U.D.C. 72.011.1

清水建設研究所報
第2号昭和38年4月

間取り——長方形分割の記号論 (2)

清水 達雄

目 次:

1. 幾何学的分析と構成 } 第1号既載
2. 分離型の記号法 } (P.109〜148)
3. 一般の場合 (未完)
§ 14. 2辺接着の導入
§ 15. はめこみの還元
§ 16. 累次のはめこみ
§ 17. 周辺分点数, 特定接着子
§ 18. 1行書き記号法
§ 19. 左上からの復原
§ 20. 記号法の修正, 2行書き
追記 長方形分割図の記号列からの自動図示

3. 一般の場合

§ 14. 2辺接着の導入

さて, ここで理論は, 第2の段階にさしかかる. これまでのべたところでは, 記号法は, 分離型の範囲にかぎられていた. その限界をやぶり, 一般の場合におよぼすには, 新しい概念, 新しい手法がいる.

かえりみるに, はじめの, 幾何学的分析の(2)で,

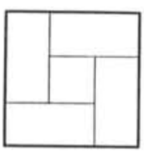
純非分離型=局大部分図の和

ということを, 確かめた. そしてこの局大部分図を追い出したあとに, 単純型がのこされた.

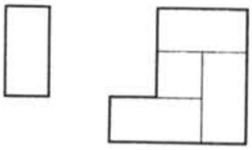
純非分離型=単純型へ代入をおこなったもの

この代入のほうは, 接着子の概念を一般化することによって, 一応記号化ができる. しかし, 単純型なるものはどうか. そのいろいろに対し, マンジ型など, いろいろの, いわば固有名詞を与えていったのでは, 記号法と名のることは, ゆるされない.

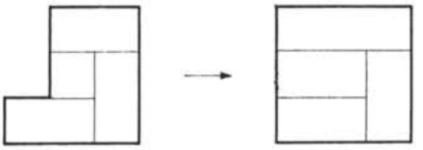
単純型までふくめての, 記号化. 単純型をなお, 分析してしまう. そういう方法を考えよう. マンジ型を, 例にとる. ただし, 横書きの立場から, はじめにかかげた分割図を転置して考える.



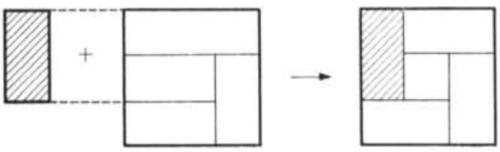
これは, これ以上, 分析をゆるさないかにみえる. しかし, その分析できないというのは, 「長方形」部分図がとりだせないことを, 意味している. 長方形という制限をつけなければ, 部分なるものは, もちろんある. たとえば, **左上隅**の長方形を一つ, とりはずしてみよう. このとき, **かぎの手**の部分が, のこされる.



ところでこの, かぎの手の図形は, 長方形に直される. 部分長方形4個の配置関係はそのままに, 「へこみをなくして」長方形に直される.

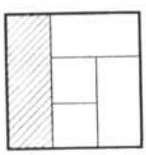


逆に，この長方形分割図の，左上隅に，長方形1個を，「はめこんで」，マンジ型がつくられる．

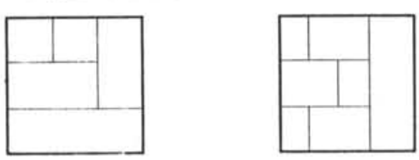


まとめていえば，(1)左上隅の長方形をとりさり，のこった「かぎの手」を長方形と見直すこと，およびその逆(2)長方形の左上隅に，長方形をはめこむこと．

この変形方法の導入によって，理論は新しい局面に入る．まず，この方法は，充分に強力といえる．どんな分割図でも，その左上隅から，長方形を一つずつ，とりのぞいてゆくことによって，完全に分解されるから．ただしここで，左上隅というのが特別な場合として，左側はじの部分になったりすることをゆるすものとする．たとえば



ところで，この方法を，無制限に適用するのは，得策でない．分離型の分割図，たとえば



こういうのに，左上隅からのとりさりを適用してゆくのは，もどかしいばかりで，本質があらわれない．

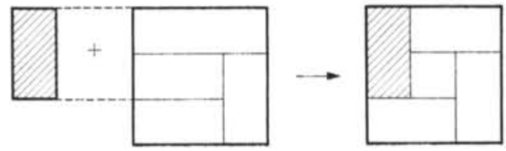
左上隅のとりさり・はめこみは，最後の手段として，伝家の宝刀的に，めったに使うべきではない．まえに考えてきた，ふつうの分解法がゆきづまったところで，すなわち純非分離型に対してだけ，ゆるすことにする．

それから

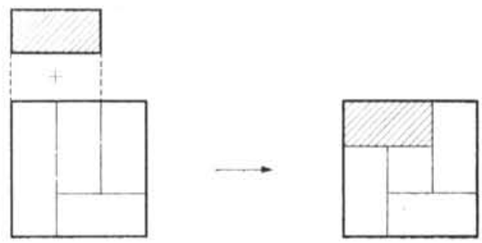
純非分離型＝局大部分図の和

この観点は，やはり尊重してゆこう．純非分離型からとりさるべき，左上隅というのを，左上隅の局大部分図としてみよう．長方形を一つ一つはずすのでなくて，局大部分図は，まとめてとりはずす．そういう方針をとる．それが分割図の本質にかなうもの，と判断する．

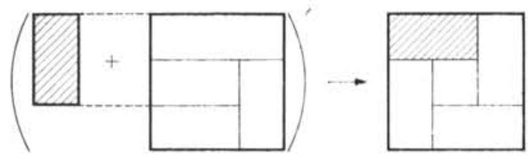
もうひとつ，注意がいる．それは，左上隅をとりさるとき，いや，はめこむときの方向に関している．つまり



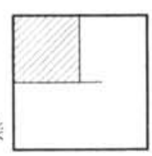
はよいけれども，



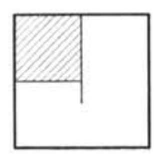
こういう，縦の和は，例の通り，横の和の転置として，とらえることにする．



この二つの場合の区別，直接のはめこみか，転置をなかだちとしてのはめこみかは，左上隅の部分の，右下のところで，判別がされる．つまり



直接



転置

標語的にいえば，左上隅の部分の右下が

　⊥　ならば，直接

　⊣　ならば，転置をなかだちとして

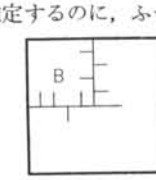
そこで，つぎのように定義する．

定義1　純非分離型の分割図Aの，左上隅の局大部分図Bの，右下が⊥のとき，AからBをとりさったのこりの「かぎの手」を長方形と見直したものをCとして

$$A \approx B \oplus C$$

とかく．略して，BをCへ**はめこんだ**図，などという．

この場合にも，右辺のBとCだけからは，Aは一義に定まらない．はめこみの状況を確定するのに，ふつうの＋のときとおなじく，接着の指定を必要とする．しかもこんどは，接着の関係が，2辺で発生する．



左上隅の部分Bの

　　右辺でおこる，**左右接着**

　　下辺でおこる，**上下接着**

この二つを指定しなければならない．そして，それを指定すれば，はめこんだ図Aが確定する．

ここで，左右接着のほうは，従来の記号法を，そのまま適用すればよい．上の図で，Bの右辺を上から下へ

　　⊣⊢⊣⊢

これにならって，上下接着を，Bの下辺を左から右へ

　　⊥⊥⊤⊥

とあらわすことにしよう．このような，左右・上下接着の記号を使えば，はめこみによる分割図が確定する．

$$A=B\oplus C$$

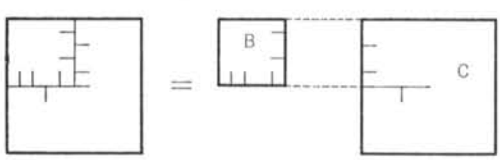
　　ただし，$\oplus$：⊣⊢⊣⊢，⊥⊥⊤⊥

この左右・上下の接着子をあわせたものを，２辺接着子とよぶ．その基礎的な性質として，まず

　　左右接着子の⊣記号数＝Bの右辺分点数

　　上下接着子の⊥記号数＝Bの下辺分点数

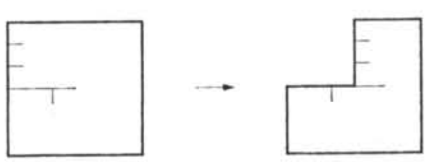
このように，⊣および⊥記号数のほうは，はめこむ小分割図Bによって，はめこみ以前に，定まっている．しかし，⊢および⊤記号数のほうは，はめこみの母体の側，大分割図Cに，関係はするけれども，このCだけからは定まらない．それは，はめこみ様式そのものに，結びついている．



