

フーリエ級数展開による構造物のランダム地震応答解析法

伊藤 哲次
山原 浩

§ 1. はじめに

今日、構造物の地震応答計算を行なうとき、一般に線形加速度法や Runge-Kutta 法などが用いられている。これらの方法は構造物に対する入力地震波が加速度で与えられ、しかも構造物の基礎においてあらかじめ定められた数列として与えられる場合には有効である。

しかし、構造物の基礎に対する地震波の入力機構や動的相互作用などを考えると、地震波はある伝達機構を経て構造物の基礎に加えられることになる。そのような伝達機構は、地震入力を調和波形として解析することは比較的容易であり、その伝達関数は一般に振動数の関数として表わされることが多い。そのためランダム波形による構造物の応答を、線形加速度法などによってランダム波形のまま解析することが困難になる。

本方法はランダム波形をあらかじめフーリエ級数に展

開し、それぞれの調和波形成分波に対する応答を求め、それらの和として構造物の応答を計算するよう試みたものである。本方法によれば伝達関数すなわち伝達機構のスペクトル特性さえ与えられれば、任意のランダム波形に対する応答が得られるので、複雑な伝達関数をもつ系の応答計算には非常に好適である。

つぎに、地震入力が速度または変位の数列として与えられた場合、これらを直接に数値微分して加速度数列に換算することは、原理的に誤差が大きくなる。このような場合、原波形をフーリエ級数に展開し、調和波形として代数的に微分し、各成分波による応答波形を合成することができれば、精度上かなり改善されるであろう。その結果、速度または変位波形からも、構造物の応答計算が容易に行なわれるようになる。

以上のような要求からフーリエ級数展開を利用した構造物の地震応答計算法について考えてみることにした。

§ 2. フーリエ級数展開による1質点系のランダム地震応答

実際に複雑な構造物であっても、弾性振動問題の場合、結局は各次数について1質点系の応答を求めることに還元される。そこでまず図-1に示す1質点系モデルを考えることにする。

いま任意のランダム加速度地震波を $\ddot{Z}(t)$ とすると、 $\ddot{Z}(t)$ はつぎのようにフーリエ級数展開される。

$$\ddot{Z}(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right\} \quad \dots(1)$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \ddot{Z}(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt \\ b_n &= \frac{2}{T} \int_0^T \ddot{Z}(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt \end{aligned} \right\} \dots(2)$$

ここで T は考える地震波の全長 (sec) であり、読取られた地震波については $a_0 \doteq 0$ として考えることができる。

つぎに1質点系の運動方程式は、

$$M\ddot{x} + C\dot{x} + Kx = -M\ddot{Z}(t) \quad \dots(3)$$

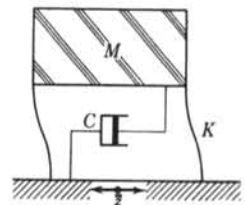


図-1 解析モデル

すなわち,

$$\ddot{x} + 2h\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x = -\ddot{Z}(t) \quad \dots(4)$$

となる。ここで M, C, K は系の質量, 減衰係数, ばね定数であり, $h = C/2\sqrt{MK}$, $\omega_0^2 = K/M$ である。

式(4)の右辺の各成分波に対する左辺の応答変位を x_n とすれば, 各成分波に関する運動方程式は,

$$\ddot{x}_n + 2h\omega_0\dot{x}_n + \omega_0^2x_n = -(a_n\cos\omega_n t + b_n\sin\omega_n t) \quad \dots(5)$$

ただし $\omega_n = 2n\pi/T$ となる。

式(5)の一般解 x_n' は, A, B を初期条件によってきまる未定係数として,

$$x_n' = e^{-h\omega_0 t} (A\cos\sqrt{1-h^2}\omega_0 t + B\sin\sqrt{1-h^2}\omega_0 t) \quad \dots(6)$$

となる。また特殊解 x_n'' は,

$$x_n'' = -\frac{a_n}{\omega_0^2} \cdot \frac{\cos(\omega_n t - \phi_n)}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}} - \frac{b_n}{\omega_0^2} \cdot \frac{\sin(\omega_n t - \phi_n)}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}} \quad \dots(7)$$

