U.D.C. 624.073.7

清水建設研究所報
第2号昭和38年4月

ある不可能の証明——格子梁の連立1次方程式

清水　達雄

§1. 問題の説明

「建築学大系」の，10巻II：平板・壁板の力学，によれば，格子梁のおのおのの格点に働く，反力Pたちについて，つぎのような連立1次方程式がたてられる．

$$\sum_{i=1}^{s} P_{in}\cdot x_i + A_{mn}\sum_{j=1}^{t} P_{mj}\cdot y_j = B$$

ただしここで

$x_i,\quad y_j,\quad A_{mn},\quad B$

は，支持条件や荷重条件によって，きまった形をとる．たとえば，両端単純支持で等分布荷重の場合

$$x_i = \sin\frac{\xi_i}{a}\pi$$

$$y_j = \sin\frac{\eta_j}{b}\pi$$

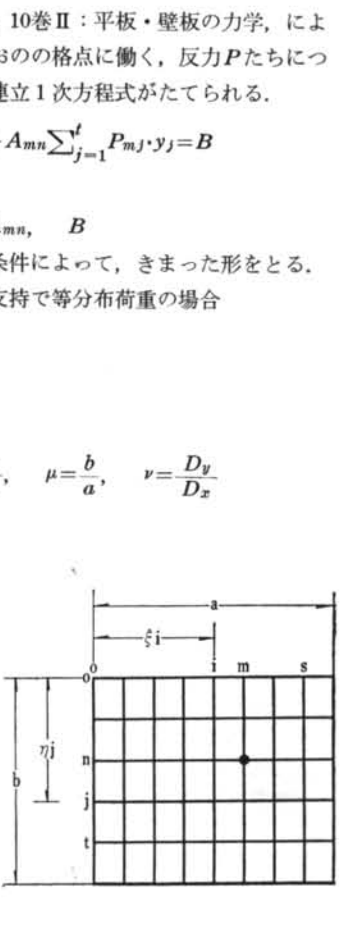
$$A_{mn} = \frac{\mu^3}{\nu}\frac{y_n}{x_m},\qquad \mu = \frac{b}{a},\qquad \nu = \frac{D_y}{D_x}$$

$$B = \frac{2pa}{\pi}$$

ここで

$a,\ b,\ \xi_i,\ \eta_j$

は，図示の長さ．また，pは等分布荷重，Dは曲げ剛度.



いま，かんたんのため

$s = t = N-1$

$a = b$

$D_x = D_y$

$B = 1$ （つまり　$2pa = \pi$）

とすれば，方程式は

$$\sum_{i=1}^{N-1} P_{in}\cdot x_i + \frac{y_n}{x_m}\sum_{j=1}^{N-1} P_{mj}\cdot y_j = 1$$

$$(n,\ m = 1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

$$x_k = \sin\frac{k\pi}{N} = y_k$$

未知数が P_{ij} で

$(N-1)^2$

個，これに対して方程式が

$(N-1)^2$

個ある．だから，P_{ij} が求められるかにみえる．

しかし，事実はそうでない．式に，ある種の重複があって，一般には不定となる．対称条件

$$\left.\begin{array}{l} P_{ik} = P_{i\ N-k} \\ P_{kj} = P_{N-k\ j} \end{array}\right\}$$

をつけ加えても，事情はほとんど変らない．

結論をさきにいえば，P_{ij} が決定できるのは，

$N=2$ （十字梁）

$N=3$ （井桁梁）——対称条件の下で

の場合に，かぎられる．

$N \geq 4$

では，P_{ij} の決定はできない．できないということを，本文で示そう．

文字式の変形で，簡単に示せることだけれども，実際

の問題で，数係数にしてとりかかると，式のこの性格がつい見逃されやすい．

電子計算機にかけたところ，常識はずれの答がでた．プログラムを変えてもう一度やったところ，全然ちがう別の答がでた．しかも，印刷された検算結果をみると，そのどちらもが,精度の良い解になっている．どうした，どうした——ということが，実際にあった．

半年して，また

行列式$=0$

に行きあたって，検算やら何やら，まる一晩つぶした，との話をきいた．二度あったことが，三度とないよう，それで本文を草してみた．

§2. 連立方程式の構造

記号を改め

$$\sin\frac{k\pi}{N}=s_k \qquad \cdots\cdots(1)$$

とおく（$k=1$, ……, $N-1$）．方程式は

$$\sum_{i=1}^{N-1}P_{in}s_i+\frac{s_n}{s_m}\sum_{j=1}^{N-1}P_{mj}s_j=1 \qquad \cdots\cdots(2)$$

$$(n,\ m=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

まず変数を

$$P_{ij}\cdot s_is_j=Q_{ij} \qquad \cdots\cdots(3)$$

におきかえると

$$\frac{1}{s_n}\sum_{i=1}^{N-1}Q_{in}+\frac{s_n}{s_m{}^2}\sum_{j=1}^{N-1}Q_{mj}=1$$

つまり

$$\frac{1}{s_n{}^2}\sum_{i=1}^{N-1}Q_{in}+\frac{1}{s_m{}^2}\sum_{j=1}^{N-1}Q_{mj}=\frac{1}{s_n}$$

これは，実は

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{N-1}Q_{in}=R_n\quad(n=1,\cdots\cdots,N-1)\\&\sum_{j=1}^{N-1}Q_{mj}=L_m\quad(m=1,\cdots\cdots,N-1)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(4)$$

に関する，連立1次方程式になっている．

$$\frac{1}{s_n{}^2}R_n+\frac{1}{s_m{}^2}\mathrm{L}_m=\frac{1}{s_n}$$

かきかえて

$$\frac{L_m}{s_m{}^2}=\frac{s_n-R_n}{s_n{}^2} \qquad \cdots\cdots(5)$$

$$(n,\ m=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

これは，一定のnに対して，mを動かしてやれば，

$$\frac{L_1}{s_1{}^2}=\cdots\cdots=\frac{L_{N-1}}{s_{N-1}{}^2}=\frac{s_n-R_n}{s_n{}^2}$$