つまり，Cの左辺分点，何個かのうち，上からp個，図では２個が，Bとの接着に参加する．そうして，その

　　$2+1=3$，　一般には　$p+1$

番目のところの分割線にそって，Bが引きこまれ，Cはかぎの手に変形する．



どれだけ変形するかというと，問題の分割線上，分割点⊤がq個，図では１個だけ，あらわれるまで．

定義２　分割図Cの

　　左辺上，第$p+1$分点

のところの分割線にそって，その上側部分を

　　この線上，q個の分点

があらわれるまで，ひっこめたものを

　　${}^{p}_{q}C$

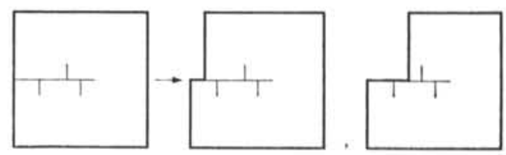
とかいて，Cから作ったp，q型の**隅欠け図**，という．

ただしここで，もちろん

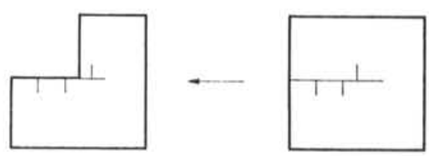
　　$p\leq C$の左辺分点数-1

　　$q\leq$問題の分割線上の，⊤分点数

この２番目の条件式は，しかし，もうすこしきびしくしておきたい．つまり問題の分割線上の，従来の接着関係を，必要以上かきみださないように．というのは，



このような隅欠け図は，合法的だけれども，それ以上にひっこめようとすると，つぎの⊥分点にひっかかる．その⊥点までも，動かさないと，ひっこめができない．



そして，動かすとしたら，実は，別な図からのひっこめになる．接着関係のちがう別な図をもとにしての，ひっこめ．これはそうして作れるのだから，目下の場合には封じておいてよい．そこで，

　　q ≦ 問題の分割線上，⊥点がでてくるまでの，
　　　⊤点数

分割図Cに対し，pとqがこういう条件をみたすとき

定義３　隅欠け図${}^{p}_{q}C$に分割図Bをはめこむおりの，２辺接着子とは，左右接着子u，上下接着子vの対で，

　　u：　⊢がp個，⊣がBの右辺分点数，の記号列

　　v：　⊤がq個，⊥がBの下辺分点数，の記号列

ところで，まだ問題がある．その

　　はめこんだ結果　$B\oplus C$　が純非分離型で，

　　はめこむBが，その局大部分図になる条件は？

§15.　はめこみの還元

はめこみを，広義にゆるしてみよう．かってな分割図

Cに対して，まずその

$$左辺分点数=\vdash\cdot C$$

とおき，

$$p \leq \vdash\cdot C-1$$

とする．そうしてCの

左辺の第$p+1$分点のところの分割線

というより，その分割線での接着を指定する

$$(Cの)接着子=\vdash^p\circ C$$

と表わそう．さらに，この線上

$$\perp点がでてくるまでの\top点数=\Vdash^p\cdot C$$

とおき，

$$q\leq\Vdash^p\cdot C$$

とする．このようなp，qに対しては，

隅欠け図 ${}^p_qC$

を考えることができて，それへの，分割図Bの

はめこみ　$B\oplus C$

が考えられる．それをまた，

$$B\oplus^p_q C$$

とかいて，p，q型のはめこみ，などという．

さて，一般には，この

$B\oplus^p_q C$　が純非分離型で，

Bが，その局大部分図

とはならない．

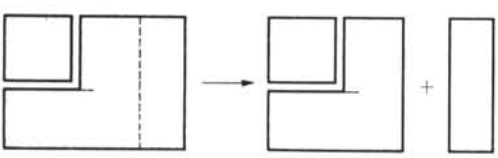
どういう場合に，そうなるか．以下,はめこみの還元，というべきものを行って，考えよう．はじめには，Cは分離型とする．

（1）　$C=C_1+C_2$

このときは

$$B\oplus C=B\oplus(C_1+C_2)$$
$$=(B\oplus C_1)+C_2$$

と考えられる．そうして，このC_1はCの部分図だから，はめこみは，これで，小さいものへ還元される．



（2）　$C\neq C_1+C_2$　(和分解されない)

このときは，Cは，ある図 C_0 の転置

$$C=C_0{}'$$

で，一般にはこの

$$C_0=C_1+C_2$$

特殊な場合として

$C=C_0=$[ ]　(単位正方形)

しかしこの場合には，

$$\vdash\cdot C=0$$

で，はめこみは，ゆるされない．だから

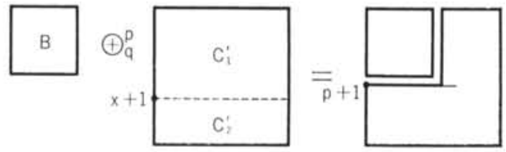
$$C=(C_1+C_2)'$$

としてよい．

これへの，はめこみ

$$B\oplus^p_q C$$

では，Cを横割りにC_1，C_2(の転置)に分ける，分割線の位置が問題になる．Cの左辺上，何番目の分点のところでの，分割線なのか．$x+1$番目としてみよう．



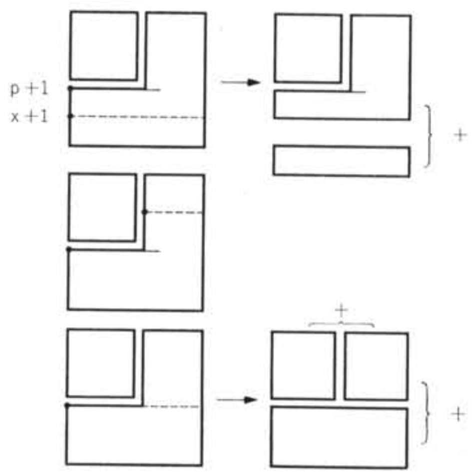
いまもしも

$$x>p$$

とすれば，このはめこみは，たしかに還元される．また

$$x<p$$

ならば，この分割について，還元はおこらない．



またちょうど

$$x=p$$

のときは，はめこみ，実は，ふつうの接着になる．

以上の関係を，記号的に，整理しておこう．まず

$x=$問題の分割線の上側部分の，左辺分点数

そうして，この上側部分というのは，Cを転置した

$$C'=C_1+C_2$$

の左側部分 C_1，それの転置だから C_1' で

$$x=\vdash\cdot C_1'$$

このxとpとの大小で，はめこみ

$$B\oplus^p_q C=\quad B\oplus^p_q(C_1+C_2)'$$

の還元が生ずる．

$p > \vdash\cdot C_1{}'$ なら，ここでは還元が起らない．

$\text{〃} =$ 〃 〃 $((B+C_1{}')'+C_2)'$

$\text{〃} <$ 〃 〃 $((B\oplus^p_q C_1{}')'+C_2)'$

そこで，還元しない場合を考えると，条件として

$C \neq C_1+C_2$ （和分解しない）

$C=(C_1+C_2)'$ ならば，かならず $p > \vdash\cdot C_1{}'$

が必要．逆に，この2条件を，狭義での，はめこみの，定義の出発点にしよう．くわしくは

$C \neq [\ ]$

をも，つけ加える．そのようなCに対し

$p \leq \vdash\cdot C-1$

$q \leq \vdash^p\cdot C$

として

$B\oplus^p_q C$

を定義する．

このように限定すれば，はめこみの結果は，純非分離になる．なぜなら，まず，縦に和分解されないものへのはめこみだから，結果は縦に和分解されない．また，Cを横割りに分割する線は，はめこみ線より上にあって，Bの右辺でさえぎられ，全体の横割りができない．縦にも横にも割れなくて，もちろん単一正方形でもないから純非分離ということになる．

その純非分離の，局大部分図に，Bはなっている．なぜなら，Bを真にふくむ部分図B^*が，あったものとしよう．そうするとそれは，Cの左辺上の第p分点までをその中にふくむ．それらで境された長方形，$p+1$個をふくむ．これら長方形をふくむような，もとのCの部分図の，最小のものまではふくむ．

ところでCは，縦に和分解されないのだから，横割りに何段かになっている．そうして，その横割りの線は，Bの右辺に達している．問題のCの部分図の，右辺縦線は，この横割り線の，上側から下側までゆくべきものなのに，十字交差ができないのだから，それはCそのものの右辺と一致する．そうすると，下辺横線のほうも，Cそのものの下辺と一致しないかぎり，C自体の横割り線になる．したがって，Bの右辺でとどまり，Bの右辺に接する長方形$p+1$個の，すべてをはふくめない．とすれば，問題の部分図は，Cそのものと一致する．いきおいB^*は，$B\oplus C$全体と一致する．

$B^* = B\oplus C$ （全体）

Bを真にふくむ部分図は，実は，全体．それが，局大部分図の定義にほかならない．

これで，上の定義の適当さは，示されたけれども，あれで話がすんだのではない．そこに記したように，狭義でのはめこみの定義の「出発点」が，たてられたにとどまっている．はめこみは，何回にも，重ねて行える．1回きりの，したがって，分離型へのはめこみが，いま考えたことだった．

§ 16. 累次のはめこみ

そこで，はめこみを2回以上行う場合に，話をすすめよう．はめこんだ結果に，またはめこむ．それが主題だけれども，一般には，はめこんだ結果を，たとえば転置し，それにふつうの接着を行い，さらに転置し，等というようにしていって，それにまた，はめこむ．そのとき

はめこんだ結果が，純非分離で，

はめこむのが，その局大部分図

になるための，条件を考えたい．

そのため，まえとおなじように，はめこみ

$B\oplus^p_q C$

を，一般的にゆるして，還元の規則から，考えよう．

（1） $C=C_1+C_2$

このときは，まえとおなじように

$B\oplus C=(B\oplus C_1)+C_2$

（2） $C=(C_1+C_2)'$

このときも，まえとかわらない．

$p > \vdash\cdot C_1{}'$ なら，ここでは還元が起らない．

$\text{〃} =$ 〃 〃 $((B+C_1{}')'+C_2)'$

$\text{〃} <$ 〃 〃 $((B\oplus^p_q C_1{}')'+C_2)'$

しかし，こんどはさらに，はめこみ結果へのはめこみが，問題になる．

（3） $C=C_1\oplus C_2$

このときは，C_1の左辺分点数

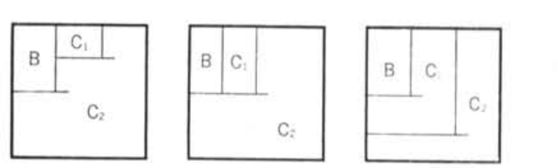
$\vdash\cdot C_1$

が，場合を区別する．

$p > \vdash\cdot C_1$ なら，ここでは還元が起らない．

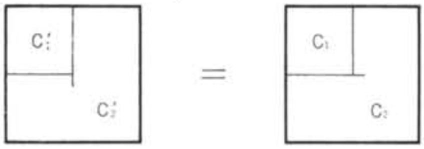
$\text{〃} =$ 〃 〃 $(B+C_1)\oplus C_2$

$\text{〃} <$ 〃 〃 $(B\oplus C_1)\oplus C_2$



さらにまた

（4） $C=(C_1\oplus C_2)'$



このときは，C_1' の左辺分点数が，場合を区別する．

$p>\vdash\cdot C_1'$ なら，ここでは還元が起らない．

〃＝ 〃 〃 $((B+C_1')'\oplus C_2)'$

〃＜ 〃 〃 $((B\oplus C_1')'\oplus C_2)'$

以上の規則にしたがって，還元のできるかぎり，還元をする．そうして，還元できないところにいたって，狭義のはめこみ，となる．それは，どういう場合になるだろうか．条件をまとめてみると

