

コンクリートの破壊条件に関する研究 (その1)

—破壊曲面による既往各種破壊条件の検討—

藤井忠義

§ 1. はじめに

実際の構造物における応力状態は単純応力状態にあることは稀であり、外見上は単純な圧縮、あるいは曲げ応力状態にあると思われる柱、梁でも実際には壁、柱またはスラブによる拘束、あるいは温度応力等を受けて、圧縮、引張、せん断あるいは曲げが組み合わさった複合応力状態下にあると思われる。またプレストレストコンクリート構造、シェル構造、PCPV等の特殊な構造物、ダムや橋脚に代表される土木構造物および将来発展が期待される海洋構造物等においては、その応力状態は明らかに複合応力状態にある。

現行の設計規準においては、単軸試験における圧縮強度を基にして構造設計を行なっているが、複合応力状態にある構造物に対してこれを適用することは経済上、安全上いろいろと問題がある。このような構造物に対しては従来の単軸強度に基づく設計規準とは異なり、各種複合応力状態に即した複合応力規準を新たに確立して、これに基づく設計を行なう必要がある。このためには、まず各種複合応力状態下での構造材料の破壊条件を明らかにする必要がある。

コンクリートの破壊条件に関しては過去に多数の研究が行なわれ、その結果種々の仮説、実験式が提案されてきた。しかしながら、これらの種々の仮説も実験的裏付けが行なわれたものが少なく、また実際に行なわれた場合でも種々の応力状態が考えられるなかで、僅か一部分での実験を行なってその結果がたまたまその仮説を肯定することから妥当なものであると考え、本説がコンクリートの破壊条件であると考えている場合が多い。そのため他の応力状態での説明ができず、一般性に欠ける。

破壊条件の全体像を求めるには次の実験を行なう必要がある。すなわち単軸の圧縮、引張試験、二軸の圧縮—圧縮試験、圧縮—引張試験、引張—引張試験および三軸の圧縮—圧縮—圧縮試験、圧縮—圧縮—引張試験、圧縮—引張—引張試験、引張—引張—引張試験である。しか

しながら引張試験を含む試験は困難なために余り行なわれておらず、特に三軸での引張を含んだ試験は皆無である。

しかしながら、これまでに得られた実験結果を基に高所から既往の破壊条件を検討する場合に考えられることは、破壊曲面表示による全体像の把握であり、これを種々の仮説と検討すべきものと思われるが、このような考え方に立脚した研究は従来行なわれていないようである。

そこで、ここでは種々の仮説が構成する破壊曲面および既往の実験結果から得られた破壊曲面との比較、検討を行なうことによって既往の破壊条件を考察した。

§ 2. 破壊条件の研究の変遷

モルタル、コンクリート、岩石等の脆性材料の破壊条件に関する研究は古く、Föppl (1900年)¹⁾によるモルタルの二軸等圧縮試験に始まると思われるが、彼は二軸の等圧縮試験を行なったにすぎず、またその値も単軸圧縮強度より小さく表われている点問題である。次にKármán (1911年)²⁾、Böker (1914年)³⁾等による古典的実験が行なわれている。

Kármán は大理石、砂岩の円柱供試体を使用し、周囲から水圧を掛けて軸圧と組み合わせた三軸圧縮試験を行ないその結果をMohr説により検討しているが、実験的に求められた破壊角が理論値と一致することから本説の妥当なことを示している。しかしながら、本実験では、液圧を使用したために2方向の応力が等しく、三軸試験としては特殊な場合を検討しているにすぎない。

そのため、中間主応力は最小主応力に等しく、その影響について言及することはできず、この点に関しては以後長い間問題となった。

Böker はKármánの実験をさらに拡張し、周圧下における圧縮、振りの組み合わせ実験を行ないMohr説を肯定している。

この実験的手法はRos, Eichinger (1926年)⁴⁾に引き

継がれセメントペースト、モルタル、コンクリートによる試験が行なわれた。彼らもまた Mohr 説により検討を行なっているが、中間主応力が破壊に対して影響を持つことを示している。これらの研究が多脆性材料の破壊条件に関する最も初期のものであろう。

脆性材料の破壊に関する理論的研究は、Kármán, Böker 等による古典的実験が行なわれているところ Griffith⁵⁾ により行なわれ、エネルギー基準に基づく理論が1920年に発表された。