こういう式を

$n=1$, ……, $N-1$

として並べたもの．ということは

$$\frac{L_1}{s_1{}^2}=\cdots\cdots=\frac{L_{N-1}}{s_{N-1}{}^2}$$

$$=\frac{s_1-R_1}{s_1{}^2}=\cdots\cdots=\frac{s_{N-1}-R_{N-1}}{s_{N-1}{}^2}\cdots\cdots(6)$$

この1本の式に，もとの連立式は，同値になっている．

等号の数は

$$\{(N-1)-1\}+1+\{(N-1)-1\}$$
$$=2(N-1)-1$$

しかない．はじめには

$$(N-1)^2$$

あったのに．つまり内容的に重複があったことになる．

$$\left.\begin{aligned}&\text{変数の数}\quad(N-1)^2\\&\text{等式の数}\quad 2(N-1)-1\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(7)$$

その差は

$$(N-1)^2-2(N-1)+1=(N-2)^2$$

だから

判定 1.　$N>2$ なら，式数が不足

で，変数 P_{ij} はきめられない．

§3. 中間変数の決定

ところで，上の連立式 (6) は，直接には

L_1, ……, L_{N-1}, R_1, ……, R_{N-1}

に関している．未知数が

$2(N-1)$

個，それに対する式が

$2(N-1)-1$

個．しかし，LやRの定義式 (4) によれば

$$\sum_{i=1}^{N-1}L_i=\sum_{i=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{N-1}Q_{ij}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}R_j=\sum_{j=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{N-1}Q_{ij}$$

だから

$$\sum_{k=1}^{N-1}L_k=\sum_{k=1}^{N-1}R_k \qquad \cdots\cdots(8)$$

この関係があるので

L_1, ……, L_{N-1}, R_1, ……, R_{N-1}

を決定することができる．

問題の連立式 (6) を，つぎのように分けてみよう．

$$\frac{L_1}{s_1{}^2}=\cdots\cdots=\frac{L_{N-1}}{s_{N-1}{}^2} \qquad \cdots\cdots(9)$$

および

$$\frac{L_k}{s_k{}^2}=\frac{s_k-R_k}{s_k{}^2}\qquad (k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

これは，分母をはらうと

$$L_k=s_k-R_k$$

$$L_k+R_k=s_k\qquad (k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)\cdots\cdots\cdots(10)$$

この式から

$$\sum_{k=1}^{N-1}L_k+\sum_{k=1}^{N-1}R_k=\sum_{k=1}^{N-1}s_k$$

ここで，さっきの (8) を使うと

$$\sum_{k=1}^{N-1}L_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}s_k\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

ところで，連立式の前半部 (9) によれば

$$L_k=\frac{s_k{}^2}{s_1{}^2}L_1\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

そこで

$$\sum_{k=1}^{N-1}L_k=\sum_{k=1}^{N-1}\frac{s_k{}^2}{s_1{}^2}L_1=\frac{L_1}{s_1{}^2}\sum_{k=1}^{N-1}s_k{}^2$$

これを (11) とくらべて

$$\frac{L_1}{s_1{}^2}\sum_{k=1}^{N-1}s_k{}^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}s_k$$

$$L_1=\frac{s_1{}^2\sum_{k=1}^{N-1}s_k}{2\sum_{k=1}^{N-1}s_k{}^2}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

これで，L_1 が求まった．そうすると (12) から L_k がわかり，さらに (10) から R_k が求められる．このように

$$\left.\begin{array}{l}\text{連立式の簡約形 (6)}\\ \text{定義関係からの (8)}\end{array}\right\}$$

は，中間変数ともいうべき

$$L_1,\ \cdots\cdots,\ L_{N-1},\ R_1,\ \cdots\cdots,\ R_{N-1}$$

に関して，ちょうど解かれる．

ところで，解の基本になる式 (13) の右辺は，和記号のない形にすることができる．それをつぎに説明する．

§4. 有限3角級数の和公式

これから

$$\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$$

のような形の，有限3角級数の和を算出する．方法はいろいろあるけれども，複素数によるのがもっとも簡明でよい．虚数単位

$$\sqrt{-1}=i$$

を使って，複素数

$$\cos\theta+i\sin\theta=Z$$

とおく．

ド・モアヴルの定理によれば

$$Z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$$

そこで

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$$

$$=\sum_{k=1}^{n}Z^k=Z\frac{Z^n-1}{Z-1}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

これを，実部と虚部とに分けるのに，すこしく工夫をする．θ の半角に対する

$$\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}=z$$

とおくと

$$z^2=\cos\theta+i\sin\theta=Z$$

そこで

$$Z\frac{Z^n-1}{Z-1}=z^2\frac{z^{2n}-1}{z^2-1}=z^2\frac{z^n}{z}\ \frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}}$$

$$=z^{n+1}\frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}}\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

ところで一般に

$$w=\cos\alpha+i\sin\alpha=e^{i\alpha}$$

のとき

$$w^{-1}=\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)=e^{-i\alpha}$$

で

$$\frac{w-w^{-1}}{2i}=\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}=\sin\alpha$$

$$w-w^{-1}=2i\sin\alpha$$

いまの場合

$$z-z^{-1}=2i\sin\frac{\theta}{2}$$

$$z^n-z^{-n}=2i\sin\frac{n\theta}{2}$$

そこで

$$\frac{\sin\frac{n\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=r\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

とおけば

$$\frac{z^n-z^{-n}}{z-z^{-1}}=r\ \text{（実数）}$$

これを

$$z^{n+1}=\cos\frac{n+1}{2}\theta+i\sin\frac{n+1}{2}\theta$$

に掛けたものが，(15) (14) から

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta+i\sum_{k=1}^{n}\sin k\theta$$

にひとしい．そこで，実部どうし，虚部どうしをくらべ

$$\sum_{k=1}^{n}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}k\theta=r\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\frac{n+1}{2}\theta\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