$C\neq C_1+C_2$（和分解されない）

$C=(C_1+C_2)'$なら，かならず　$p>\vdash\cdot C_1'$

$C=C_1\oplus C_2$　なら，　$p>\vdash\cdot C_1$

$C=(C_1\oplus C_2)'$なら，　$p>\vdash\cdot C_1'$

それから

$C\neq[\ ]$

このようなCに対して

$p\leq\vdash\cdot C-1$

$q\leq\vdash^{p}\cdot C$

のような，p，q型の

$B\oplus^{p}_{q}C$

を，狭義のものとして定義する．

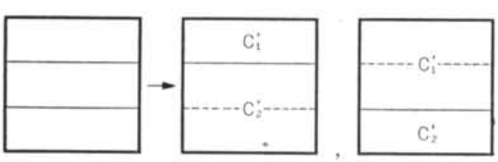
この定義で，ひとつ，注意すべきことがある．

$C=(C_1+C_2)'$

のところだけに

なら，かならず

とある．それは，Cが横割りに何段かに分かれるとき，それを2段の分解として，どう，くくってみようとも，を意味している．



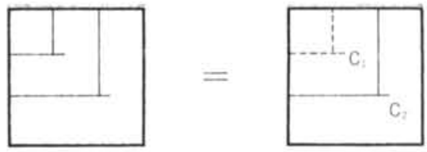
これに対して，はめこみ

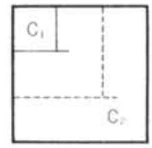
$C=C_1\oplus C_2$

などのところでは，ただ単に

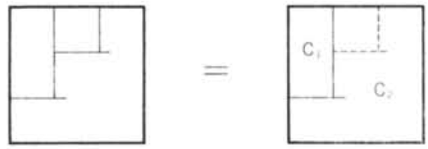
なら

としてある．それは，累次のはめこみに対して，どうくくるべきかが，狭義には定まっているから．





は不可



はめこみの場合には

$(X\oplus Y)\oplus Z$

$X\oplus(Y\oplus Z)$

が，ちがった意味をもつ．ふつうの接着のときは

$(X+Y)+Z=X+(Y+Z)$

だったけれども，はめこみでは，この

結合法則が破れる

ふつうの接着のときも，一般には

$X+Y\neq Y+X$

で，数計算とはちがい

交換法則が破れる

のだったけれども，こんどは，結合法則まで破られる．したがって，はめこみでは，

$(X\oplus Y)\oplus Z$

などの「かっこを，はぶく」わけにはゆかない．

その不便を，うまく切りぬける，方策については，のちに説明をする．

ここでは，上の定義で，

$C_1\oplus C_2$

$(C_1\oplus C_2)'$

の⊕が，狭義の⊕を意味することを，とくに注意しておく．定義すべきもの，狭義の⊕を，定義の中に前提するのは，循環論法のようだけれども，そうではない．これは，数学的帰納法のように，解釈する．Cのところまでは，すでに定義されたとして，それへのはめこみを，上のようにして定義する．

この定義が，当初の目的にかなっているかどうかを，たしかめよう．まず，はめこんだ結果が，純非分離になること．縦に和分解されないことは，まえとおなじで，また横に分割する線が，あったとしても，それはBでさえぎられる．はめこみを重ねた場合，つまり

$$C=C_1\oplus C_2,\quad \text{または}\quad (C_1\oplus C_2)'$$
に対する，はめこみ結果については，もともと

Cが純非分離ならば，$B\oplus C$も純非分離

そうして，この前提のほうは，数学的帰納法にとりこまれる．出発点の

分離型への，はめこみ結果は，純非分離

は，すでにわかっている．

つぎに，Bが局大部分図になる，という点．これは

$$C=(C_1+C_2)'$$
のときは，まえと変らない．

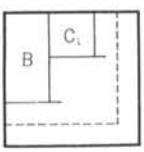
$$C=C_1\oplus C_2\quad \text{または}\quad (C_1\oplus C_2)'$$
のときだけ，しらべればよい．

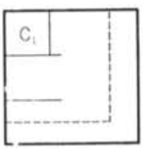
$$C=C_1\oplus C_2$$
について，考えよう．数学的帰納法にしたがい

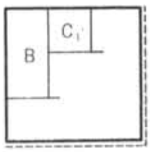
C_1 はCの局大部分図

と仮定する．

さて，Bを真にふくむ部分図B^*が，あったものとしよう．それはまず，Bの右辺をその中にふくむ．したがって，C_1の一部分をふくむ．しかし十字交差はゆるされないから，そうとすれば，C_1の全体をふくむ．しかも，BのほかはC_1だけというのでは，長方形になれないから，C_1よりも余分をふくむ．







このB^*からBを除外したのこりは，はめこみ前，Cの部分図で，C_1を真にふくむ．とすれば，C_1が局大という仮定から，それは実はC．ということは

$$B^*=B\oplus C\quad (\text{全体})$$
Bを真にふくむ部分図が，実は全体．つまりBは，局大部分図．

$$C=(C_1\oplus C_2)'$$
のときも，おなじようにしていえる．

これで，狭義のはめこみの定義が，目的にかなっていることが，たしかめられた．まとめて，定義らしく書いておこう．

定義 4　分割図を，分離型から，一般に拡げるのに

（1） 分離型は，そのまま許容する．

（2） 許容された分割図Cが，和分解されないとき，

$$1\leq\ p\ \leq \vdash\cdot C-1$$
$$0\leq\ q\ \leq \vdash^p\cdot C$$

のような整数p，qについて，許容された分割図Bの，Cへの，p，q型のはめこみ

$$B\oplus^p_q C$$
が，つぎの条件の下で許容される．

1) $C=(C_1+C_2)'$ なら，$p>\vdash\cdot C_1'$

が，かならずなりたつ．

または，このようにして許容された⊕に関しての

2) $C=C_1\oplus C_2$ なら，$p>\vdash\cdot C_1$

3) $C=(C_1\oplus C_2)'$ なら，$p>\vdash\cdot C_1'$

ただしここで，⊕は，くわしくは$\oplus^r_s$ のような記号の略記とする．

（3） このようにして，当然に許容されるものだけが，許容される．

§ 17. 周辺分点数，特定接着子

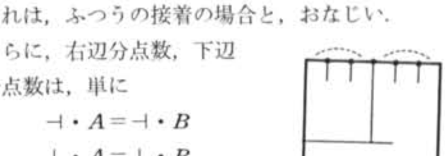
ところで，いまの定義は，まだほとんど幾何学的な像に，よりかかっている．記号法を予想してはいるけれども，記号法内のものではない．たとえば

$$\vdash\cdot C$$
左辺分点数とは，なにか．幾何学的には，明白だけれども，記号法上では，改めて定義しなければならない．

すでに，分離型の範囲に対しては，和および転置という，構成法にしたがって，この種のものを定義した．それはそのままひきつぎ，それにならって，はめこみという，新しい構成法に対するものを，これから定めよう．

$$A\approx B\oplus^p_q C$$
として，まず，左辺分点数を考えると，

$$\vdash\cdot A=\vdash\cdot B+\vdash\cdot C-p$$



つぎに，上辺分点数は

$$\top\cdot A=\top\cdot A+1+\top\cdot B$$
これは，ふつうの接着の場合と，おなじい．

さらに，右辺分点数，下辺分点数は，単に

$$\dashv\cdot A=\dashv\cdot B$$
$$\perp\cdot A=\perp\cdot B$$

これで，はめこみに対する，定義の拡張法がわかった．

はめこみの転置

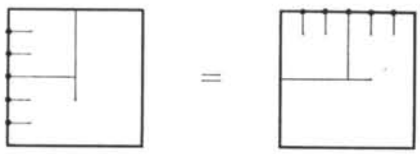
$$A\approx(B\oplus C)'$$

の場合には，

$\vdash \cdot A = \top \cdot A'$

$\top \cdot A = \vdash \cdot A'$

などの関係を使えばよい．



以上の定義で，分点数を

分割図そのもの

に対していっていることを，注意しておこう．分離型のときには，分点数は

分割図の転置構造

だけから，定まった．しかしこんどは

$B \oplus^p_q C$

のpが，分点数に，直接影響する．そしてこの

p＝左右接着子の中の，$\vdash$記号数

こういう，接着子に関する知識の一部分が，分点数の計算に，はいりこむ．それで，分点数は，分割図に対して定義する．まとめて書けば

定義5　分割図Aの

左辺分点数	$\vdash \cdot A$
上辺　〃	$\top \cdot A$
右辺　〃	$\dashv \cdot A$
下辺　〃	$\bot \cdot A$

を，つぎのようにして定める．

（0）単一正方形に対しては，すべて0．

（1）転置に対しては

$\vdash' = \top, \quad \top' = \vdash$

$\dashv' = \bot, \quad \bot' = \dashv$

として，共通的に

$f \cdot A' = f' \cdot A$

（2）和分解

$A \approx B + C$

に対しては

$\vdash \cdot A = \vdash \cdot B$

$\top \cdot A = \top \cdot B + 1 + \top \cdot C$

$\dashv \cdot A = \dashv \cdot C$

$\bot \cdot A = \bot \cdot B + 1 + \bot \cdot C$

（3）はめこみ

$A \approx B \oplus^p_q C$

に対しては

$\vdash \cdot A = \vdash \cdot B + \vdash \cdot C - p$

$\top \cdot A = \top \cdot B + 1 + \top \cdot C$

$\dashv \cdot A = \dashv \cdot C$

$\bot \cdot A = \bot \cdot C$

この，周辺分点数の定義5は，はめこみの概念，したがって定義4を前提とする．一方，定義4は，左辺分点数，したがって定義5を前提とする．これは循環論法のようだけれども，つぎのように解釈する．まず