彼は物質内部の亀裂を偏平な楕円形と仮定し、平面応力状態の理論的破壊強度を求めたが、これが Griffith 説で微視的破壊に対して適用されている。

1928年 Richart, Brandtzaeg, Brown⁶⁾ 等は複合応力状態下で、コンクリートの破壊条件のみならず各種力学的性質をも明らかにするために、かなり精度の高い実験を行なった。彼らは $\phi 10 \times 20 \text{cm}$ のコンクリート供試体を使用し、二軸、三軸の複合応力状態下で応力-歪関係、終局強度等を求め、理論値との比較を行なっている。また三軸圧縮試験結果から軸力 σ_1 と水平力 σ_3 との間に $\sigma_1 = \sigma_0 + 4.1\sigma_3$ (σ_0 : 単軸圧縮強度) なる関係が成立することを示している。

1934年 Leon⁷⁾ は、曲線状の包絡線で破壊条件を表示できるとする Mohr 説を支持したし、1949年 Balmer⁸⁾ も同様なことを発表している。この説では中間主応力の影響が無視されているが、1937年 Wästlund⁹⁾ は実験結果から圧縮試験の場合には中間主応力が大きな影響を与えることを示している。

Cowan¹⁰⁾ は1952年、破壊条件の二元論を提唱した。すなわち彼はモルタル、コンクリートの破壊形態がせん断破壊と分離破壊の2形態を取ることに着目し、せん断破壊に対しては Mohr-Coulomb 説(せん断応力と垂直応力の一次的関係)で、また分離破壊に対しては最大主応力説によって説明できると考えた。

1955年 Bresler, Pister¹¹⁾ は鉄筋コンクリート構造物のせん断破壊に対する検討を行なうために、コンクリートの破壊条件を求めている。彼らはコンクリートの中空円筒供試体を使用して圧縮と振り、および圧縮と引張(内圧)との組み合わせ実験を行ない、実験結果を正八面体応力説で検討して満足のいく結果が得られたことを示している。

Nadai による正八面体応力説は、二次元の Mohr 説を三次元に拡張して平均せん断応力と平均垂直応力を関係付けたもので、脆性材料に対して提唱されたのはこのときが最初である。本説に類似したものに Freudenthal¹²⁾ による有効応力説があるが、これは平均せん断応力

と平均垂直応力とが直線関係にあるとするもので、本質的には正八面体応力説と同様である。

Bresler¹³⁾ 等は1958年にも同様な実験を行なっており、二軸の応力状態に対しては正八面体応力説で表示すると直線関係が成立するが、三次元の応力状態に対しては直線関係から少しばかりずれており、応力の第三不変量 $I_3 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ をも考慮して説明している。

1959年 McHenry, Karni¹⁴⁾ 等は Bresler 等の手法を踏襲し、中空円筒供試体を使用して、軸圧と内圧による組み合わせ応力状態下で実験を行ない、その結果が正八面体応力説で説明できることを示している。

日本でも坪井, 末永¹⁵⁾ も同様な実験を行ない、類似した結果を得ている。

1960年代に入るとともに破壊条件に関する研究は量的にも、また質的にも飛躍的に増大し、破壊条件は一步一步次第に解明されてきている。

1961年 Bellamy¹⁶⁾ はモルタルの円柱および中空円筒供試体を使用して、二軸および三軸の実験を行なっており、実験結果を Mohr 説および正八面体応力説で表示しているが、Mohr 説では円柱および円筒供試体の場合と2様の包絡線が得られており、Mohr 説の妥当性に対しては問題があることを示している。

1963年 Weigler, Becker¹⁷⁾ はコンクリートの二軸圧縮試験を行ない、二軸破壊時の主応力相互間の関係を求めている。

彼らはローラーを介して圧縮することにより摩擦の影響を避けている。1964年には Robinson¹⁸⁾ が、また1965年には Vile¹⁹⁾, Iyengar²⁰⁾, Берг²¹⁾, Смирнов²¹⁾ による実験が、また1968年には Schröder, Oritz²²⁾ 等による二軸圧縮試験が行なわれた。

この時期に入って特徴的なことは、従来の水圧、油圧を利用した周辺2方向が等しい場合の試験だけでなく、立方体または直方体を使用して任意の3方向の応力を得る一般的な試験が行なわれるようになったことである。

