ずるため、逆変換が不可能になる。本解析ではこのような場合の処理方法として、図-5に示す要素分割の各節点を結ぶ相対的に低く、かつ、不変の部

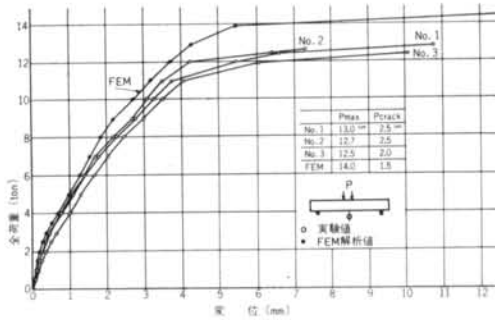


図-8 荷重-変位曲線

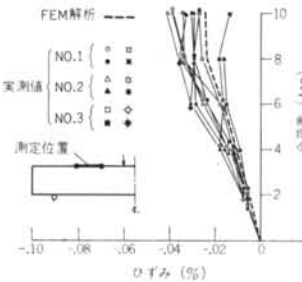


図-9(a) 荷重-ひずみ曲線

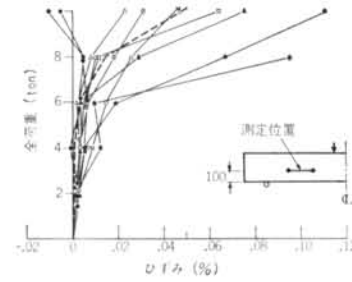


図-9(b) 荷重-ひずみ曲線

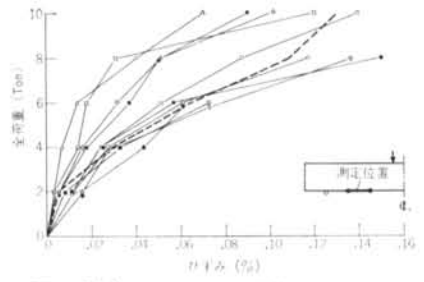


図-9(c) 荷重-ひずみ曲線

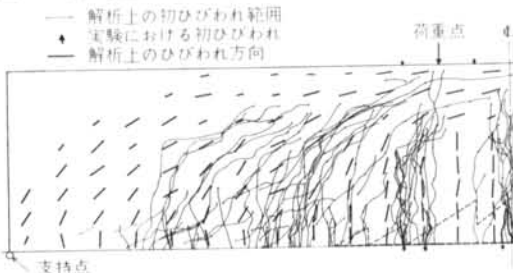


図-10 ひびわれ分布

材剛性を有するピントラス（伸び剛性で0.685φの補強筋に相当）を重ね合わせる方法を用いた。

### 5.3 計算結果

以上の仮定により数値解析を行なった。解の精度のチェックは2方向に関する荷重と反力の釣合について行なった。荷重増分は Total Load で4 ton までは0.5 ton とし、4 ton 以後は1 ton とした。要素の主ひずみがひずみ限界を超えた場合のひずみエネルギー解放に伴う節点荷重による構造体の変形は、次の荷重増分の前に求めなければならないが、計算回数を減らす目的からこれを次の荷重増分と一緒に扱った。

Total Load が14 ton のとき構造体の全体剛性は急激に低下し、所定の剛性修正の後 Total Load 15 ton および16 ton での変形が著しいため14 ton を計算上の最大荷重と断定した。計算時間は荷重ステップ19段階についてIBM360-J75により8分を要した。

はり中央下面の変位について実験値と計算の比較を図-8に示す。荷重点と支持点の間におけるはりの水平方向ひずみに関する実験値と計算値の比較を図-9に示す。この図でひずみの実験値は標点20cmのコンタクトゲージによる値であり、計算値はこれに対応する節点間の平均ひずみを表わしている。試験体の対称面4面について観察されたひびわれを3個の試験体について総合的にプロットしたものを図-10に示す。この図にはまた解析上得られた要素の破面方向を示した（荷重14 ton 時）。面内の主応力分布の荷重に伴う変化を図-11に示す。