分離型

に対しては，定義5で，周辺分点数が定められる．その

分離型の分離型へのはめこみ

が，したがって定義4で定められる．その，はめこみ結果に対する，周辺分点数を，定義5で決定する．そうすると，それへのはめこみなどが，ふたたび定義4で定められる．そのように，定義4と5とは，たがいに他の結論を利用しつつ，適用範囲を拡張する．こういう関係にあるものとして，解釈する．

ところで，定義4には，まだ別の前提がある．

$p \leqq \vdash \cdot C - 1$

として，このCの，

左辺上，第$p+1$分点での接着子　$\vdash^p \circ C$

それの，$\bot$点が現れるまでの，$\top$点数 $\vdash_\top^p \cdot C$

こういうものの，定義が残っている．それは，定義5とおなじ性格の問題で，構成法にしたがえばよい．

定義6　分割図Aの

左辺上，第$p+1$分点での接着子　$\vdash^p \circ A$

ただし，　$p \leqq \vdash \cdot A - 1$　とする．

上辺上，第$p+1$分点での接着子　${}_p\top \circ A$

ただし，　$p \leqq \top \cdot A - 1$　とする．

を，つぎのようにして定める．

（1）転置に対しては

$\vdash^p \circ A' = {}_p\top \circ A$

（2）和分解

$A \approx B + C$

に対しては，まず

$\vdash^p \circ A = \vdash^p \circ B$

つぎに

1）$\top \cdot B > p$　なら，　${}_p\top \circ A = {}_p\top \circ B$

2）$\top \cdot B = p$　なら，

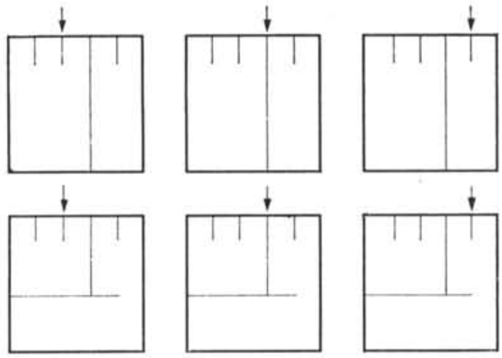
${}_p\top \circ A$＝上の和分解のところの接着子

3）$\top \cdot B < p$　なら，

$p - (\top \cdot B + 1) = p'$

として，

${}_p\top \circ A = {}_{p'}\top \circ C$



（3） はめこみ

$A \approx B \oplus^r_s C$

に対しても，$_p\top$ のほうは

1）$\top \cdot B > p$ なら，$_p\top \circ A = {_p\top} \circ B$

2）$\top \cdot B = p$ なら，

$_p\top \circ A =$ このはめこみの左右接着子

3）$\top \cdot B < p$ なら，

$p - (\top \cdot B + 1) = p'$

として

$_p\top \circ A = {_{p'}\top} \circ C$

また，$\vdash^p$ については

1）$\vdash \cdot B > p$ なら，$\vdash^p \circ A = \vdash^p \circ B$

2）$\vdash \cdot B = p$ なら，

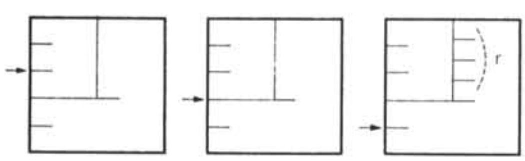
$_p\top \circ A =$ このはめこみの上下接着子

3）$\vdash \cdot B < p$ なら

$p - (\top \cdot B + 1) + (r + 1) = p'$

として，

$\vdash^p \circ A = \vdash^{p'} \circ C$



この定義で，（3）はめこみの，$\vdash^p$ の2）についてはすこし説明がいる．Aの

左辺上，第$p+1$分点のところの，分割線

ということならば，この場合

Bの下辺，およびそのC内への延長部分

に相当する．この延長部分は，はめこみ以前には

$\vdash^r \circ C$

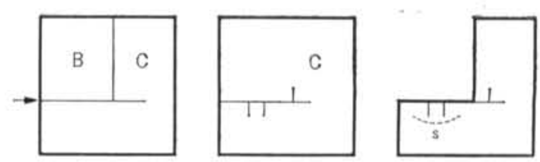
だったもの．隅欠け図

$^r_s C$

への変形にさいして

s 個の$\top$点

が，外に出され，Bとの上下接着に参加する．



だから，問題の分割線上の分点を，順にあげると

上下接着子

はめこみの角にできる $\perp$

s 個の$\top$点を除外した，$\vdash^r \circ C$

のようになる．これらを合わせたもので，この場合の

$\vdash^p \circ A$

を定義するのが，本式だろう．事実，のちにいたって，このような観点を採用する．幾何学的に，1本の線になっているものを，1体としてみる立場をとる．

しかし，いまは

$B \oplus^r_s C$ の上下接着子

$\vdash^r \circ C$

は，一応，別物とみておこう．どのみち，当面の目的は

$\vdash^p \circ A$

そのものよりは，それの

$\perp$点が現れるまでの，$\top$点数　$\models^p \cdot A$

にある．これだったら，問題の場合，どちらの定義によっても，結果は変らない．

はめこみの角にできる $\perp$

があるのだから，問題の分割線のうち

上下接着子の部分

だけを考えればよい．

定義7　分割図Aに対し，

$p \leq \vdash \cdot A - 1$

として，いま

$\vdash^p \circ A$

が，

（1） 2辺接着子の上下接着子のとき

$\models^p \cdot A =$ $\perp$記号が現れるまでの，$\top$記号数

（2） 左右接着子または，ふつうの接着子のとき

$\models^p \cdot A =$ $\dashv$記号が現れるまでの，$\vdash$記号数

§18.　1行書き記号法

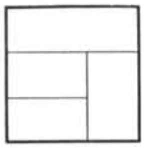
以上で，記号化に対する準備工作ができた．これからいい記号法を定めよう．はじめには，見やすい記号法，それから，電子計算機に適した，より分析的な記号法，と2段にわけて，説明をする．まず，見やすい記号法．と

うのは，分離型のときにも，はじめにちょっとのべた，転置記号と接着記号とをまぜ書きする流儀．

たとえば

〔〔〕⊢〔〔〔〕〔〕〕⊣〔〕〕〕

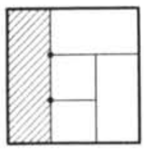
これは，つぎの図を表わしている．



この記号列の前に

〔〕⊢⊢

をつければ，そのつぎの図を表わす．

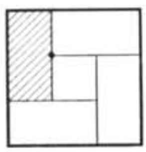


しかしいま，⊢を一つにした

〔〕⊢

をつけてみよう．

接着記号の一つ不足した，この「和」は，はめこみを表わすものとする．



改めて書けば，

〔〕⊢〔〔〕⊢〔〔〔〕〔〕〕⊣〔〕〕〕

これが，マンジ型を表わす，とする．

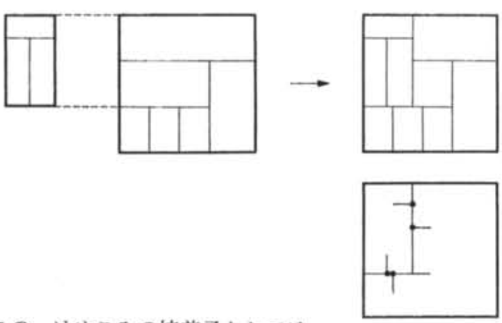
この流儀で，分離型の，こんどは

〔〔〕⊢〔〔〔〕⊢⊢〔〔〕〔〕〔〕〕〕⊣〔〕〕〕

に対して，

〔〔〕⊢〔〔〕〔〕〕〕

を，はめこんでみよう．



この，はめこみの接着子としては

左右接着子　⊣⊢

上下接着子　⊥⊤

を採用する．つづけ書きして

⊣⊢⊥⊤

これを，上記の記号列2個の間にはさんで

〔〔〕⊢〔〔〕〔〕〕〕⊣⊢⊥⊤〔〔〕⊢

〔〔〔〕⊢⊢〔〔〕〔〕〔〕〕〕⊣〔〕〕〕

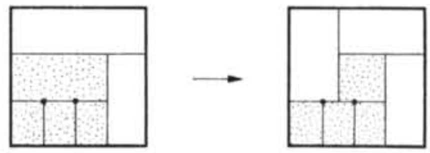
これでも，よいのだけれども，この記号列には，重複というか，余分なところがある．接着子

⊢⊢

これは，はめこまれる側で，

〔〕，　〔〔〕〔〕〔〕〕

を，接着していたもの．接着していたのだけれども，はめこみ後に，接着しているのは，これとちがっている．



つまり

⊢⊢

の，第1の

⊢が，はめこみの上下接着に参加

そうして第2の

⊢が，従来の接着に残留

こういう場合に，上記の記号列

……〔〕⊢⊢〔〔〕〔〕〔〕〕……

の，問題の接着線部分

⊢⊢　を改めて　⊢

にする．一般に，残留部分だけにする．改めて書けば

〔〔〕⊢〔〔〕〔〕〕〕⊣⊢⊥⊤〔〔〕⊢

〔〔〔〕⊢〔〔〕〔〕〔〕〕〕⊣〔〕〕〕

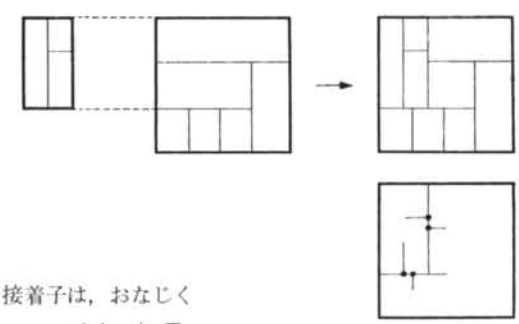
もうひとつ，こんどは

〔〕⊢〔〔〕〔〕〕

を，いまの

〔〔〕⊢〔〔〔〕⊢⊢〔〔〕〔〕〔〕〕〕⊣〔〕〕〕

に，はめこんでみよう．



接着子は，おなじく

⊣⊢⊥⊤

とする．この場合に，おなじくつづけ書きして

〔〕⊢〔〔〕〔〕〕⊣⊢⊥⊤〔……〕

とすると，うっかりして読み誤る可能性がある．

〔〕⊢〔〔〕〔〕〕

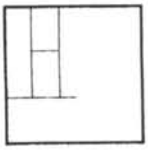
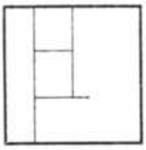
をはめこむつもりなのが，はめこみ