となる。ただし,

$$\gamma_n = \omega_n/\omega_0, \quad \tan\phi_n = 2h\gamma_n/(1-\gamma_n^2)$$

である。したがって式(5)の解は,

$$x_n = x_n' + x_n'' \quad \dots(8)$$

によって表わされる。

初期条件として, $t = 0$ のとき $x_n = 0, \dot{x}_n = 0$ を式(6)に代入すれば,

$$A = \frac{a_n\cos\phi_n - b_n\sin\phi_n}{\omega_0^2\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}} \quad \dots(9)$$

$$B = \frac{1}{\omega_0^2\sqrt{1-h^2}} \cdot \frac{(a_n\gamma_n - b_nh)\sin\phi_n + (a_nh + b_n\gamma_n)\cos\phi_n}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}} \quad \dots(10)$$

となる。かくして,

$$\begin{aligned} x_n = & \frac{e^{-h\omega_0 t}}{\omega_0^2\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}} \left\{ (a_n\cos\phi_n - b_n\sin\phi_n)\cos\sqrt{1-h^2}\omega_0 t \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{1-h^2}} \{ (a_nh + b_n\gamma_n)\cos\phi_n + (a_n\gamma_n - b_nh)\sin\phi_n \} \sin\sqrt{1-h^2}\omega_0 t \right\} \\ & - \frac{1}{\omega_0^2\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}} \{ a_n\cos(\omega_n t - \phi_n) + b_n\sin(\omega_n t - \phi_n) \} \end{aligned} \quad \dots(11)$$

となる。したがって質点の応答 $x(t)$ は,

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} x_n \quad \dots(12)$$

として求まる。

ところで, 質点の応答 $x(t)$ もまたフーリエ級数に展開することが可能である。まず式(11)の過渡振動に相当する項(第1項)による質点の応答を $g_1(t)$ とおくと,

$$\begin{aligned} g_1(t) = & \frac{e^{-h\omega_0 t}}{\omega_0^2} \left\{ \cos\sqrt{1-h^2}\omega_0 t \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(1-\gamma_n^2) - 2hb_n\gamma_n}{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2} \right\} \right. \\ & \left. + \frac{\sin\sqrt{1-h^2}\omega_0 t}{\sqrt{1-h^2}} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_nh + b_n\gamma_n)(1-\gamma_n^2) + 2h\gamma_n(a_n\gamma_n - b_nh)}{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2} \right\} \right\} \end{aligned} \quad \dots(13)$$

となる。ここで,

$$P = \frac{1}{\omega_0^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(1-\gamma_n^2) - 2hb_n\gamma_n}{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}$$

$$Q = \frac{1}{\omega_0^2\sqrt{1-h^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a_nh + b_n\gamma_n)(1-\gamma_n^2) + 2h\gamma_n(a_n\gamma_n - b_nh)}{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}$$

とおくと,

$$g_1(t) = e^{-h\omega_0 t} (P \cos \sqrt{1-h^2} \omega_0 t + Q \sin \sqrt{1-h^2} \omega_0 t) \quad \dots (14)$$

これをフーリエ級数に展開すれば,

$$g_1(t) = \frac{a_0'}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n' \cos \omega_n t + b_n' \sin \omega_n t\} \quad \dots (15)$$

ただし,

$$a_n' = \frac{2}{T} \int_0^T g_1(t) \cos \omega_n t dt \quad \dots (16)$$

$$b_n' = \frac{2}{T} \int_0^T g_1(t) \sin \omega_n t dt \quad \dots (17)$$

である。式(14)を式(16)に代入し a_n' について計算すると,

$$\begin{aligned} a_n' = & \frac{2h}{\omega_0 T \{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2\}} \left[-e^{-h\omega_0 T} \left\{ (1+\gamma_n^2) (P \cos \sqrt{1-h^2} \omega_0 T \right. \right. \\ & + Q \sin \sqrt{1-h^2} \omega_0 T) - \frac{\sqrt{1-h^2}(1-\gamma_n^2)}{h} (P \sin \sqrt{1-h^2} \omega_0 T \\ & \left. \left. - Q \cos \sqrt{1-h^2} \omega_0 T) \right\} + P(1+\gamma_n^2) + Q \frac{\sqrt{1-h^2}(1-\gamma_n^2)}{h} \right] \quad \dots (18) \end{aligned}$$