直接必要なのは sin の分だけれども，cos のほうから

$$\sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\theta$$

が求められる．というのは

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$$

だから

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\theta=n-\sum_{k=1}^{n}\cos k(2\theta)$$

この右辺第2項に，(17) の cos の公式を適用する．

θ を 2θ に

するのだから，分母の2がとれて

$$\sum_{k=1}^{n}\cos k(2\theta)=r\cos(n+1)\theta$$

ただし r は，(16) から

$$r=\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

まとめて

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin^2 k\theta=n-\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}\cos(n+1)\theta \quad\cdots\cdots(18)$$

§5. 中間的結論

さて，上の公式で，とくに

$$\theta=\frac{\pi}{N}$$

$$n=N-1$$

としてみよう．(18) の

$$\sin n\theta=\sin\frac{N-1}{N}\pi=\sin\left(\pi-\frac{\pi}{N}\right)$$

$$=\sin\frac{\pi}{N}=\sin\theta$$

$$\cos(n+1)\theta=\cos\pi=-1$$

となって

右辺$=n-(-1)=N$

そこで

$$2\sum_{k=1}^{N-1}\sin^2\frac{k\pi}{N}=N \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(19)$$

つぎに，(17) の sin の式を考えると，まず

$$\sin\frac{n+1}{2}\theta=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

それから r は，(16) の

$$\sin\frac{n\theta}{2}=\sin\frac{N-1}{2N}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2N}\right)$$

$$=\cos\frac{\pi}{2N}=\cos\frac{\theta}{2}$$

だから

$$r=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=\cot\frac{\theta}{2}=\cot\frac{\pi}{2N}$$

そこで

$$\sum_{k=1}^{N-1}\sin\frac{k\pi}{N}=\cot\frac{\pi}{2N} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(20)$$

これで，準備がととのった．

§2 にもどり，(1) にしたがって改めて書けば

$$\sum_{k=1}^{N-1}s_k=\cot\frac{\pi}{2N}$$

$$2\sum_{k=1}^{N-1}s_k^2=N$$

この2式の比

$$\frac{\sum_{k=1}^{N-1}s_k}{2\sum_{k=1}^{N-1}s_k^2}=\frac{1}{N}\cot\frac{\pi}{2N}=c \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(21)$$

とおこう．§3 でみちびいた式 (13) は

$$L_1=s_1^2c$$

これを (12) に入れ

$$L_k=\frac{s_k^2}{s_1^2}(s_1^2c)=s_k^2c$$

さらに (10) から

$$R_k=s_k-L_k=s_k-s_k^2c$$

まとめて

$$\left.\begin{aligned}L_k&=s_k^2c\\R_k&=s_k-s_k^2c\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22)$$

$$(k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

念のため，関係 (8) をためしてみよう．

$$\sum_{k=1}^{N-1}L_k=c\sum_{k=1}^{N-1}s_k^2$$

これは，(21) から

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}s_k$$

そこで

$$\sum_{k=1}^{N-1}R_k=\sum_{k=1}^{N-1}s_k-c\sum_{k=1}^{N-1}s_k^2$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}s_k$$

したがって，たしかに

$$\sum_{k=1}^{N-1}L_k=\sum_{k=1}^{N-1}R_k$$

さて，上の (22) の L や R を，(4) でおきもどそう．

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N-1}Q_{kj}&=s_k^2c\\\sum_{i=1}^{N-1}Q_{ik}&=s_k-s_k^2c\end{aligned}\right\} \quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(23)$$

$$(k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

この連立式からみちびかれる，いまの関係

$$\sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{j=1}^{N-1}Q_{kj}\right)=\sum_{k=1}^{N-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}Q_{ik}\right)$$

は，こんどは恒等式になる．ということは，1式の余分を意味し，どれか1式をのぞいたものと，同値になる．実質的な式数は，まえの (7) で示した通り

$$2(N-1)-1$$

これで，主題の方程式 (2)

$$\sum_{i=1}^{N-1}P_{in}s_i+\frac{s_n}{s_m}\sum_{j=1}^{N-1}P_{mj}s_j=1$$

$$(n,\ m=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

の解析は，一段落ついた．上の解 (23) を，(3)

$$P_{ij}\cdot s_is_j=Q_{ij}$$

で，QからPにおきもどせば，終結する．

§6. 対称条件の導入

さて，ここで，対称条件

$$\left.\begin{aligned}P_{ik}&=P_{i\ N-k}\\P_{kj}&=P_{N-k\ j}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

を導入する．以下これを仮定して，解析をつづけよう．もともと

$$s_k=\sin\frac{k\pi}{N}=\sin\left(\pi-\frac{k\pi}{N}\right)=\sin\frac{N-k}{N}\pi$$

$$=s_{N-k}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

だから，Qに直しても

$$Q_{ik}=P_{ik}\,s_i\,s_k=P_{i\ N-k}\,s_i\,s_{N-k}=Q_{i\ N-k}$$

などとなって

$$\left.\begin{aligned}Q_{ik}&=Q_{i\ N-k}\\Q_{kj}&=Q_{N-k\ j}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(26)$$

逆にこれから，(24)がみちびかれる．以下では，この形で考えよう．

kを使わず，iとjに関して

$$\left.\begin{aligned}Q_{ij}&=Q_{i\ N-j}\\Q_{ij}&=Q_{N-i\ j}\end{aligned}\right\}$$

と書いてもよい．ここで

$$i,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ N-1$$

とすると，条件式が

$$(N-1)^2$$

出るけれども，当然に重複する．(26) の形にもどって

$$k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1$$

としてみれば，

$$Q_{i1}=Q_{i\ N-1},\ \cdots\cdots,\ Q_{i\ N-1}=Q_{i1}$$

などとなって，最初と最後，一つ先と一つ手前，……がおなじ式になる．だから

$$k<N-k$$

にかぎってよい．kを使わずに書けば

$$\left.\begin{aligned}&Q_{ij}=Q_{i\ N-j}\\&\qquad(j<N-j,\ i=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)\\&Q_{ij}=Q_{N-i\ j}\\&\qquad(i<N-i,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)\end{aligned}\right\}$$