〔〔〕〔〕〕⊣⊢⊥⊤〔……〕

でできた図の前に，

〔〕⊢

を，ふつうに接着したものと，解されるかもしれない．

実際には，あとの解釈では，上下接着子

$\perp\ \top$

の，⊥が，宙にまよってしまう．だから

[ ] ⊢ [[ ] [ ]]

をまとめての，はめこみと，判断がつく．この場合にはそうなのだけれども，一般には，どうだろうか．

正しい解釈が，一目でつくよう，かっこを入れるとよい．つまり

([ ] ⊢ [[ ] [ ]]) ⊣ ⊢ ⊥ ⊤ [‥‥]

のようにする．この

(‥‥)

のかわりに，２重かっこの対

[[‥‥]]

を使ってもよい．こんなようにすれば，まぎれる心配がない．

以上で，一般の分割図を記述できるような記号法が，一応たてられた．まとめてのべれば

定義8　分割図の，構成的な，記号法．

（１）単一長方形は，[ ]．

（２）分割図の転置は，[‥‥] とかっこでくるむ．ただし，すでに対応するかっこでくるまれているときは，そのかっこ対をとりさる．またとくに [ ] のときは，そのままとする．

（３）分割図の和は，接着子をなかにはさんで，つづけ書きする．

（４）分割図のはめこみは，２辺接着子をなかにはさんで，つづけ書きする．ただし，そのはめこみを

$B \oplus_q^p C$

として，C の左辺第 $p+1$ 分点での接着子

$\vdash^{p} \circ C$

から，先頭の q 個の⊢または⊤を，とりのぞく．

（５）はめこむ図やはめこまれる図が，対応するかっこでくるまれていなければ，２重かっこでくるむ．はめこみ結果も，和分解の因子なら，同様とする．

この(５)によれば，はめこみは

[‥‥]　　と [‥‥]

[[‥‥]] と [‥‥]

[‥‥]　　と [[‥‥]]

[[‥‥]] と [[‥‥]]

のような間で行われ，これが，さらに部分図になるとき

[[‥‥]] または [‥‥]

でくるまれる．したがって，組み合わせ方を見誤まるおそれはない．

けれども，実は，このような２重かっこをつけないでも，解読は一意に定められる．そのくわしい吟味はのちにゆずり，簡単な場合について，事情をみてみよう．

ここでは，でてくるすべてのはめこみ

$\oplus_q^p$ の $q=0$

と仮定する．つまり，後続の

左辺第 $p+1$ 接着子は，手つかず

と仮定する．

さて，はじめは，２項のつづけ書き

[‥‥] ‥‥ [‥‥]

について考える．ふつうの和か，はめこみか．その区別法を問題にする．

前の [‥‥] $= A$

後の [‥‥] $= B$

中間の ‥‥ $= s$　（接着子）

この s に，上下接着子の部分があれば，もちろん，はめこみだけれども，逆に，はめこみ，かならずしも，上下接着子部分を持ってない．上下がなくても，あっても，左右接着子のほうに注目する．その中の

⊣ 数 $=$ ⊣ $\cdot A$

しかし，⊢数のほうは

和のとき　　　⊢数 $=$ ⊢ $\cdot B$

はめこみのとき　⊢数 $= p <$ ⊢ $\cdot B$

そこで，

s 中の⊢数　と　⊢ $\cdot B$

をくらべれば，和か，はめこみかが，区別される．

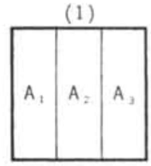
つぎに，３項のつづけ書き

[‥‥] ‥‥ [‥‥] ‥‥ [‥‥]

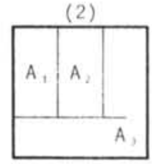
$= A_1\ s_1\ A_2\ s_2\ A_3$

について考えよう．これには，いろいろな場合がある．

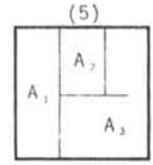
(1)



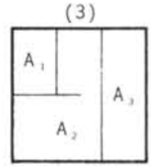
(2)



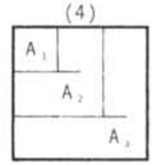
(5)



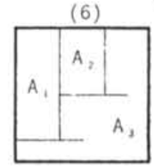
(3)



(4)



(6)



s_i 中の⊢数＝⊢・s_i

として，後続図の左方分点数

⊢・A_{i+1}

とくらべてみる．

（1） ⊢・s_1＝⊢・A_2，　⊢・s_2＝⊢・A_3

（2）　　〃　　，　　＜

（3）　　＜　　，　　＝

（4）　　〃　　，　　＜

（5〜6）　＞　　，　　〃

このようにして，5通りには分けられる．そして最後の

⊢・s_1＜⊢・A_2

の場合，ともかくも

$A_1\ s_1(A_2\ s_2\ A_3)$　で，s_2 ははめこみ

そうして，

⊢・s_1＝⊢・$(A_2\ s_2\ A_3)$　なら，和　　（5）

　　＜　　　　　　　　なら，はめこみ（6）

こうして，場合を区別することができる．

4項の

$A_1\ s_1\ A_2\ s_2\ A_3\ s_3\ A_4$

についても，おなじようにゆく．

⊢・s_1＝⊢・A_2　　なら，s_1 は和

　　＜　　　　　なら，s_1 ははめこみ

で，3項の場合に帰着する．

⊢・s_1＞⊢・A_2

のときが問題で，このときは A_1を，一時よけておいて，その次を吟味する．

⊢・s_2≦⊢・A_3　　なら，$(A_2\ s_2\ A_3)$

この部分図に対して

⊢・s_1≦⊢・$(A_2\ s_2\ A_3)$

なら，3項までで一段落，さもなければ

$((A_2\ s_2\ A_3)s_3\ A_4)$

で，これへの和・はめこみになる．それだから

⊢・s_2＞⊢・A_3

のときが問題で，このときは A_2も，一時よけておいて，その次に進む．

$(A_3\ s_3\ A_4)$

となるはずで，したがって

$A_2\ s_2(A_3\ s_3\ A_4)$

$A_1\ s_1(A_2\ s_2(A_3\ s_3\ A_4))$

となる．

§19. 左上からの復原

以上では，すべての

$q=0$，左辺第 $p+1$ 接着子は，手つかず

と仮定した．それだから，後続の図が，記号列

[‥‥] ‥‥ [‥‥] ‥‥ [‥‥]

から，そのままとりだされ，その左方分点数

⊢・[‥‥]

が確定した．しかし一般の

$q\neq 0$

の場合には，記号列中の

[‥‥]

は，後続の図を，そのまま表わしてはいない．そういう変形された

[‥‥]

については，

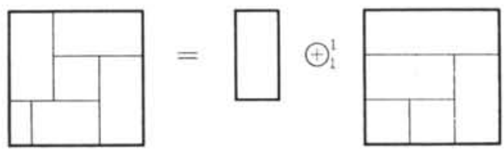
⊢・[‥‥]

にしても，定義されているわけではない．そこで，さらに，ひと工夫がいる．

不完全な [‥‥]

から，どこまでが正しく，読みとれるだろうか．

実例について，説明してみよう．



ここで，はめこまれる側の図は

[[ ] ⊢ [[[ ] ⊢ [[ ] [ ]]] ⊣ [ ]]]

この前に

[ ] ⊢ ⊤

をとりつけ，はめこまれる側から，中央の⊢をとる．

[ ] ⊢ ⊤ [[ ] ⊢ [[[ ] [[ ] [ ]]] ⊣ [ ]]]

これで，記号列ができた．これの解読で，便宜上，長方形に，順に番号をふっておこう．

[1] ⊢ ⊤ [[2] ⊢ [[[3] [[4] [5]

]] ⊣ [6]]]