となる。また式(14)を式(17)に代入し b_n' について計算すると,

$$\begin{aligned} b_n' = & \frac{2h}{\omega_0 T \{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2\}} \left[e^{-h\omega_0 T} \left\{ 2\sqrt{1-h^2} \gamma_n (P \sin \sqrt{1-h^2} \omega_0 T \right. \right. \\ & - Q \cos \sqrt{1-h^2} \omega_0 T) + \frac{\gamma_n(1-2h^2-\gamma_n^2)}{h} (P \cos \sqrt{1-h^2} \omega_0 T \\ & \left. \left. + Q \sin \sqrt{1-h^2} \omega_0 T) \right\} - P \frac{\gamma_n(1-2h^2-\gamma_n^2)}{h} + 2Q \sqrt{1-h^2} \gamma_n \right] \quad \dots (19) \end{aligned}$$

となる。

つぎに式(1)の定常振動に相当する項 (第2項) による質点の応答を $g_2(t)$ とおけば,

$$\begin{aligned} g_2(t) = & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}} \{a_n \cos(\omega_n t - \phi_n) + b_n \sin(\omega_n t - \phi_n)\} \\ = & - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}} \{ (a_n \cos \phi_n - b_n \sin \phi_n) \cos \omega_n t + (a_n \sin \phi_n + b_n \cos \phi_n) \sin \omega_n t \} \quad \dots (20) \end{aligned}$$

ここで,

$$\cos \phi_n = \frac{1-\gamma_n^2}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}}$$

$$\sin \phi_n = \frac{2h\gamma_n}{\sqrt{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2}}$$

であるから,

$$g_2(t) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\omega_0^2 \{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2\}} \{ [a_n(1-\gamma_n^2) - 2hb_n\gamma_n] \cos \omega_n t + [2ha_n\gamma_n + b_n(1-\gamma_n^2)] \sin \omega_n t \} \quad \dots (21)$$

式(21)において,

$$a_n'' = - \frac{a_n(1-\gamma_n^2) - 2hb_n\gamma_n}{\omega_0^2 \{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2\}} \quad \dots (22)$$

$$b_n'' = - \frac{2ha_n\gamma_n + b_n(1-\gamma_n^2)}{\omega_0^2 \{(1-\gamma_n^2)^2 + 4h^2\gamma_n^2\}} \quad \dots (23)$$

とおけば,

$$g_2(t) = \frac{a_0''}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n'' \cos \omega_n t + b_n'' \sin \omega_n t\} \quad \dots \text{24}$$

となって, フーリエ級数に展開される.

よって質点の応答 $x(t)$ は, 式(24)より,

$$x(t) = g_1(t) + g_2(t) = \frac{a_0' + a_0''}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \{(a_n' + a_n'') \cos \omega_n t + (b_n' + b_n'') \sin \omega_n t\} \quad \dots \text{25}$$

となって, フーリエ級数の展開式によって表わされる. ただし地震応答計算では, 通常 $a_0' + a_0'' = 0$ となる.

§ 3. 有限フーリエ係数の計算法

前章において, 地震波をフーリエ級数に展開することによって, 質点の応答もまたフーリエ級数に展開されることを示した. そこで本章においては, フーリエ係数の実際の計算法について述べることにしよう.

地震波の測定点数を $2N$ 個とし, 測定点を $t = 0, 1, 2, \dots, 2N-1$ とすると, 式(1)はつぎのような有限フーリエ級数として表わされる.

$$\ddot{Z}(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \left(A_n \cos \frac{2n\pi}{T} t + B_n \sin \frac{2n\pi}{T} t \right) + \frac{A_N}{2} \cos \frac{2N\pi}{T} t \quad \dots \text{26}$$

ただし,

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T \ddot{Z}(t) \cos \frac{2n\pi}{T} t dt \quad \dots \text{27}$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T \ddot{Z}(t) \sin \frac{2n\pi}{T} t dt \quad \dots \text{28}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, N)$$

である. さらに測定間隔を Δt とすると,

$$t = k\Delta t \quad (k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1)$$

であり,

$$\ddot{Z}(t) = \ddot{Z}(k\Delta t) = \ddot{Z}_k$$

とおくことにする. すなわち式(26)はつぎのように書き改められる.

$$\ddot{Z}_k = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \left(A_n \cos \frac{nk\pi}{N} + B_n \sin \frac{nk\pi}{N} \right) + \frac{1}{2} A_N \cos k\pi \quad \dots \text{29}$$