しかし，まだ重複がある．上の式で

$$i\ \text{を}\ N-i$$

にすると

$$Q_{N-i\ j}=Q_{N-i\ N-j}$$

そこで，もとの式とくらべて

$$Q_{ij}=Q_{N-i\ j}\ \ \text{ならば}\ \ Q_{i\ N-j}=Q_{N-i\ N-j}$$

つまり，下の式の関係は

j でなりたてば，$N-j$ でなりたつ．

だから下の式は，こんどは等号つきの

$$j\leq N-j$$

にかぎってよい．そこで

$$\left.\begin{aligned}&Q_{ij}=Q_{i\ N-j}\\&\qquad(2j<N,\ i=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)\\&Q_{ij}=Q_{N-i\ j}\\&\qquad(2i<N,\ 2j\leq N)\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots(27)$$

条件式をかぞえるため，Nの偶奇をわけよう．

$$N=\begin{cases}2M\\2M+1\end{cases}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(28)$$

まず，Nが奇数のとき

$$2M=N-1$$

このとき

$$2k<N\ \ \text{ないし}\ \ 2k\leq N$$

というのは

$$k=1,\ \cdots\cdots,\ M$$

ということで，(27) の式数は

$$M(N-1)+M^2=2M^2+M^2=3M^2$$

つぎに，Nが偶数のとき

$$2M=N$$

こんどは

$$2k<N\ \ \text{は}\ \ k=1,\ \cdots\cdots,\ M-1$$

$$2k\leq N\ \ \text{は}\ \ k=1,\ \cdots\cdots,\ M$$

そこで (27) の式数は

$$(M-1)(N-1)+(M-1)M$$

$$=(M-1)(3M-1)$$

あるいは，展開して

$$=3M^2-4M+1=(2M-1)^2-M^2$$

$$=(N-1)^2-M^2$$

Nが奇数のときも，この式数

$$3M^2=4M^2-M^2=(N-1)^2-M^2$$

ここで，もともと

$$(N-1)^2$$

は，変数 Q_{ij} の数だったから，(27) の

対称条件数＝変数の数－M^2

書きかえて

変数の数－対称条件数＝M^2

これだけ個数が，対称条件後に，変数として残される．

具体的には，たとえば

$$Q_{ij}\quad(i,\ j=1,\ \cdots\cdots,\ M) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(29)$$

を採ればよろしい．

この M^2 個の変数に関して，主題の方程式 (2)，というより，それを解いた (23) を検討してみよう．変数が減ったかわりに，条件式のほうも重複ができて，実質上の数が減る．そのかねあいを，問題とする．

§7. 対称条件下での判定

改めて，(23) を転記すれば

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{N-1}Q_{kj}=s_k^2c\\&\sum_{i=1}^{N-1}Q_{ik}=s_k-s_k^2c\end{aligned}\right\}$$

$$(k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

ただし，1式は余分．

これに，対称条件を適用する．まず，もともと (25)

$$s_k=s_{N-k}$$

の関係があるから，(26)

$$\left.\begin{aligned}&Q_{kj}=Q_{N-k\ j}\\&Q_{ik}=Q_{i\ N-k}\end{aligned}\right\}$$

を仮定すると，方程式が

k でなりたてば，$N-k$ でなりたつ．

だから，方程式を

$$k\leq N-k \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(30)$$

にかぎってよい．

ここでも，1式が余分になる．なぜなら，(30) の範囲の方程式から，(23) の全体がみちびけて，それが1式の余分をふくむから．恒等式をみちびくから．

ところで，(30) をみたす k というのは，いまやったように，N の偶奇をわけて (28) とすると

$N=2M+1$ のとき　$k=1,\ \cdots\cdots,\ M$

　　$2M$ のときも　$k=1,\ \cdots\cdots,\ M$

つまり一般的に

$$k=1,\ \cdots\cdots,\ M \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(31)$$

そこで，余分の1式をひけば，式の数は

$$2M-1$$

変数のほうは，(29) にあげたようになり

$$\left.\begin{aligned}&\text{変数の数}\quad M^2\\&\text{等式の数}\quad 2M-1\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(32)$$

その差は

$$M^2-2M+1=(M-1)^2$$

だから

判定 2.　$M>1$　なら，式数が不足

で，変数はきめられない．N に直すと

$$N>3$$

§2末尾とくらべ，限界を1だけ後退させたことになる．

さて，方程式の書きかえを，実行しておこう．まず，

$$N-1=2M$$

の場合．このときは，対称条件

$$Q_{ij}=Q_{i\ N-j}$$

から

$$\begin{aligned}&Q_{i1}+\cdots+Q_{i\ N-1}\\&=(Q_{i1}+\cdots+Q_{iM})+(Q_{i\ M+1}+\cdots+Q_{i\ N-1})\\&=(Q_{i1}+\cdots+Q_{iM})+(Q_{iM}+\cdots+Q_{i1})\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}Q_{ij}=2\sum_{j=1}^{M}Q_{ij}$$

i を k として

$$\sum_{j=1}^{N-1}Q_{kj}=2\sum_{j=1}^{M}Q_{kj}$$

おなじようにして

$$\sum_{i=1}^{N-1}Q_{ik}=2\sum_{i=1}^{M}Q_{ik}$$

だから方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{M}Q_{kj}=\frac{1}{2}s_k^2c\\&\sum_{i=1}^{M}Q_{ik}=\frac{1}{2}(s_k-s_k^2c)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(33)$$

$$(k=1,\ \cdots\cdots,\ M.\ \ 1\text{式余分})$$

つぎに

$$N=2M$$

のときは

$$\begin{aligned}&Q_{i1}+\cdots+Q_{i\ N-1}\\&=(Q_{i1}+\cdots+Q_{i\ M-1})+Q_{iM}+(Q_{i\ M+1}+\cdots+Q_{i\ N-1})\\&=(Q_{i1}+\cdots+Q_{i\ M-1})+Q_{iM}+(Q_{i\ M-1}+\cdots+Q_{i1})\end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}Q_{ij}=2\sum_{j=1}^{M-1}Q_{ij}+Q_{iM}$$