ただし、この場合には供試体端面の摩擦の影響、および全面載荷が不可能であるために部分載荷を採用せざるを得ないわけで、この点に問題がある。

特に端面摩擦の影響は無視できず、この影響を取り除くために種々の試みが行なわれている。

Kupfer, Hilsdorf, Rüsch 等はこの摩擦の影響を取り除くためにブラシ状の加圧板を使用して二軸の圧縮試験を行なっている。また種々のシート(ゴム、テフロン)類やグリース、粉末等を使用して摩擦を軽減する試みも行なわれている。

1969年 Kupfer²³⁾ 等は二軸の引張域も含む全領域にわ

たつての試験を行ない、破壊時の主応力相互間の関係を
示している。二軸の圧縮試験では、コンクリートの正方
形板にブラシ状の加圧板を使用して摩擦を減少させてい
る。

また、普通の加圧板とブラシ状の加圧板を使用した場
合との比較を行なって摩擦の影響を見ているが、摩擦が
ある場合には、見かけの強度が2~3割程度大きくなる
ことを示している。

1967年以後、丹羽²⁴⁾等は大形の三軸圧縮試験機(軸
力:200 t, 水平力:各100 t)を使用してモルタル、普
通コンクリート、軽量コンクリートの二軸および三軸の
圧縮試験を行ない破壊条件を求めている。

彼らは実験結果を三次元主応力空間内に応力表示し、
その集合体からなる曲面(破壊曲面)により破壊条件が
表示できると考え破壊曲面の形状を求めた。

実験結果から得られた破壊曲面は、静水圧線を軸とし
た釣鐘状にふくらんだ形状をしており、彼らはMohrの
二次形式により破壊条件を説明している。

畑野²⁶⁾は、コンクリート破壊時の歪に着目し、平均垂
直歪と平均歪強度との関係により破壊条件を表示してい
る。

1970年代に入り、実験の精度も高くなり、また従来見
過ごされてきた載荷経路の影響、部分圧縮による影響等
に関しても次第に明らかにされてきている。また、P C
P V設計のためにB. SおよびA. S. M. Eにおいて多軸
圧縮を考慮に入れた規格原案が発表されたり、他にも破
壊条件を設計にどのような形で組み込むかという提案が
行なわれている。今後一層、設計への適用に対する研究
が行なわれるようになるものと考えられる。

1970年代に入りフランスのLaunay²⁷⁾等は7 cm立方供
試体を使用して三軸圧縮試験を行ない、結果を Rendu-
lic 面および直截面上に表示し破壊曲面の形状を求めて
いるが、丹羽等と同様な結果を得ている。また、温度が
三軸圧縮強度に与える影響についても求めており、高温
度になるほど強度が小さく表われることを示している。

1972年 Taylor²⁸⁾等は二軸圧縮試験において、比例載
荷法、定順序載荷法と載荷経路が異なった場合に強度が
異なることを実験的に示した。しかし、これに対しては
載荷経路の影響はないとする他の研究者の結果もあり、
現在のところはっきりしていない。

最近の傾向として、円柱供試体の代りに立方供試体
を使用して三次元主応力空間内における破壊曲面の形状
を求めて数式的に表示することを試みている例が多い。

この場合には任意の3主応力状態を得ることができ、
従来の液圧を使用した特殊の応力状態の結果のみが得ら

れる場合に比べて一般性がある。

最後に、既往の破壊説とその支持者、および破壊条件
を求める目的で行なわれた既往の複合応力実験の一覧表
を表-1、表-2に示す。

§ 3. 既往の各種破壊条件

コンクリートのような脆性材料は本質的には非均質、
異方性であるために、これらをも考慮に入れた破壊現象
の解明、すなわち破壊条件の確立は非常に困難な問題で
ある。

そのため、材料を等方均質と仮定し、破壊時の応力、
歪等によって破壊条件を数式的に表示しようとする試み
が従来から行なわれている。材料の破壊条件に関する研
究は非常に古く、かの有名なGalileo Galileiの時代にま
でさかのぼるが、それ以後1940年頃までに主として多結
晶金属の降伏と破壊に対して理論的および実験的研究が
行なわれ、その結果種々の仮説が提案されてきた。

しかしながら岩石、コンクリートのような脆性材料に
対する研究は少なく、今世紀の初頭から研究が行なわれ
るようになってきたに過ぎない。

これはコンクリートのような脆性材料では、

- 1) 脆性材料は金属のような延性材料と異なり、明瞭
な弾性限度を持たない、
- 2) 圧縮側と引張側の性状が異なる、
- 3) 二軸、三軸の複合応力実験が困難である、