ただし,

$$A_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \ddot{Z}_k \cos \frac{nk\pi}{N} \quad \dots \text{30}$$

$$B_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \ddot{Z}_k \sin \frac{nk\pi}{N} \quad \dots \text{31}$$

ここでオイラーの公式:

$$\cos \frac{nk\pi}{N} = \frac{1}{2} \left(e^{i \frac{nk\pi}{N}} + e^{-i \frac{nk\pi}{N}} \right)$$

$$\sin \frac{nk\pi}{N} = -\frac{i}{2} \left(e^{i \frac{nk\pi}{N}} - e^{-i \frac{nk\pi}{N}} \right)$$

より,

$$\alpha_n = A_n - iB_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \ddot{Z}_k e^{-i \frac{nk\pi}{N}} \quad \dots \text{32}$$

$$\alpha_{-n} = A_n + iB_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \ddot{Z}_k e^{i \frac{nk\pi}{N}} \quad \dots \text{33}$$

となる。一方、式29をオイラーの公式を使って複素数表示すれば、

$$\ddot{Z}_k = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_n}{2} e^{i \frac{nk\pi}{N}} + \frac{\alpha_N}{2} e^{i \frac{nk\pi}{N}} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_{-n}}{2} e^{-i \frac{nk\pi}{N}} \quad \dots \text{34}$$

となる。

ところで、 $n' = 2N - n$ ($n' = 2N - 1, 2N - 2, \dots, N + 1$) とおくと、

$$e^{-i \frac{n'k\pi}{N}} = e^{i \frac{nk\pi}{N}}$$

$$e^{i \frac{n'k\pi}{N}} = e^{-i \frac{nk\pi}{N}}$$

となるから、式34より、

$$\alpha_{n'} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \ddot{Z}_k e^{-i \frac{n'k\pi}{N}} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \ddot{Z}_k e^{i \frac{nk\pi}{N}} = \alpha_{-n}$$

となる。よって式34の第4項は、

$$\sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_{-n}}{2} e^{-i \frac{nk\pi}{N}} = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\alpha_{2N-n}}{2} e^{i \frac{(2N-n)k\pi}{N}} = \sum_{n=N+1}^{2N-1} \frac{\alpha_n}{2} e^{i \frac{nk\pi}{N}}$$

となる。よって式34は、

$$\ddot{Z}_k = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{2N-1} \alpha_n e^{i \frac{nk\pi}{N}} \quad \dots \text{35}$$

$$(k = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1)$$

となり、また、

$$\alpha_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{2N-1} \ddot{Z}_k e^{-i \frac{nk\pi}{N}} \quad \dots \text{36}$$

$$(n = 0, 1, 2, \dots, 2N - 1)$$

である。かくして複素有限フーリエ級数(式35)と、複素有限フーリエ係数(式36)が求まる。

なお式35,36の計算は、測定点数を 2^n とし、F. F. T. (Fast Foulter Transform¹⁾)を用いてかなり高速度に処理することができる。

§ 4. 数値計算例

図-2に示すようなフローチャートにしたがって、まず地震波 \ddot{Z}_k を与えフーリエ級数展開によって1質点系の応答Aを求める。つぎに一般の線形加速度法によって、同一モデルに関する応答Bを求める。系の固有振動数、減衰定数を各種変化させて同様な計算を行ない、フーリエ級数法による計算結果Aと線形加速度法による計算結果Bを比較することにした。また参考までに、原波形をフーリエ級数に展開したものを再び合成して得られる再

生波形と原波形とを比較してみた。

図-3は原波形(El-Centro 1940 NS)と、原波形のフーリエ級数展開による再生波形を比較したものである。原波形の測定間隔を0.01sec ($\Delta t = 0.01\text{sec}$)とし、測定点数は2048個 ($N = 2048$)としてある。同図から両者はほぼ完全に一致し、最大加速度においてもわずか0.1gal (0.03%)しか差がないことがわかる。