のようになって，方程式は

$$\left.\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{M-1}Q_{kj}+\frac{Q_{kM}}{2}=\frac{1}{2}s_k^2c\\&\sum_{i=1}^{M-1}Q_{ik}+\frac{Q_{Mk}}{2}=\frac{1}{2}(s_k-s_k^2c)\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(34)$$

$$(k=1,\ \cdots\cdots,\ M.\ \ 1\text{式余分})$$

これで，片づいた．一般には式数不足だから，ここで停止となる．不足分だけの助変数を，どうえらぶか．そのような問題は残るけれども，ここでは考えない．ただし，すこし吟味しておきたい点がある．

§8. 転置対称性の問題

格子梁——ないし一般に，行列的配置に関して，対称条件というとき，いま扱った

$P_{ij}=P_{i\ N-j}$ （左右対称）

$P_{ij}=P_{N-i\ j}$ （上下対称）

とはまたちがう，

$P_{ij}=P_{ji}$ 　（転置対称） ……………………(35)

が，考えられる．行列論で対称といえば，これを指す．

しかし，主題の方程式の場合，これを課することは，一般にはゆるされない．そのことを，つぎに示そう．

——実は，方程式をみちびくのに

縦の梁・横の梁

の役割が，ちがえて考えられている．しかし本文では，そのような力学的考察には，ふれられない．

対称条件 (24) 以前の，(23) に，たちもどろう．

$$\left.\begin{aligned}\sum_{j=1}^{N-1}Q_{kj}&=s_k^2c\\ \sum_{i=1}^{N-1}Q_{ik}&=s_k-s_k^2c\end{aligned}\right\}$$

和は，l についてとすれば

$$\left.\begin{aligned}\sum_{l=1}^{N-1}Q_{kl}&=s_k^2c\\ \sum_{l=1}^{N-1}Q_{lk}&=s_k-s_k^2c\end{aligned}\right\}$$

$$(k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

おなじ k について，差をとれば

$$\sum_{l=1}^{N-1}(Q_{kl}-Q_{lk})=2s_k^2c-s_k$$

第2式は，これでおきかえてよい．改めて書けば

$$\left.\begin{aligned}\sum_{l}^{N-1}Q_{kl}&=s_k^2c\\ \sum_{l}^{N-1}(Q_{kl}-Q_{lk})&=2s_k^2c-s_k\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots(36)$$

$$(k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

さて，もともと (3)

$P_{ij}\cdot s_is_j=Q_{ij}$

の関係にあるから，問題の対称条件 (35) は

$Q_{ij}=Q_{ji}$ ……………………(37)

と同等になる．そうすると，上記 (36) で

$Q_{kl}-Q_{lk}=0$

したがって，連立式が解をもつためには

$2s_k^2c-s_k=0$

ここで (1)

$$s_k=\sin\frac{k\pi}{N}$$

$$\neq 0\quad(k=1,\ \cdots\cdots,\ N-1)$$

そこで

$$s_k=\frac{1}{2c}$$

k にかかわらず，そうだ，というのだから

$s_1=\cdots\cdots=s_{N-1}$

$$\sin\frac{\pi}{N}=\cdots\cdots=\sin\frac{N-1}{N}\pi$$

これは，sin の性質からいって

$N=2,\ 3$

にかぎられる．

注意　$N>3$ なら，転置対称になれない．

かんたんなことだけれども，誤解なきように．

§9. 確定または1助変数の場合

不可能の証明としては，これで，もう充分だけれど，なお，解ける場合や，助変数1個ですむ場合について，つけ加えておきたい．

$N=2$　方程式は，(23) から

$$\left.\begin{aligned}Q_{11}&=s_1^2c\\ Q_{11}&=s_1-s_1^2c\end{aligned}\right\}$$

1式余分だから，第1式だけでよい．ここで

$$s_1=\sin\frac{\pi}{N}=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

は，まえの (21) から

c　$$c=\frac{1}{N}\cot\frac{\pi}{2N}=\frac{1}{2}\cot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}$$

だから

$$Q_{11}=\frac{1}{2}$$

これを (3) で，P におきもどそう．

$Q_{11}=P_{11}\cdot s_1^2=P_{11}$

$$P_{11}=\frac{1}{2}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(38)$$

$N=3$　$N-1=2M,\ M=1.$

対称条件 (27) を仮定する．

$Q_{11}=Q_{12},\ Q_{21}=Q_{22},$

$Q_{11}=Q_{21}$

だから実は

$$Q_{11}=Q_{12}=Q_{21}=Q_{22}$$

方程式は，(33) から

$$\left.\begin{aligned} Q_{11}&=\frac{1}{2}s_1^2c \\ Q_{11}&=\frac{1}{2}(s_1-s_1^2c) \end{aligned}\right\}$$

1式余分だから，第1式だけでよい．ここで

$$s_1=\sin\frac{\pi}{N}=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$c=\frac{1}{N}\cot\frac{\pi}{2N}=\frac{1}{3}\cot\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$