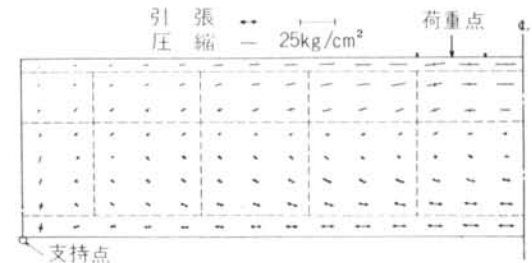


図-11(a) 主応力分布（全荷重=1,000kg）



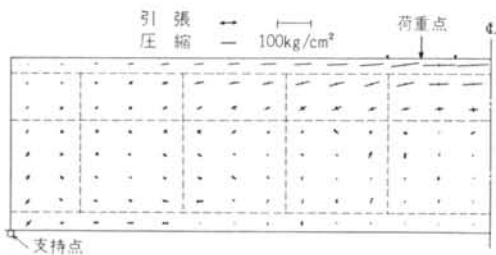


図-11(b) 主応力分布 (全荷重=4,000kg)

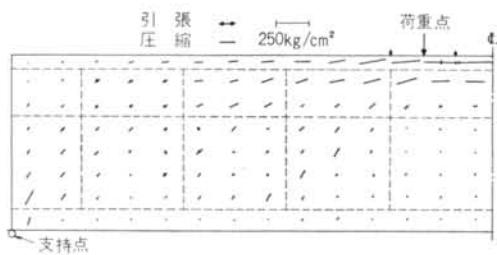


図-11(d) 主応力分布 (全荷重=10,000kg)

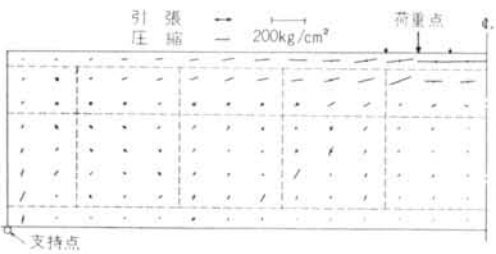


図-11(c) 主応力分布 (全荷重=8,000kg)

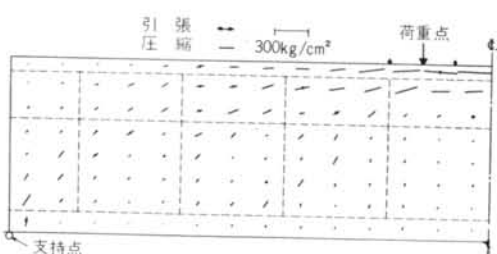


図-11(e) 主応力分布 (全荷重=12,000kg)