つぎに1質点系の固有振動数および減衰定数を幾段階に変化させ、それぞれの応答を線形加速度法とフーリエ級数法により求め、両者を比較して表-1に示した。ま

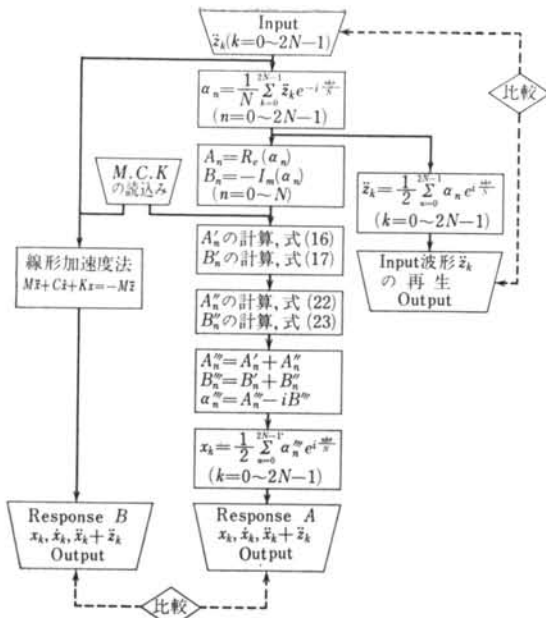


図-2 数値計算のフローチャート

Case	系の固有振動数 Hz	系の減衰定数	解析方法	測定点数 N	最大応答 gal
I	1	0.05	B		481
			A	1024 2048	478 482
II	3	0.01	B		1225
			A	1024 2048	1231 1230
III	3	0.05	B		876
			A	1024 2048	877 878
IV	3	0.10	B		646
			A	1024 2048	647 646
V	5	0.05	B		1002
			A	1024 2048	1003 1003

* A：フーリエ級数法，B：線形加速度法

表-1

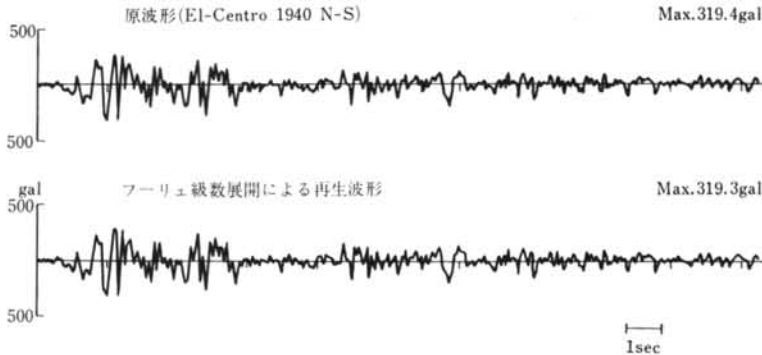


図-3 原波形 (El-Centro 1940 NS) とフーリエ級数展開による再生波形との比較

た Case III ($T_0=3$ Hz, $h=0.05$) と Case V ($T_0=5$ Hz, $h=0.05$) について、両者の応答波形をそれぞれ図-4および図-5に示した。このようにフーリエ級数法による結果は、線形加速度法による結果とほぼ完全に一致することがわかった。

§ 5. フーリエ級数展開を利用した波形処理

速度波形または変位波形が与えられて構造物の地震応答を求めようとするとき、速度波形または変位波形から加速度波形に変換することが必要になる。この場合、ランダム波形のまま直接数値微分によって加速度波形に変換しようとする、一般に誤差が大きくほとんど実用に

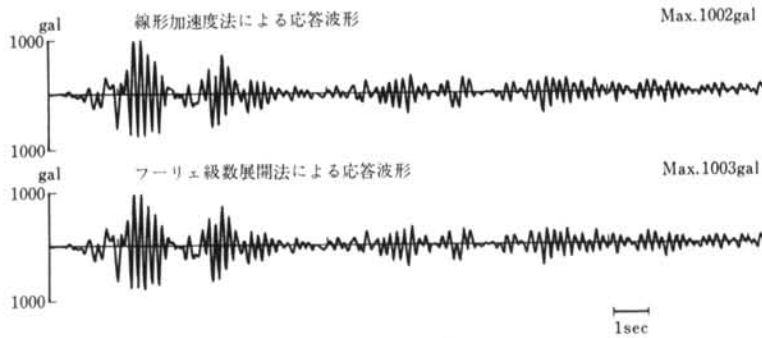
ならないことが多い。また加速度波形が与えられ、それから速度波形または変位波形を得ようとするとき、ランダム波形のまま直接数値積分すると、ドリフトや発散現象に悩まされることが多い。さらにランダム現象の波形処理において、ノイズやドリフトの除去といったフィルター処理が必要になることが多い。