だから

$$Q_{11}=\frac{1}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

$$Q_{ij}=\frac{\sqrt{3}}{8}$$

これを (3) で，Pにおきもどそう．

$$Q_{ij}=P_{ij}\cdot s_is_j$$

いまの場合

$$s_1=s_2=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって

$$P_{ij}=\frac{4}{3}Q_{ij}=\frac{\sqrt{3}}{6} \qquad \cdots\cdots(39)$$

これは，むしろ直接に

$$P_{ij}\cdot s_1^2=Q_{11}=\frac{1}{2}s_1^2c$$

から，求めたほうがよかった．

$N=4$　　$N=2M$，$M=2$．

対称条件 (27) を仮定する．

$$Q_{11}=Q_{13},\quad Q_{21}=Q_{23},\quad Q_{31}=Q_{33}$$

$$Q_{11}=Q_{31},\quad Q_{12}=Q_{32}$$

これを整理すれば

$$Q_{11}=Q_{13}=Q_{31}=Q_{33}$$

$$Q_{21}=Q_{23}$$

$$Q_{12}=Q_{32}$$

なお4番目の変数

$$Q_{22}$$

がある．方程式は，(34) から

$$\left.\begin{aligned} Q_{k1}+\frac{Q_{k2}}{2}&=\frac{1}{2}s_k^2c \\ Q_{1k}+\frac{Q_{2k}}{2}&=\frac{1}{2}(s_k-s_k^2c) \end{aligned}\right\}$$

$$(k=1,\ 2)$$

これを (36) の形に整理する．2式の差をとり

$$(Q_{k1}-Q_{1k})+\frac{Q_{k2}-Q_{2k}}{2}=s_k^2c-\frac{s_k}{2}$$

第2式を，これでおきかえる．改めて書けば

$$Q_{11}+\frac{Q_{12}}{2}=\frac{1}{2}s_1^2c$$

$$Q_{21}+\frac{Q_{22}}{2}=\frac{1}{2}s_2^2c$$

$$\frac{Q_{12}-Q_{21}}{2}=s_1^2c-\frac{s_1}{2}$$

$$Q_{21}-Q_{12}=s_2^2c-\frac{s_2}{2}$$

この第3，4式は同等だから，第4式はすてる．ここで

$$s_1=\sin\frac{\pi}{N}=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$s_2=\sin\frac{2\pi}{N}=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$c=\frac{1}{N}\cot\frac{\pi}{2N}=\frac{1}{4}\cot\frac{\pi}{8}$$

こうなると，cot は，かえってめんどうになる．これは (20)にもどって

$$\cot\frac{\pi}{2N}=\sum_{k=1}^{N-1}\sin\frac{k\pi}{N}$$

$$=s_1+s_2+s_3=2s_1+s_2=1+\sqrt{2}$$

$$c=\frac{1+\sqrt{2}}{4}$$

方程式中のQをPにおきもどすと

$$P_{11}s_1^2+P_{12}\frac{s_1s_2}{2}=\frac{s_1^2}{2}c$$

$$P_{21}s_2s_1+P_{22}\frac{s_2^2}{2}=\frac{s_2^2}{2}c$$

$$\frac{P_{12}-P_{21}}{2}s_1s_2=s_1^2c-\frac{s_1}{2}$$

変形して

$$P_{11}=\frac{c}{2}-\frac{s_2}{2s_1}P_{12}$$

$$P_{22}=c-\frac{2s_1}{s_2}P_{21}$$

$$P_{12}-P_{21}=\frac{2s_1}{s_2}c-\frac{1}{s_2}$$

これに s_k，cの値を代入すれば

$$P_{11}=\frac{1+\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}P_{12}$$

$$P_{22}=\frac{1+\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}P_{21}$$

$$P_{12}-P_{21}=\frac{\sqrt{2}+2}{4}-1=\frac{\sqrt{2}-2}{4}$$

そこで，たとえば P_{12} を助変数として

$$\left.\begin{aligned} P_{11}=P_{13}=P_{31}=P_{33}&=\frac{1+\sqrt{2}}{8}-\frac{\sqrt{2}}{2}P_{12} \\ P_{21}=P_{23}&=\frac{2-\sqrt{2}}{4}+P_{12} \\ P_{12}&=P_{32} \\ P_{22}&=\frac{3-\sqrt{2}}{4}-\sqrt{2}P_{12} \end{aligned}\right\}\cdots(40)$$

§ 10. 続き——$N=5$

助変数1個ですむ場合が，もうひとつ残っている．

$N=5$　　$N-1=2M,\ M=2.$

対称条件 (27) は，12式あって

$$\left.\begin{aligned} Q_{i1}&=Q_{i4}\\ Q_{i2}&=Q_{i3}\end{aligned}\right\}\quad (i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$$

$$\left.\begin{aligned} Q_{1j}&=Q_{4j}\\ Q_{2j}&=Q_{3j}\end{aligned}\right\}\quad (j=1,\ 2)$$

これを整理すると

$$Q_{11}=Q_{14}=Q_{41}=Q_{44}$$
$$Q_{21}=Q_{24}=Q_{31}=Q_{34}$$
$$Q_{12}=Q_{13}=Q_{42}=Q_{43}$$
$$Q_{22}=Q_{23}=Q_{32}=Q_{33}$$

方程式は，(33) から

$$\left.\begin{aligned} Q_{k1}+Q_{k2}&=\frac{1}{2}s_k^2c\\ Q_{1k}+Q_{2k}&=\frac{1}{2}(s_k-s_k^2c)\end{aligned}\right\}$$

$$(k=1,\ 2)$$

これを (36) の形に整理する．2式の差をとって，第2式とおきかえる．この差の式の一方は余分となり

$$Q_{11}+Q_{12}=\frac{1}{2}s_1^2c$$

$$Q_{21}+Q_{22}=\frac{1}{2}s_2^2c$$

$$Q_{12}-Q_{21}=s_1^2c-\frac{s_1}{2}$$

Pにおきもどして，変形すれば

$$\left.\begin{aligned} P_{11}&=\frac{c}{2}-\frac{s_2}{s_1}P_{12}\\ P_{22}&=\frac{c}{2}-\frac{s_1}{s_2}P_{21}\\ P_{12}-P_{21}&=\frac{s_1}{s_2}c-\frac{1}{2s_2}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(41)$$

さて，ここで

$$s_1=\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(42)$$

このことから

$$s_2=\sin\frac{2\pi}{5}=\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(43)$$