等の理由によるものである。

材料一般に対する破壊条件としては、過去において各
種の提案が行なわれているが、これらは大別すると応力
説、歪説、エネルギー説の3種に分類されよう。

応力説としては最大主応力説、最大せん断応力説、正
八面体応力説、有効応力説、Mohr-Coulomb説、Mohr
説(二次形式)等が従来提案されている。また、破壊時
の歪に立脚した歪説としては最大主歪説、最大せん断歪
説がある。エネルギー説は破壊時のエネルギーによって
破壊が規定されるとする規準で、有名なMises-Huber-
Hencky説(最大せん断弾性歪エネルギー説)、最大弾性
歪エネルギー説が過去において提唱されている。

以上の他にも破壊時の主応力関係で表示できる(応力
説に示された以外の形式)とした提案や、破壊時の歪関
係により破壊条件を規定できる(歪説に表示された以外
の形式)とした提案もなされている。

上記各種破壊条件は、破壊現象を巨視的に把えた場合
に適用されるもので、材料全体の破壊または崩壊を生

破 壊 説	提 唱 者 お よ び 支 持 者	条 件 式
最大主応力説	Galilei, Navier, Lamé, Clapeyron, Scoble, Nylander	$\sigma_1 = \sigma_c$ $\sigma_3 = \sigma_t$
最大主歪説	Mariotte, Navier, Poncelet, St. Venant, Fisher	$\epsilon_1 = \epsilon_c$ $\epsilon_3 = \epsilon_t$
最大せん断応力説	Tresca, Guest, Navier, Richart・Brandtzaeg, Bellamy	$\tau = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$
最大せん断歪説	Sandel	$r_1 = r_c$
最大弾性歪エネルギー説	Beltrami, Haigh	$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\nu(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1) = \sigma_c^2$
最大せん断弾性歪エネルギー説	Huber, von Mises, Hencky, Schleicher	$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_c^2$
正八面体応力説	Nadai, Bresler・Pister, McHenry・Karni, 坪井・末永, 伊東, Iyengar, Mills・Zimmerman	$\tau_{oct} = f(\sigma_{oct})$
有効応力説	Freudenthal	$\tau_{oct} = a\sigma_{oct} + b$
Mohr-Coulomb説	Cowan	$\tau = a\sigma + b$
Mohr説(二次式)	Mohr, Caquot, Pernot, Leon, 伊東, 小坂, Hanson, 丹羽・小林, Goode・Helmy, Akroyd	$\tau^2 = a\sigma + b$
Griffith説	Griffith, Hoek・Bieniawski, 丹羽・小林	$\sigma_3 = \sigma_t$ $(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_1(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$
主応力による表示	Balmer, Smith, 西沢, 丹羽	$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$
主歪による表示	畑野	$s = a + b\epsilon$