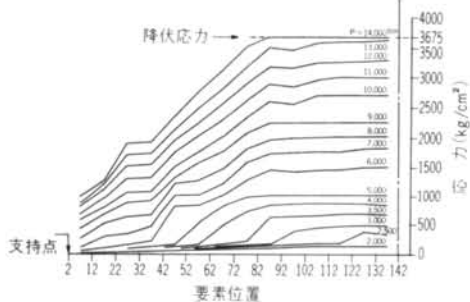


図-12 下端補強筋の応力分布変化

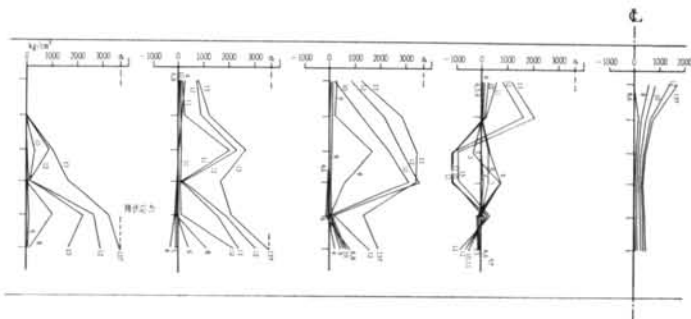


図-13 あばら筋の応力分布の変化

下端補強筋 (12φ) およびあばら筋の応力分布をそれぞれ図-12、図-13に表わす。

#### 5.4 考察

(1)変形：はリスパン中央のたわみについては図-8に表わしたように定性的、定量的にほぼ一致した結果が得られた。すなわち、たわみ曲線について 0~2 ton, 2~7 ton, 7~11 ton の荷重の3段階に関して実験値、計算値のかたむきが一致し、定量的にも、荷重 8 ton 以後で 1~1.5 ton 程度高めに計算値は出ているものの、相対的には10%前後の相違であるからほぼ満足できる結果といえよう。

(2)コンクリートのひずみ：ひびわれの影響が著るしく、特に図-9(b), (c)に示す引張りひずみの場合は実測値のばらつきが大きい。圧縮ひずみでは図-9(a)にみられる通り、ひびわれの影響を受けているもののばらつきは比較的少なく、計算値は実験値の上限をとらえていることがわかる。

(3)ひびわれ：計算上の初ひびわれは 1.5 ton であり、実験値 2~2.5 ton より低かったが、荷重 2 ton の場合を考えると実際のひびわれ位置は計算上の領域に入っている。しかしながら実際に生じたひびわれ分布は全体としてばらついており、その発生位置には必ずしも厳密な必然性は認められない。ひびわれ方向については計算から得られた要素の破断面の方向と観察されたひびわれ方向は極めてよく一致した。以上の点からひびわれについてはその位置は不確定であるが、領域的にとらえる本解析法によって十分その効果を考慮できると言えよう。

(4)釣合機構：以上の検討結果に基づいて、破壊に至るまでの試験体の釣合機構を考えてみる。図-8に示した荷重-変位曲線は図-14に表わすような Tri-linear な曲線で近似できる。図中で Phase 1 は、コンクリートが健全で全体としては構造が Homo-

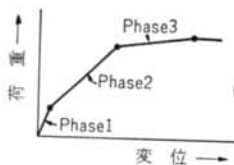


図-14 荷重-変位曲線の傾向



gineous であることを表わしている (図-11(a)参照)。  
 Phase 2 の領域は下部コンクリートに発生したひびわれによって下端補強筋の引張力負担が生じ、これが支持点まで進展してゆく状態を表わしている (図-11(b), (c)および図-12 参照)。この間のあばら筋の応力負担は局所的なものであり、あまり顕著ではない。一方、コンクリートの主応力分布図によると力の流れは下端筋の応力負担に応じて漸進的に変化してゆく。Phase 3 では図-13 にみられるようにあばら筋の応力変化 (引張力の増大) とひびわれ方向に沿ったコンクリートの圧縮力の流れ (図-11(d), (e)参照) が顕著になっており、Truss Analogy<sup>11)</sup> として考えられている力の釣合状態があばら筋付近に認められる。この段階における下端補強筋への力の伝達に対するあばら筋の負担は重要であり、一方、曲げによるせん断力の伝達は断面上部のコンクリートと端部支持点付近に限定されている。このように Phase 3 で、あばら筋と複合トラス<sup>11)</sup>を形成するに十分な角度のひびわれが生じたコンクリート要素がひびわれに沿って大きな圧縮力を負担していることは注目し値する。計算値と実験値の対応が定量的にずれてくるのは Phase 3 であり、これはコンクリートと補強筋の力の伝達に関する解析と実際の差異に起因するものであろう。