この [3] の後のところから，⊢がとりさられている．そのことを，つきとめるのに，実は，この [3] 以下の部分は，必要でない．

[1] ⊢ ⊤ [[2] ⊢ [[[3] ‥‥‥

この記号列の意味は，まず

[1]　⊢ ⊤　[‥‥

この第2項

[[2] ⊢ [[[3] ‥‥

というのは，

[2] ⊢ [[[3] ‥‥

の転置で，これはまた

［2］　$\vdash$　［［［3］‥‥

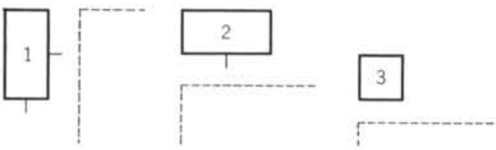
この第2項

［［［3］‥‥

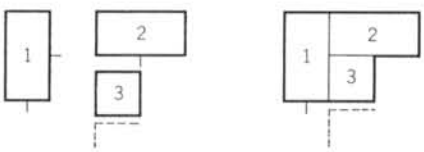
というのは

［3］‥‥

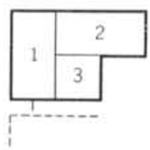
の転置の転置．以上の分析を，図示してみると



まとめて



このように，長方形1，3の下辺がそろうから，そのつぎの接着というのは，実は，これらとの接着になる．



そこで，上下接着子をしらべてみると

$\top$

がある．それをおきもどして

‥‥［3］ $\vdash$ ‥‥

このように

左辺第$p+1$接着子

の復原には，記号列のなかで，それより左方にある長方形の位置関係が，復原されればよい．

‥‥‥ $\vdash$ ‥‥‥

この，右側の部分は，問題に影響しない．問題の線よりも，下方にあるか，または右方にあって

左辺の上方より第$p+1$

という位置をつきとめるのに，関係がない．

記号列の解読を

左から右へ

と進めてゆくと，図が

左上方から，右へ，下へ

と復原されてゆく．その解読なかば，

左辺の上方復原部分の分点数

が，必要数にちょうど達したところで，上下接着の吟味に移行する．

問題の焦点は，分点数の計算法にある．それを，記号列の左方部分について，行うのだけれども，その仕方をのべよう．計算の原則には，変りがない．ただ，その適用手順を，改める．というのは，

$$A=A_1\oplus A_2,\quad A_1=(A_{11}+A_{12})'$$

のような場合，以前には，まず

$$\vdash\cdot A=\vdash\cdot A_1+\vdash\cdot A_2-p$$

として，それから

$$\vdash\cdot A_1=\top\cdot A_{11}+A_{12}=\top\cdot A_{11}+1+\top\cdot A_{12}$$

とするように，考えてきた．しかしこんどは

$$A=(A_{11}+A_{12})'\oplus A_2$$

の左側から，しらべてゆく．はじめに

A_{11}

これは，転置されているから，その

$\top\cdot A_{11}$

をみる．続いて，＋の関係がくるが，転置の中だから

$+1$

として，そのつぎ

$\top\cdot A_{12}$

こうして

$$\vdash\cdot(A_{11}+A_{12})'=\top\cdot A_{11}+1+\top\cdot A_{12}$$

までを計算する．これで，転置の外に出たから，つぎは

$\vdash\cdot$※

の公式を使い，$\oplus$を

$-p$

とし，それから

$\vdash\cdot A_2$

こういう順序でやる．

使う公式は，

$\vdash\cdot$［ ］$=\top\cdot$［ ］$=0$

$\vdash\cdot$［ ‥‥ ］$=\top\cdot$‥‥

$\top\cdot$［ ‥‥ ］$=\vdash\cdot$‥‥

それから

$$\top\cdot A+B=\top\cdot A+1+\top\cdot B$$

$$\top\cdot A\oplus B=\qquad〃$$

これは，＋または$\oplus$を，$+\!\!\!)$で表わして

$$\top\cdot A+\!\!\!)B=\top\cdot A+1+\top\cdot B$$

3項以上でも

$$\top\cdot A_1+\!\!\!)A_2+\!\!\!)A_3\cdots=\top\cdot A_1+1+\top\cdot A_2+1+\top\cdot A_3+\cdots$$

つぎに

$$\vdash\cdot A+B=\vdash\cdot A$$

$$\vdash\cdot A\oplus B=\vdash\cdot A-p+\top\cdot B$$

ここで

$p=$接着子中の$\vdash$数

は，＋のとき

$p=\vdash\cdot B$

だから，接着子をsとすれば，2式はまとめて

$\vdash \cdot AsB = \vdash \cdot A - \vdash \cdot s + \vdash \cdot B$

と書ける．3項以上でも

$\vdash \cdot A_1 s_1 A_2 s_2 A_3 \cdots = \vdash \cdot A_1 - \vdash \cdot s_1 + \vdash \cdot A_2$
$\qquad - \vdash \cdot s_2 + \vdash \cdot A_3 - + \cdots$

計算の出発点は

$\vdash \cdot [\ ] = 0$ 　または　 $\top \cdot [\ ] = 0$

とちゅうでも，長方形［ ］そのものは，0にされて計算にはいりこまない．はいりこむのは

］［　の間にある，接着子

で，場合によって

$+1$ 　　または　　 $- \vdash \cdot s$

こういうことの積み重ねだから，計算結果は

$\Sigma 1 - \Sigma \vdash \cdot s$

の形になる．もうすこしくわしく

$+1$ 　　　は，$\top \cdot AsB$ 　の式から

$-\vdash \cdot s$ 　は，$\vdash \cdot AsB$ 　の式から

どちらの式によるかは

［ …… ］ の内外で，入れかわる．

いいかえると，かぶさっている

［ …… ］ が，偶数重か，奇数重か，

できまる．

定義 9 　分割図 A の記号列で，転置記号が

］［

の順で続く部分を，接着線という．それが，対応かっこ

偶数重の内にあるとき，縦線

奇数重　　　〃　　，横線

という．縦線の接着子についての和

$\Sigma \vdash \cdot s = (\vdash) \cdot A$

また横線の接着子についての和

$\Sigma \vdash \cdot s = (\top) \cdot A$

とおいて，内部 $\vdash$ 点数，内部 $\top$ 点数という．さらに A の

縦線数 $= | \cdot A$

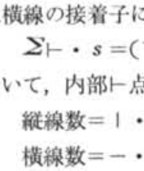
横線数 $= - \cdot A$

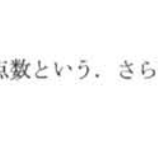
定理 　分点数の公式

$\vdash \cdot A = - \cdot A - (\vdash) \cdot A$

$\top \cdot A = | \cdot A - (\top) \cdot A$

これは，記号列の左方からの解読なかばでもなりたつ．





ただし，はめこみによって，第 $p+1$ 接着子からの，$\vdash$ の転出があったときは，それを修正する．

§20. 記号法の修正，2行書き

いまの定理の，ただし書きをさけるために，記号列の書き方自体を，ここで修正しよう．つまり

はめこみの上下接着子は，対応する第 $p+1$ 接着子の，頭にかぶせて書く．

さきほどの例でいえば

［1］$\vdash$ $\top$ …… ［3］ ……

のかわりに

［1］$\vdash$ …… ［3］$\top$ ……

とする．はめこむ側から離して，はめこまれる側の，その線のところに書く．

この例でみたように，はめこみ

［1］$\vdash$

が，はめこみとして確定するのは，

…… ［3］

までしらべたときだから，その直後に移しておいて，充分に解釈ができる．

ここでさらに，記号

$\top$，$\perp$

を改めて，

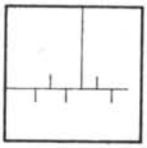
$\vdash$，$\dashv$

にそろえよう．ただし後続の接着子との区切りに，なにか区切り記号をおいて，区別がつくようにする．

$\top \perp \top \dashv \vdash$

だったなら，たとえば

$\vdash \dashv \vdash$，$\dashv \vdash$



この区切りのところに，実際は，なにがあるだろうか．図にかいてみよう．図では

$\top \perp \top$，$\perp \top$

になるわけだけれども，その中間に，$\perp$ がくる．記号法上の，$\dashv$ がくる．それを区切り記号にしよう．

$\vdash \dashv \vdash \dashv \dashv \vdash$

これは，図形に忠実な仕方だけれども，記号法上の，区切りの機能も，みたされている．というのは

$B \oplus C$

の上下接着子の中の

$\dashv$ の数 $= \perp \cdot B$

したがって

第 $(\perp \cdot B)+1$ 番目の $\dashv$ ＝区切りの $\dashv$

だから，B についての知識で，この接着子のつづけ書き

が，正しく区切られる．

定義10　記号列の，図形に即した，記号法．

（1）　単一正方形は，〔 〕．

（2）　和は，接着子を中にはさんで，つづけ書きする．

（3）　はめこみは，左右接着子を中にはさんで，つづけ書きし，それが p，q 型の

$$B \oplus^{p}_{q} C$$

ならば，C の左辺第 $p+1$ 分点での接着子

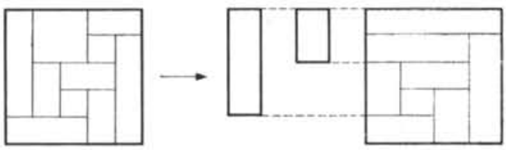
$\vdash^{p}$・C から先頭 q 個の ⊢ をとりさったもの

の前に，⊢ ⊣ 記号による

上下接着子の最後に ⊣ をつけたもの

をおく．

この記号法では，接着線のところの，分点の配列が，忠実にうつされている．それで，与えられた図から，記号列をつくる作業が，より自然になる．



まず，転置記号列を，さきに書き上げよう．マンジ

〔 〕〔 〔 〕〔 〔 〔 〕〔 〕〕〔 〕〕〕

これを m として，転置，まえに〔 〕をつけ，また転置

〔 〔 〕〔 m 〕〕

これが，m の上に長方形を一つつけたもの．さらに

〔 〔 〕〔 m 〕〕〔 〕

と，長方形を右につけ，ふたたび

〔 〔 〕〔 〔 〔 〕〔 m 〕〕〔 〕〕〕

これで，はめこまれる側ができた．だから．全体は

〔 〕〔 〕〔 〔 〕〔 〔 〔 〕〔 m 〕〕〔 〕〕〕

長方形に，番号を入れよう．

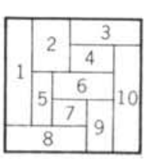
〔1〕〔2〕〔〔3〕〔〔〔4〕〔 m 〕〕〔10〕〕〕

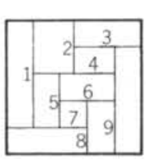
m＝〔5〕〔〔6〕〔〔7〕〔8〕〕〔9〕〕〕

それから，接着線にも，番号を入れる．

〔1〕***1***〔2〕***2***〔〔3〕***3***〔〔〔4〕***4***〔
〔5〕***5***〔〔6〕***6***〔〔7〕***7***〔8〕〕***8***〔9〕〕〕
〕〕***9***〔10〕〕〕

図と対照してみよう．





この9本の接着線上の分点をみると

1：⊢，***2***：⊢，***3***：⊢，***4***：⊢ ⊣，***5***：⊢，
6：⊢，***7***：⊣ ⊣，***8***：⊣，***9***：⊣ ⊣