そこで本章においては、フーリエ級数展開を利用した波形処理について要約することにした。いま任意のランダム波形を $f(t)$ とし、その有限フーリエ級数は、

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} [A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t] + \frac{A_N}{2} \cos \omega_N t \quad \dots (37)$$



図—4 線形加速度法とフーリエ級数展開法による応答波形の比較 (Case III)



図—5 線形加速度法とフーリエ級数展開法による応答波形の比較 (Case V)

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \omega_n t \, dt$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin \omega_n t \, dt$$

で表わされる。

(1) 微分

式(3)を微分すれば、

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{B_n \omega_n \cos \omega_n t - A_n \omega_n \sin \omega_n t\} - \frac{A_N}{2} \omega_N \sin \omega_N t$$

すなわち、 $f(t)$ を微分して得られる波形のフーリエ級数展開式は、

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{N-1} \{A_n' \cos \omega_n t + B_n' \sin \omega_n t\} + \frac{A_N'}{2} \cos \omega_N t \quad \dots (8)$$

ただしこの場合、

$$A_n' = \omega_n B_n, \quad B_n' = -\omega_n A_n, \quad A_N' = 0$$

となる。

(2) 積分

式(3)を積分すれば、 $F(t) = \int_0^t f(t) dt$ とおいて、

$$F(t) = \frac{A_0}{2} t + \sum_{n=1}^{N-1} \left\{ -\frac{B_n}{\omega_n} \cos \omega_n t + \frac{A_n}{\omega_n} \sin \omega_n t \right\} + \frac{A_N}{2\omega_N} \sin \omega_N t + C_1$$

いま初期条件として、 $t = 0$ のとき $F(t) = 0$ とおけば、

$$C_1 = \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{\omega_n}$$

となる。したがって $f(t)$ を積分して得られる波形のフーリエ級数展開式を、

$$F(t) = \frac{A_0'}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \{A_n' \cos \omega_n t + B_n' \sin \omega_n t\} + \frac{A_N'}{2} \cos \omega_N t \quad \dots (9)$$

とおけば、

$$A_n' = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \cos \omega_n t \, dt = -\frac{B_n}{\omega_n}$$

$$B_n' = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \sin \omega_n t \, dt = \frac{A_n}{\omega_n} - \frac{A_0 T}{2n\pi}$$

$$A_0' = \frac{2}{T} \int_0^T F(t) \, dt = \frac{A_0}{2} T + 2 \sum_{n=1}^{N-1} \frac{B_n}{\omega_n}$$

$$A_N' = 0$$

となる。

(3) フィルター処理

まず測定波形に含まれる振動数が ω_{nc} より高い成分波を除去する場合、そのフーリエ級数展開式は、

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{nc} \{A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t\} \quad \dots (10)$$

となる。

つぎに測定波形に含まれる振動数が ω_{nc} より低い成分波を除去する場合は、そのフーリエ級数展開式は、

$$f(t) = \sum_{n=nc}^{N-1} \{A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t\} + \frac{A_N}{2} \cos \omega_N t \quad \dots (11)$$

となる。

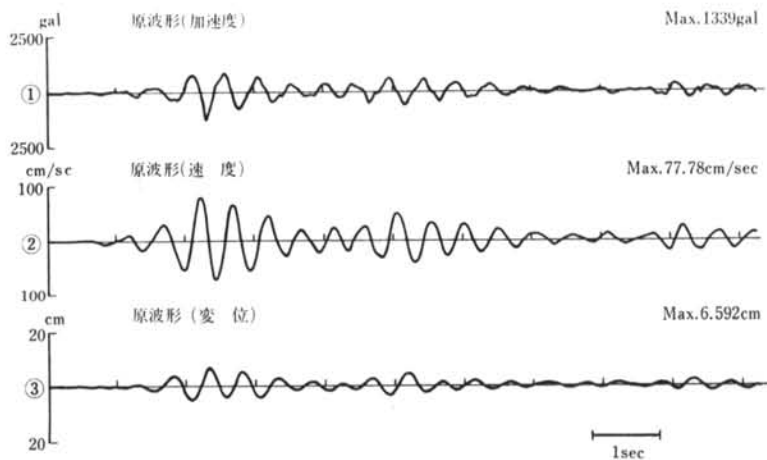
以上の結果を用いて、つぎのような数値計算を行なってみた。まず同一現象について加速度・速度・変位の波形を得るため、固有振動数 2 Hz、減衰定数 0.05 なる質点系に El-Centro 1940 NS 地震を作用させ、線形加速度法によって質点の加速度・速度・変位の各応答波形を求めた。図-6 に示すこれら 3 種の波形を原波形とすることにした。