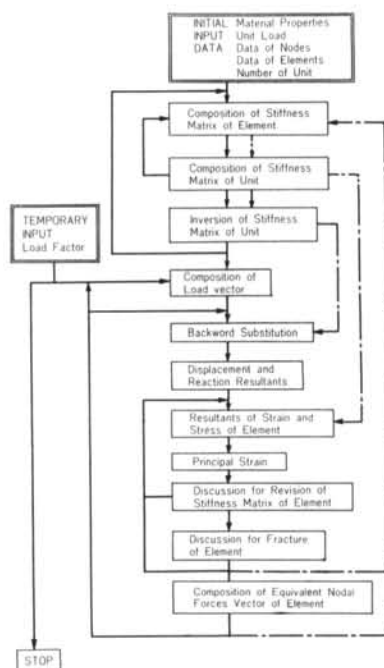
## § 6. 結論

有限要素法によるコンクリートの弾性解析に対する直交異方性的な取扱いを弾塑性問題に拡張して数値解析を行なった結果、次のような点が判明した。

- (1)コンクリートに関する有限要素法による2次元弾塑性解析において、弾性解析の場合の弾性体の常数に対応するような弾塑性係数をひずみの関数として想定することにより、コンクリートを直交異方性として取扱うことができる。
- (2)単純支持の鉄筋コンクリートはり曲げ実験にこの解析方法を適用した結果、変形、ひずみ、ひびわれ等においてかなりよく一致し、本解析法の妥当性を確認した。

## 〈参考文献〉

- 1) 日本鋼構造協会第3回大会研究会：“マトリクス構造解析講演論集”昭和44年5月
- 2) O. C. Zienkiewicz, S. Valliappan and I. P. King: “Elasto-Plastic Solutions of Engineering Problems ‘Initial Stress’, Finite Element Approach” International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 1 1969



付録 数値解析プログラムのブロックダイアグラム

本解析法の適用としては一例であるが、コンクリートを直交異方性材料とみなすことにより、有限要素法による弾塑性解析への新しい手掛りを得たものと思う。

今回の数値解析で得られた、かなり破壊の進行した状態におけるひびわれの生じたコンクリートとあばら筋の力のつり合いのメカニズムはまた、せん断破壊解明の糸口を与えるものと思う。最終耐力については10%前後の相違が実験値との間に生じたが、この点に関しては少なくとも、補強筋とコンクリートの付着性の取扱い、ポアソン比変化の影響、有限変形の影響、逆行ひずみの取扱いおよび構造物の2次元化の影響が考えられ、有限要素の設定 (要素形状、剛性、要素数など) や荷重ステップのとり方と共に今後検討せねばならない問題である。

おわりに数値解析に当たり、貴重な実験資料を提供していただいた清水建設研究所小粥庸夫、岡田武二両氏に謝意を表します。

pp. 75~100

- 3) "Proceedings of the Symposium on Application of Finite Element Methods in Civil Engineering" School of Engineering, Vanderbilt University, A. S. C. E., November 1969
- 4) 岩下恒雄：“鉄筋コンクリート造構造物の弾塑性解析法および耐震壁に関する研究” 1962. 12
- 5) 岩下恒雄：“鉄筋コンクリート造構造物の二次元弾塑性解析に対する一方法” 日本建築学会論文報告集 第141号, 昭和42年11月
- 6) O. C. Zienkiewicz, Y. K. Cheuny: "The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics" McGraw-Hill, 1967
- 7) S. G. Lekhnitskii: "Theory of Elasticity of an Anisotropic Elastic Body" Holden-Day, 1963
- 8) 林毅編：“軽構造の理論とその応用(1)” 日本科学技術連盟, 1966
- 9) A. H. Nilson: "Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method" ACI Journal, Sep, 1968
- 10) 小粥庸夫, 岡田武二：“P I P列柱くいとコンクリートによる合成壁工法の研究(その1)―室内模型実験―” 清水建設研究所報第14号, 昭和44年10月
- 11) 神山一：“鉄筋コンクリートはりのせん断破壊機構” コンクリートジャーナル, Vol. 6, No. 8 1968