これらを代入して

〔1〕⊢〔2〕⊢〔〔3〕⊢〔〔〔4〕⊢ ⊣〔
〔5〕⊢〔〔6〕⊢〔〔7〕⊣ ⊣〔8〕〕⊣〔9
〕〕〕〕〕⊣ ⊣〔10〕〕〕

これから番号をとりされば，求める記号列がえられる．

さて，ここでさらに

転置記号　〔，〕　の列

接着記号　⊢，⊣ の列

の分離を考えよう．上の例で

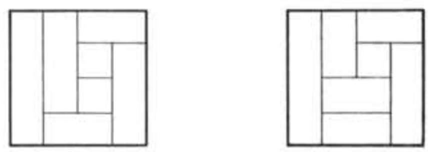
〔 〕〔 〕〔 〔 〕〔 〔 〔 ……

⊢，⊢，⊢，⊢ ⊣，……

ここで，区切りをとって

⊢ ⊢ ⊢ ⊢ ⊣ ……

とすることは，一般には，ゆるされない．たとえば



この場合の，転置記号列は，共通の

〔 〕〔 〕〔 〔 〕〔 〔 〔 〕〔 〕〔 〕〕〔 〕〕〕

で，接着子は

⊢，⊢ ⊢，⊢，⊣，⊣ ⊣，

および

⊢ ⊢，⊢，⊢，⊣，⊣ ⊣，

だから，区切り記号をとりさると，共通の

⊢ ⊢ ⊢ ⊢ ⊣ ⊣ ⊣

になってしまう．

ところで，この区切り記号として，この場合も

⊣

を使うことができる．

というのは，＋でも ⊕ でも

接着子中の ⊣ の数＝先行する図の ⊣ 分点数

だから，

接着子の後に ⊣ をつけたもの

を，つづけ書きしておけば，それを

（⊣・先行する図）＋1番目の ⊣

で区切ってゆくことで，正しく解読されよう．ただし，はめこみ線のところでは

（⊥・はめこむ図）＋1番目の ⊣

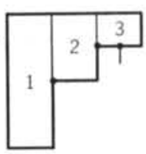
までの，上下接着子部分を，まず分離するものとする．

これで，一般の場合にも，分割図を表わすのに

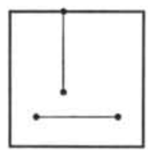
　　転置記号列
　　接着記号列
の，２行に分けた書き方のできることが，わかった．

定義11　分割図の，２行書き記号法．
定義10の記号列で，接着子それぞれの後に⊣をつけ，それを，転置・接着の，２本の記号列に分離，
　　転置記号列×接着記号列
として，分割図を表わす．

たとえば，さきほどの，長方形10分割図なら
　　［］［］［［］［［［］［［］［［］［［］［］
　　］［］］］］］［］］］　×
　　⊢⊣⊢⊣⊢⊣⊢⊣⊣⊢⊣⊢⊣⊣⊣⊣⊣⊣⊣⊣⊣
これを解読するのに，まず先頭の［］は
　　⊣・［］＋１＝１
だから，１番目の⊣で切り，⊣を・に直して
　　⊢，⊢ ⊣ ⊢ ⊣ ⊢ ⊣ ⊣ ‥‥
ついで
　　⊢，⊢，⊢ ⊣ ⊢ ⊣ ⊣ ‥‥
そのつぎは
　　‥‥‥［［］‥‥‥
と，転置かっこの内にあるから，⊣・でなくて
　　⊥・［］
をみる．そこで，
　　⊢，⊢，⊢，⊢ ⊣ ⊣ ‥‥
ここまでの解読結果を，図示してみよう．



ここで，つぎの［４］をふくめると，
　　［２］からみての，⊢・‥‥
が，２に達する．そこで，［２］に対するはめこみ線のくることがわかる．
　　⊥・［２］＋１＝１
そこで，
　　⊢，⊢，⊢，上下接着子⊢区切り⊣と⊣ ‥‥
こういうふうにして，解読が進められる．
　以上，すこし説明が大ざっぱで，ことに解読法は，いいたりないところもあるけれど，ともかく
　　一般の分割図の記号法
の，原理は，のべられたと思う．
　ここで，記号数の評価をしておこう．
　　長方形数＝n
とすると，転置記号列の長さは
　　最小$2n$，最大$2(2n-1)$
この最大値は，数学的帰納法で，示される．
　　$n=n_1+n_2$
として，いま
　　n_1 の最大が　$2n_1-1$ 対　　［‥‥］
　　n_2　　〃　　$2n_2-1$ 対　　［‥‥］
とすると，この組み合わせでは
　　［［‥‥］［‥‥］］
　　$(2n_1-1)+(2n_2-1)+1$
　　$=2(n_1+n_2)-1=2n-1$　対
つぎに，接着記号列の長さは
　　内部分点数＋２行書きのための区切り記号
この第２項は
　　接着線数＝$n-1$
そうして，この接着線の両端点を考えると
　　接着線数×２＝内部・外部の総分点数



そこで
　　内部分点数＝接着線数×２－外部分点数
これに，接着線数を加えて，接着記号列の長さは
　　接着線数×３－外部分点数

定理　分割図の２行書き記号法で
　　長方形数＝n
のとき
　　転置記号列の長さ$\leq 4n-2$
　　接着記号列の長さ$=3(n-1)-k$
ここで
　　k＝外部分点数

系　２進30桁の計算機で，２番地の対に書きこむなら
　　$n=8$
までが扱える．ただし，転置記号列の長さが30未満のときは，その最後に１個の］をつけて，書きこむこと．

　さて，つぎの仕事は
　　分割図から分割型へ
進むための，前提
　　分割図の図変換８種
これを定義しなければならない．それが，めんどうで，かなりの準備を必要とする．次回に改めてのべよう．

追記．長方形分割図の記号列からの自動図示

本文の，最後にのべた形での記号法は，ありていにいえば，書き進めていての，最後に気づいたもの．書き出しが，終りとそぐわなくなったけれども，締切りを過ぎていて，改める余裕がなかった．

弁解だけれども，根が代数屋で，「２項演算」にとらわれていた．和の，一般化としての，はめこみ．そういう観点から，２辺接着子なるものを考え，これを接着のその場所におく，とした．結合法則が破られること，しかし，丸がっこの混ぜ書きはさけたいと，そこで考えて「左方からの解読」を採用した．

左方部分の，⊣数および⊥数

だけを既知として，接着記号列に句読が打てるためにとまず考えたのは

(1) ふつうの和か，はめこみかの，識別符

(2) 左右接着子 ＋ 区切り符としての⊣

(3) 上下接着子 ＋ 区切り符としての⊣

の，つづけ書きだった．

もっとも，記号法の骨子を，最初にのべた

X――その定義：建築学会，論文報告集69号Ⅱ，61年10月

では，単一長方形のはめこみまでしか考えなかったから(3)はない．しかし，識別符(1)なるものは，このときの産物で，それが真に要るのかどうか，このときから，ずっと問題に思っていた．

本文を書く段になって，この(1)を，なんとかはぶいてみようとした．接着記号列を２行にわけ

ふつうの接着子ないし左右接着子の列

上下接着子の列

としてはどうか．しかしこれでは，上下接着子の配列が，解読上の順序とはずれてくる．それでは，と気がついた．ひとたび気づけば，われながら簡明で，正しいものを探りあてたと，確信した．幾何学的の，直観と合うし，

接着列の長さ＝内部分割線分数

たまたま書店の店頭でみた

ステインハウス「数学，100の問題」

井関清志・鶴田晃訳，紀伊国屋書店

それに，長方形分割図の，計量的でまた位相的な問題がのせられていた（69番）．すっかり刺戟された．かねて念頭にあった，計量づけの問題を，改めて考えてみた．みようとした．すぐと，わかった．

本文の最後にのべた形での，左方からの解読を本質と心得た，その記号法の精神から，判然とした．

長方形数＝n

のとき

接着線数＝$n-1$

で，植木算的の関係にあり，内部・外部合わせた

分割線分数＝$3n+1$

その長さに関する

１次方程式数＝$2n$

というのは，長方形の縦・横の対辺数．

計量化の自由度＝$n+1$

これだけ個数の，独立変数を，適当に選びだして，

長方形辺長が正

の，なるべく小さな整数になるようにする．方眼紙上に実現できる，最小寸法の図．一意的のものではないが，

周長の最大＝$2(n+1)$

この，最小寸法図を，記号列から復原すること．その手順は，文章でのべようとすれば，わずらわしくなるけれども，電子計算機の計算プログラムの形で，適切にのべられよう．さっそく，プログラミングにとりかかり，３月27日，第１部を書きあげた．つまらぬ誤りがあってディバッギングには苦労した．しかしいまや，与えられた記号列に対応する，長方形分割図の位相的構造を，計算機は，正しく解答する．４月１日，うそではない！

併行して，第３部，最後に第２部を書いた．

第１部　位相的構造を示すＴ表の算出

第２部　Ｅ表，連立１次方程式の立式と換式

第３部　計量的構造を示すＱ表の算出，および視覚的なＶ表の算出と印刷

あわせてプログラムは，約17トラック――１トラックが64語．１語が，符号ビットを別として，30ビット．また一時記憶が，２トラック．対象は

長方形数　$n \leq 15$

機種は，当社設計部計算課の，ＬＧＰ－30．

純２進で，固定小数点だから，計算時間は，短い．

転置記号列・接着記号列の対

の入力に対して，最小寸法の図を，アンダー・ラインと大文字Ｉにより，出力として打ち出す．その一貫プログラムを，掲げておこう．まだ草稿の段階で，恥ずかしいけれども，校了予定日まで１週間，やっとこ漕ぎつけた．本誌が出るころには，もうすこし気のきいたプログラムが，まとまるつもりでいる．

各部プログラムのディバッギングなどに関して，設計部計算課，ことに三雲正夫氏に，大変お世話になった．特記して，感謝の意を表したい．氏のごとき，建築出身ながら，錬達した計算機マンの，ある今日ならば，私のこの試みも，世に，いささかは，むかえられようか．