念のため，要点だけ書けば

$$\cos^2\frac{\pi}{5}=1-\frac{10-2\sqrt{5}}{16}=\frac{6+2\sqrt{5}}{16}$$

$$2\sin\frac{\pi}{5}\cos\frac{\pi}{5}=\frac{2\sqrt{2^2(5-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})}}{4\times 4}$$

つぎにcは

$$c=\frac{1}{N}\cot\frac{\pi}{2N}=\frac{1}{5}\sum_{k=1}^{4}\sin\frac{k\pi}{5}$$
$$=\frac{2}{5}(s_1+s_2)$$

ここで，すこしく工夫する．

$$s_1s_2=\frac{\sqrt{(10-2\sqrt{5})(10+2\sqrt{5})}}{4\times 4}=\frac{\sqrt{80}}{4^2}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$s_1^2+s_2^2=\frac{(10-2\sqrt{5})+(10+2\sqrt{5})}{16}=\frac{5}{4}$$

そこで

$$(s_1+s_2)^2=(s_1^2+s_2^2)+2s_1s_2=\frac{5+2\sqrt{5}}{4}$$

$$s_1+s_2=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{2}\quad(\because\ \ >0)$$

これから，c がまとまった形でもとめられる．

$$c=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{5}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(44)$$

もうすこし，計算をしておこう．

$$\frac{s_1}{s_2}=\sqrt{\frac{10-2\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}}=\sqrt{\frac{(10-2\sqrt{5})^2}{(10+2\sqrt{5})(10-2\sqrt{5})}}$$
$$=\frac{10-2\sqrt{5}}{\sqrt{80}}=\frac{2(\sqrt{5})^2-2\sqrt{5}}{4\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

$$\frac{s_2}{s_1}=\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{10-2\sqrt{5}}}=\frac{10+2\sqrt{5}}{\sqrt{80}}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

そこで，(41) の第1，2式は

$$\left.\begin{aligned} P_{11}&=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{10}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}P_{12}\\ P_{22}&=\frac{\sqrt{5+2\sqrt{5}}}{10}-\frac{\sqrt{5}-1}{2}P_{21}\end{aligned}\right\}\quad\cdots\cdots\cdots\cdots(45)$$

第3式は，符号を変え，引き方を反対にして

$$P_{21}-P_{12}=A_1-A_2$$

ここで

$$A_1=\frac{1}{2s_2}=\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}=\frac{2\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4\sqrt{5}}$$
$$=\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}}{10}$$

$$A_2=\frac{s_1}{s_2}c=\frac{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5+2\sqrt{5}})}{10}$$

この分子$=\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2(5+2\sqrt{5})}$

$$=\sqrt{(6-2\sqrt{5})(5+2\sqrt{5})}=\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

そこで

$$A_1-A_2=\frac{\sqrt{50-10\sqrt{5}}-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{10}$$

さらに，この分子をAとすると

$$A^2=(60-8\sqrt{5})-2\sqrt{10(5-\sqrt{5})2(5+\sqrt{5})}$$
$$=60-8\sqrt{5}-2\cdot 20=4(5-2\sqrt{5})$$
$$A=\pm 2\sqrt{5-2\sqrt{5}}$$

ここで複号は，＋が適し，けっきょく

$$P_{21}-P_{12}=\frac{\sqrt{5-2\sqrt{5}}}{5} \quad \cdots\cdots (46)$$

これで，できた．

ついでに，(45) (46) を，小数係数に直しておこう．

$$\sqrt{5}\fallingdotseq 2.236$$

から，まず

$$\frac{\sqrt{5}\pm 1}{2}\fallingdotseq\begin{cases}1.618\\0.618\end{cases}$$

これは，黄金分割で知られている．つぎに

$$5\pm 2\sqrt{5}\fallingdotseq\begin{cases}9.472\\0.528\end{cases}$$

の開平計算から

$$\sqrt{5\pm 2\sqrt{5}}\fallingdotseq\begin{cases}3.078\\0.727\end{cases}$$

そこで

$$\left.\begin{aligned}&P_{11}\fallingdotseq 0.3078-1.618\ P_{12}\\&P_{22}\fallingdotseq 0.3078-0.618\ P_{21}\\&P_{21}-P_{12}\fallingdotseq 0.1454\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (47)$$

本文の最後で，これを引用する．

§11. 格子梁の有理的解法

さて，格子梁に関しては，種々の研究があり，算式も種々にわかれる．本文で主題とした方程式は，その一種に相当する．ここで，別の方程式を紹介しよう．

$$N=5$$

の場合として

$$\left.\begin{aligned}&22P_{11}+17P_{12}+17P_{21} &&=29B^*\\&17P_{11}+39P_{12} \qquad +17P_{22}&&=29B^*\\&17P_{11} \qquad +39P_{21}+17P_{22}&&=46.5B^*\\&\qquad 17P_{12}+17P_{21}+56P_{22}&&=46.5B^*\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots (48)$$

ただしここで

$$B^*=\frac{pa}{5} \quad \cdots\cdots (49)$$

しかし，かんたんのため，以下では

$$B^*=1 \quad \cdots\cdots (50)$$

として，解いてみよう．未知数

$$P_{11}=x,\ P_{12}=y,\ P_{21}=z,\ P_{22}=w$$

とおく．方程式は

$$22x+17y+17z \qquad =29 \quad \cdots\cdots ①$$
$$17x+39y \qquad +17w=29 \quad \cdots\cdots ②$$
$$17x \qquad +39z+17w=\frac{93}{2} \quad \cdots\cdots ③$$
$$17y+17z+56w=\frac{93}{2} \quad \cdots\cdots ④$$

まず，係数17の項を消去する．

③－②　$39z-39y=\frac{93-58}{2}=\frac{35}{2}$

④－①　$56w-22x=\frac{35}{2}$

これらを，それぞれ z，w について解けば

$$z=y+\frac{35}{2\cdot 3\cdot 13} \quad \cdots\cdots ⑤$$
$$w=\frac{11}{28}x+\frac{5}{2\cdot 8} \quad \cdots\cdots ⑥$$