つぎに変位に関する原波形をフーリエ級数展開し、式(9)によって 1 階微分して得られた波形を図-7④に示した。さらにこの速度波形をもう 1 階微分して得られた加速度波形を図-7⑤に示した。図-7⑥は速度に関する原速度波形から 1 階微分して得られた加速度波形である。ここで波形④には $f_{nc}=25$ Hz、波形⑤⑥には $f_{nc}=10$ Hz とするローパス (Low-pass) フィルター処理を施してある。波形④を波形②に、波形⑤⑥を波形①に比較するとそれぞれほぼ完全に一致していることがわかる。

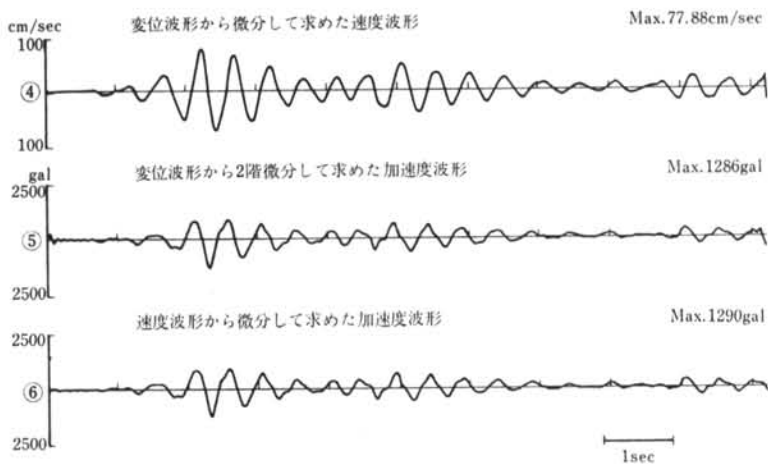
つぎに加速度に関する原波形をフーリエ級数展開し、式(9)によって 1 階積分して得られた波形を図-8⑦に、2 階積分して得られた波形を図-8⑧に示した。さらに原波形の速度波形から 1 階積分して得られた変位波形を

図-8⑨に示した。ここで波形⑦⑧には、それぞれ $f_{nc}=0.01$ Hz、 $f_{nc}=0.2$ Hz とするハイパス (High-pass) フィルターを通してある。波形⑨は原波形にあらかじめ $f_{nc}=0.01$ Hz のハイパスフィルター処理を行なってから積分したものである。波形⑦を波形②に、波形⑧、⑨を波形③に比較すると、それぞれ非常によく合致していることがわかる。

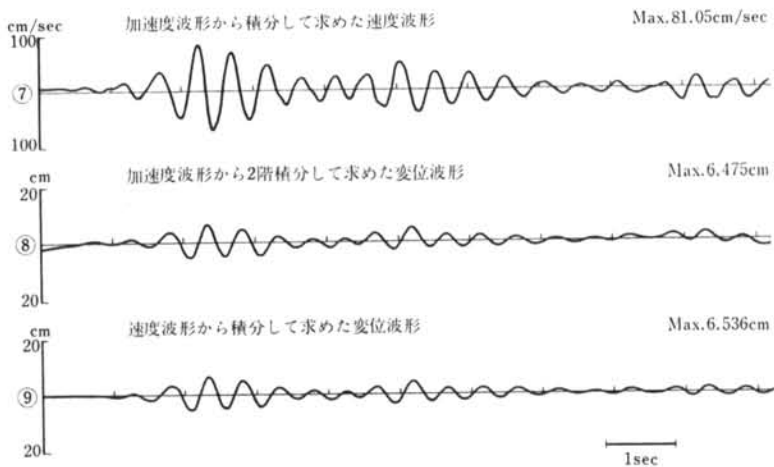
つぎに実測データを使って数値計算を行ない、実測波形と数値計算から得られた波形の比較を示す。図-9 の波形⑩、⑪は振動台をランダムに加振させたときの振動を、変位計および加速度計で同時測定して得られたものである。一方同図⑫、⑬はそれらの実測波形を数値積分あるいは数値微分し、さらに数値フィルター処理したものである。すなわち変位波形⑫は、実測加速度波形⑩を 2 階積分し $f_{nc}=3$ Hz のハイパスフィルター処理して得られたものであり、加速度波形⑬は、実測変位波形⑩を 2 階微分し $f_{nc}=20$ Hz のローパスフィルター処理をして得られたものである。これら実測波形とそれらを使って数値計算をして得られた波形を比較した場合も、非常によく合致していることがわらう。