（63．4．13）

```
;0001000'/0001000'
b1445'h1063'h0561'h0902'b0006'a1447'y0608'b0112'
a1446'u0016'b0436's1436't0014'u0015'a1446'a1461'
y0136'b0156'y0228'b0411'y0358'u0032'b0222'a1446'
y0062'y0063's0262'h1130'b0136'r0446'u0432'u0100'
b0156'y0163'b0059'y0162'b1446'h0128'a0103'y0205'
r0147'u0134'b0205'y0219'y0221'a1446'y0222'y0224'
s0259's0261't0022'xz0000'b0060'y0163'b0061'y0162'
b1835'y0147'u0022'z0225'z0421'z0200'b0000'h0000'
b1453'h0230'a1446'a1452'h1500'b0103'a1446'y0205'
u0111'a0112'a1446'y0113'c1663'c0000'b0113's0112'
t0108'xz3200'b1445'h0127'b1446'c0128'h0130'b1461'
h0231'u0132'''''''
b0000'y0136'b1461'u0150'b0000'e0131's1445't0143'
c0129's1446'u0144'b1446'h0129'a0130'h0130't0000'
b0131'm1461'h0131's1445't0157'b0128'n0129't0160'
u0136'b0136'a1446'u0133'b0129'h0128't0200'u0421'
b0230'r0238'u0232'a0230'a0231'h0000'b0205'r0258'
u0240'y0211'y0218'b0000's1452'h0230'r0238'u0232'
a0230'a0231'h0000'b0000'a0231'h0000'b0000'a0231'
h0000'b0205'a1446'y0205'u0000''''
e1453's1452't0237'c0239'u0238'b1445'u0000''
s1446'y0245'y0250's0103't0260'b0000'e1446's1445'
n0127't0254'b0000'e1445's1445't0257'b0245'a0259'
u0240'b0245'u0000'xt0000'xz0000'b1502'b1500'b1600'
b0205'r0258'u0240's0261'h0330't0312'b0331'm1461'
h0331'b0330's1446'u0304'b0127'e1446'h0329'a0219'
y0318'y0326'b0000'h0328'e0331'h0330'a0329'h0230'
b0328's0330'c0000'u0332'''''
h0362'b0231'h0363'e0330's1445't0341'b0362'a1448'
h0362'b0363'n1445't0350's0331't0347'u0350'a0331'
u0334'b0362's1448'h0362'a0230'h0230'b0231'm1461'
c0231'h0420'u0000''''''
r0446'u0436't0408'b0362's1448'h0362't0412'u0400'
b0420'a1450'h0420'u0400'b0420'n1448'a0420'a0230'
h0230'r0446'u0436'u0136''b1463'h0331'b0130'
e1446's1445'h0127'u0300'''''
a1446'y0436'b1461'u0442'b0000'e0463's1445'h0450'
b0463'm1461'h0463's1445't0447'b0450'u0000'b0437'
a1446'u0433''b0436'y0461'b0463'h0462'u0000'
b0461'y0436'b0462'c0463'u0000''''
b0262'a1450'u0504'b0611'h0629'y0611'y0613'r0446'
u0432'b0262'y0511'b0000'h0631'e1451'm1458'h0630'
b0631'e1449'a0630'h0630'b0631'e1446's1445'n1063'
t0000'u0532'b0511'a1446'y0511's0219't0511'u1708'
r0446'u0436'b0630's1448'h0630't0532'u0526'b0611'
y0662'r0455'u0451'b1461'u0602'b0608's0561's0561'
```

```
y0608'c0663's0561'h0561't0554'u0000'b0662'y0611'
y0613'r0460'u0456'u0600'''''
b0563'm1461'h0563'e0631's1445't0600'b0563'm0563'
u0000'n1445'h0562'b0000'a0562'h0000'b0611'a1446'
y0611'y0613'r0446'u0436'n0561'h0560'b0630's1448'
h0630't0545'b0560't0613'u0600'b0000'''
b1461'h1340'b0655'u0656'r1339'u1332'h0663'r1339'
u1332's0662't0646'c0663's0663'a1446'h0663'b0000'
n1445'm1456'n1450'm1461'a0661'h0000'b0647'a1446'
y0647'y0653's1130's0062't0636'u0954'''
b0655'r0730'u0720'u0709'r0730'u0719's0831't0713'
a0831'h0831'b0722'y0741'y0743'b0722's0958't0704'
s1446't0732'u1000'b0722'a1446'y0722'b0000'h0731'
e1445's1445't0728'u0719'b0731'e1449'u0000''
b0741's0062'n1446'n1452'r1228'u1217'b1230'm1230'
h1230'b0000'a1445'h0000'e1446's1445'h0830't0750'
b1230'u0752'b1230'n1445'h0829'b0629'u0757'b0758'
a1446'y0758'b0000'e0829's1445't0755'b0758'y0800'
b0000's0829'h0863'r0825'u0813'h0862'b0826'h0861'
b0829'r0825'u0813'h0828'u0832'h0826'e1462'm1461'
h0827'b0826'n1445'e1462'a0827'h0827'a0826'h0826'
b0827'u0000'''''''
b0629'u0855'b0000'h0860'e0861'r0825'u0813'b0860'
e0828's1445't0845'b0863'u0850'b0860'e0829's1445'
t0853'b0862'a0860's0826'h0000'b0834'a1446'y0834'
y0852's0611't0834'u0900'''''
b0655'u0948'''b1461'h0963'c0903'h0903'
b0863'e0902's1445't0914'b0902'h0903'b0963'm1461'
c0963's0902'h0902't0908'b0000'h0962'e1449'h0961'
b0962'e1446'h0960's1445'n0903't0934's1446't0947'
b0831'u0936'c0959's0831'a0961't0939'u0945'h0959'
b0960'a1446'e1446's0960's0959'a0962'h0000'b0920'
a1446'y0920'y0946's0647't0906'u0700'b0647's1446'
y0958'u0700'''''''
b1461'h1026'b1004'a1446'y1021'b0262'u1049'b1026'
m1460'h1026's1445't1013'u1016'b1021'a1446'y1021'
b0000'h1027'e1446'a1446'm1461'u0000'n1026'r0661'
u0644'u1032'''''''
b0000'e1446's1445'n1063't1039'b1448'u1040'b1450'
n1362'h1362'e1451'n1450'a1362'a1027'h0000'b1032'
a1446'y1032'a1130'y1016'y1046's0647't1007's1063'
h1063't1854'u1720''''''
b1461'h1131'b0063'u1108'b1131'm1461'h1131'b1158'
a1446'y1157'y1158's1130'y1135's0205't1132'b1157'
s1446'y1128's1446'y1123'y1124'b1262'm1458'a0000'
h0000'e1457'm1458'a1262'h0000'u1726'''
b1135's1446'y1135'b0000'e1131's1445't1132'b1135'
```

```
al130'y1143'y1162'b0000'h1263'e1459'm1458'h1262'
b1263'e1455'n1448'a1262'h1262'b1263'e1457'n1448'
a1262'a0000'h0000'e1451'n1450'a1263'h0000'u1104'
b0262'u1211'b0000'h1231'b0000'e1446's1445't1232'
u1300'b1204'a1446'y1204'a1130'y1202's0647't1202'
u1400'h1229'b1461'h1230'b1229's1454'h1229't1228'
b1230'm1461'h1230'u1220'u0000''''
b1231'e1459'm1450'n1446'a1446'a1157'y1251'y1253'
b1231'e1455'm1454'n1446'a1251'h1261'b1231'e1457'
m1458'r1228'u1217'b0000'a1230'h0000'b1251'a1447'
y1251'y1253's1261't1251'u1209''''
b1231'e1457'm1452'n1446'a1157'y1318'y1321'b1231'
e1459'm1456'r1228'u1217'b1230'h1323'b1231'e1455'
r1228'u1221'b0000'a1323's1230'h0000'u1109''
'''''''''
b1340'r1361'u1344'b1340'm1461'h1340'b0662'u0000'
''''c0663'h0662'b0263'u0657'b0000'e0663's1445't0655'
b0662'a1448'h0662'b0648'a1446'y0648's0611't0648'
b0662'u0000'''
xp0800'xz0000'b0647'u1433'xp1600'xz0000'b1461'h1431'
b0000'e1431's1445't1416'xp1700'xz0000'xp2000'xz0000'
b0000'e1442's1445't1423'xp0700'xz0000'u1425'xp0300'
xz0000'b1431'm1461'h1431's1230't1432'u1408''
b1416'a1447'y1416's1446'y1408's1321't1404'xp1600'
xz0000'xp0400'xz0000'u0010'',0000019'2'4'8'
10'w0'100'w00'1000'w000'10000'w0000'
800000'w00000'8000000'w000000'20000000'40000000'
55555554'7wwwwwwq'
;0001700'/0001000',0000008'
29116qw0'2fww0000'40000000''''''
s1447't1711'u0632'r0552'u0511'u0526'b0062'y1758'
b0262'r1757'800t1754'u1832'b0611'y1758'b0263'r1757'
800t1754'u1100'b1157'y1758'b0062'r1757'800t1754'u1200'
xp1600'xz0000'b1461'h1359'e0000's1445't1342'xp0600'
xz0000'u1344'xp0200'xz0000'b1359'm1461's1445't1350'
a1445'u1335'xp1600'xz0000'b1336'a1446'y1336's1358'
t1334'u0000'e0000''''''
r0358'u0300'r0228'u0200'c1831's1063'h1063't1800'
b0262'u1812'b1814'a1446'y1814'y1824'b0000'h1831'
e1453'h1830'b1453's1830's1452'm1458'a1831's1830'
c0000's1063'h1063't1810'u1714''''
b1840'y0525'r0524'u0500'b0537'y0525'r1853'u1841'
u0526'b1863'y0524'r0619'u1847'b0561'u0620'r0553'
u0545'b1840'y0558'b0537'y0619'u0000'r0524'u0503'
r1853'u1841'r0525'u0526'b0537'y0525'u0526'z0539'
.0000000'
```