それぞれ①，②へ代入して

$$22x+2\cdot 17y=29-\frac{17\cdot 35}{6\cdot 13}$$
$$17\left(1+\frac{11}{28}\right)x+39y=29-\frac{17\cdot 5}{16}$$

つまり

$$11x+17y=\frac{29}{2}-\frac{17\cdot 5\cdot 7}{12\cdot 13} \quad \cdots\cdots ⑦$$
$$\frac{17}{28}x+y=\frac{29}{39}-\frac{17\cdot 5}{16\cdot 3\cdot 13} \quad \cdots\cdots ⑧$$

そこで，y を消去すれば

$$\left(11-\frac{17^2}{28}\right)x=29\left(\frac{1}{2}-\frac{17}{39}\right)-\frac{17\cdot 5}{12\cdot 13}\left(7-\frac{17}{4}\right)$$
$$右辺=\frac{29\cdot 5}{6\cdot 13}-\frac{17\cdot 5\cdot 11}{12\cdot 13\cdot 4}=\frac{5(29\cdot 8-17\cdot 11)}{6\cdot 13\cdot 8}$$
$$29\cdot 8-17\cdot 11=232-187=45=3^2\cdot 5$$
$$28\cdot 11-17^2=308-289=19$$

したがって

$$x=\frac{28}{19}\ \frac{3\cdot 5^2}{13\cdot 16}=\frac{3\cdot 5^2\cdot 7}{4\cdot 13\cdot 19}$$

これを⑧へ代入する．

$$y=\frac{29}{3\cdot 13}-\frac{5\cdot 17}{16\cdot 3\cdot 13}-\frac{3\cdot 5^2\cdot 17}{4^2\cdot 13\cdot 19}$$
$$右辺2項以下=\frac{5\cdot 17}{16\cdot 13}\left(\frac{1}{3}+\frac{15}{19}\right)=\frac{4\cdot 5\cdot 17}{3\cdot 13\cdot 19}$$
$$29\cdot 19-20\cdot 17=551-340=211$$
$$y=\frac{211}{3\cdot 13\cdot 19}$$

さらに⑤へ代入して

$$z=\frac{211\cdot 2+35\cdot 19}{6\cdot 13\cdot 19}=\frac{1087}{6\cdot 13\cdot 19}$$

また w は，⑥から

$$w=\frac{3\cdot 5^2\cdot 11}{4^2\cdot 13\cdot 19}+\frac{5}{4^2}=\frac{5(15\cdot 11+13\cdot 19)}{4^2\cdot 13\cdot 19}$$

$$15\cdot 11+13\cdot 19=165+247=412=4\cdot 103$$

$$w=\frac{5\cdot 103}{4\cdot 13\cdot 19}$$

これで，解けた．結果をまとめておこう．P_{ij} におきもどし，素因数分解形と，小数値とを併記する．

$$\left.\begin{aligned}
P_{11}&=\frac{3\cdot 5^2\cdot 7}{4\cdot 13\cdot 19}=\frac{525}{988}\fallingdotseq 0.53138\\
P_{12}&=\frac{211}{3\cdot 13\cdot 19}=\frac{211}{741}\fallingdotseq 0.28475\\
P_{21}&=\frac{1087}{6\cdot 13\cdot 19}=\frac{1087}{1482}\fallingdotseq 0.73347\\
P_{22}&=\frac{5\cdot 103}{4\cdot 13\cdot 19}=\frac{515}{988}\fallingdotseq 0.52126
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(51)$$

§12. 有理解による検算

さて，解がでてきたからには，検算をしてみたい．ただし，主題の方程式に対していう．

$$N=5$$

の場合の関係式 (47) に，いまの解 (51) を代入する．するのだけれども，その前に注意すべきことがある．

そもそものはじめ，§1 で

$$B=1 \qquad つまり \qquad 2pa=\pi$$

としておいた．

$$pa=\frac{\pi}{2}$$

これを，さっきの (49) に入れると

$$B^*=\frac{\pi}{10}$$

ところが，さっきは

$$B^*=1$$

として解いた．そこに，くいちがいがある．

どれだけちがうかというと，方程式 (48) の形から，右辺に B^* がついていれば，解も B^* 倍になる．そこで

$$P_{11}\fallingdotseq 0.53138B^*$$

などとして，代入すればよい．(47) を

$$\left.\begin{aligned}P_{11}+1.618P_{12}\\ P_{22}+0.618P_{21}\end{aligned}\right\}\fallingdotseq 0.3078$$

$$P_{21}-P_{12}\fallingdotseq 0.1454$$

の形にしておこう．この左辺に，代入する．

$$P_{11}\fallingdotseq 0.53138B^*$$
$$P_{12}\fallingdotseq 0.28475B^*$$
$$P_{21}\fallingdotseq 0.73347B^*$$
$$P_{22}\fallingdotseq 0.52126B^*$$
$$B^*\fallingdotseq 0.31416$$

まず

$$P_{21}-P_{12}\fallingdotseq 0.44872B^*\fallingdotseq 0.14097$$

つぎに

$$P_{11}+1.618P_{12}\fallingdotseq 0.9921B^*\fallingdotseq 0.3117$$
$$P_{22}+0.618P_{21}\fallingdotseq 0.9745B^*\fallingdotseq 0.3061$$

まとめて

左辺	右辺	差	相対誤差
0.3117	0.3078	+0.0039	1.3%
0.3061	0.3078	−0.0017	0.5%
0.1410	0.1454	−0.0044	3.0%

よく一致している，といわなければならない．主題の方程式の係数は 3 角関数で，定数項 B は π をふくんでいる．それに対して，さきほどのは有理数係数だったから，式として，まるでちがっている．その解がこの程度に合うとすれば，見事といってもよい．

なお，主題の方程式は，

フーリエ展開の第 1 項

を採った近似式で，数%の誤差はあるという．