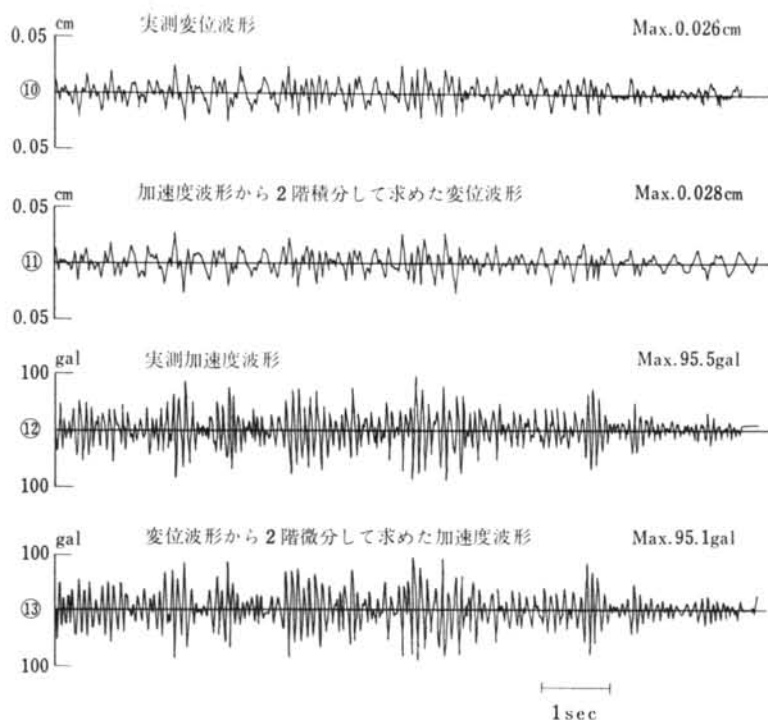
図一6 同一現象における加速度・速度・変位波形



図一7 原波形から微分して得られる各種波形



図一8 原波形から積分して得られる各種波形



図一 9 実測波形と数値計算処理波形の比較

§ 6. おわりに

本論文は、フーリエ級数を利用した構造物のランダム地震応答の計算法と、ランダム波形処理法を示したものである。その結果、本方法によって構造物の地震応答計算が、十分な精度と経済速度で実行しうることがわかった。

構造物に対する地震波の入力機構を考えると、地動加速度による慣性力をそのまま振動系の外力として与えられないことが起こる。たとえば地動の位相差²⁾や、地震波動と構造物振動のエネルギー的平衡条件³⁾などを考慮すれば、それらの効果の一般的特性は地動を調和波形として解析される。それらの解は一般に振動数の関数と

なり、一種の周波数フィルターとしての効果をもつことが多い。実際に構造物に加えられる地震入力はそのためのフィルターを通過したものであるから、地震入力はあらかじめ定められた数列として与えられなくなる。そのため、ランダム波による構造物の地震応答を計算するとき、線形加速度法などの適用が困難になる。

そこでランダム波による問題をフーリエ級数を利用して調和波形による問題に還元できれば、その種の問題の解析に非常に便利である。本研究はそのような要求から着手したものであり、今後の研究の手段として活用の余地が広い。本論文は単に1つの解析法を示したものにすぎないかもしれないが、今後の研究への布石としてここに1つのテーマとしてまとめた次第である。

<参考文献>

- 1) William T. Cochran and other nine authors: "What is the Fast Foulter Transform?" IEEE Trans. on Audio and Electroacoustics, Vol. AU-15, No. 2, June 1967
- 2) 山原 浩: "地震時の地動と地震波の入力損失" 日本建築学会論文報告集, 第1報 No. 165, Nov. 1969, 第2報 No. 167, Jan. 1970
- 2) 山原 浩: "エネルギーの平衡を考えた構造物の地震応答" 日本建築学会論文報告集 No. 187, Sep. 1971