表-1 既往の破壊条件一覧

応力状態	研究者	年代	供試体形状	減摩材	備考
二軸 圧縮-圧縮	Föpple	1900	7cm 立方体	ステアリンと脂	モルタル
二軸 圧縮-圧縮	Millard	1912	立方体	グリース	コンクリート
三軸 圧縮-圧縮	Karman	1911	φ4×10cm 円柱	なし	大理石, 砂岩
三軸 圧縮-圧縮	Böker	1914	円柱	なし	大理石
三軸 圧縮-圧縮 (周圧)	Roß Eichinger	1926	φ20×60cm 円柱	なし	セメントベスト, モルタル, コンクリート
二軸, 三軸 圧縮-圧縮	Richart Brandtzaeg Brown	1928	φ10×20cm φ10×56cm 円柱	なし	モルタル 普通コンクリート $\sigma_c = 230, 190, 75 \text{ kg/cm}^2$
二軸 圧縮-圧縮	Wästlund	1937	15cm 立方体	ゴムパッド	モルタル
二軸 圧縮-曲げ	Smith	1953	3×4×12インチ 角柱	なし	コンクリート $\sigma_c = 240 \text{ kg/cm}^2$
二軸 圧縮-圧縮	Glomb	1958	10, 20cm 立方体	パラフィンワックス	コンクリート $\sigma_c = 165 \sim 235 \text{ kg/cm}^2$
三軸 圧縮-引張 (内圧)	McHenry Karni	1958	φ14×24インチ 円筒 (内径10インチ)	なし	コンクリート $\sigma_c = 210 \sim 450 \text{ kg/cm}^2$
三軸 圧縮-引張 (内圧) 圧縮-換り	Bresler Pister	1958	φ9×30インチ 円筒 (内径6インチ)	なし	コンクリート $\sigma_c = 210 \sim 420 \text{ kg/cm}^2$
三軸 圧縮-引張 (内圧) 圧縮-換り	坪井・末永	1960	φ21×38cm 円筒 (内径17cm)	なし	コンクリート $\sigma_c = 150 \sim 400 \text{ kg/cm}^2$
三軸 圧縮-引張 圧縮-圧縮 (周圧)	Bellamy	1961	φ15×30cm 円筒 (内径7.5cm)	なし	モルタル $\sigma_c = 325 \text{ kg/cm}^2$
二軸 圧縮-引張	西沢	1961	15×15×30cm 角柱 (圧縮部15cm)	なし	コンクリート $\sigma_c = 250 \sim 450 \text{ kg/cm}^2$
三軸 圧縮-引張 (内圧) 圧縮-圧縮	Campbell-Allen	1962	φ6×12インチ 円筒 (内径2.95インチ)	なし	コンクリート $\sigma_c = 310 \sim 350 \text{ kg/cm}^2$
二軸 圧縮-圧縮	Weigler Becker	1963	10×10×2.5cm スラブ	ローラー	コンクリート $\sigma_c = 330 \sim 1060 \text{ kg/cm}^2$

二軸 圧縮—圧縮	Robinson	1964	10×10×4cm スラブ	Febcure	モルタル
二軸 圧縮—曲げ	畑野, 関, 西沢	1964	15×15×50cm 角柱	なし	コンクリート $\sigma_c=250\sim450\text{kg/cm}^2$
三軸 圧縮—引張 (内圧)	畑野, 関, 西沢	1964	$\phi 15\times 30\text{cm}$ 円筒 (内径5cm) $\phi 25\times 25\text{cm}$ 円筒 (内径20cm)	なし	コンクリート
二軸 圧縮—圧縮	Iyengar Chandrashekara Krishnaswamy	1965	4インチ 立方体 6インチ 立方体	なし or パラフィンワックス	コンクリート モルタル
二軸 圧縮—圧縮 圧縮—引張	Vile et al.	1965	10×10×4インチ スラブ 4×4×15インチ 角柱 (圧縮部3インチ)	Febcure	モルタル, 普通コンクリート, 軽量コンクリート
二軸 圧縮—圧縮 (周圧)	Sims Krahl Victory	1965	$\phi 0.5\times 1$ インチ 円柱	なし	セメントペースト モルタル
三軸 圧縮—圧縮 (周圧)	Берг, Смирнов	1965	40×40×9.6cm 角柱	ジュラルミン(5mm)と ゴム(4mm)	コンクリート $\sigma_c=360\sim600\text{kg/cm}^2$
二軸 圧縮—圧縮	奥島, 小坂, 谷川	1966	$\phi 21.5\times 67\text{cm}$ 円筒 (内径12.5cm)	なし	普通コンクリート 人工軽量コンクリート
三軸 圧縮—引張 (内圧) 圧縮—振り	丹羽, 小林, 平島	1967	10.7cm 立方体	カップグリッド	モルタル $\sigma_c=343\text{kg/cm}^2$
二軸, 三軸圧縮	小林, 小柳	1967	10.5cm 立方体	シリコングリッドとゴム (0.23mm)	普通コンクリート $\sigma_c=149, 435\text{kg/cm}^2$
	丹羽, 小林, 小柳	1967	10.5cm 立方体	シリコングリッドとゴム (0.23mm)	人工軽量コンクリート $\sigma_c=315\text{kg/cm}^2$
二軸 圧縮—引張 (割裂)	丹羽, 小林, 小柳, 平島	1967	$\phi 7.5\times 15\text{cm}$ 円柱	シリコングリッドとゴム (0.23mm)	モルタル
三軸 圧縮—振り	Goode Helmy	1967	$\phi 8\times 36$ インチ 円筒 (内径6インチ)	なし	コンクリート $\sigma_c=150\sim380\text{kg/cm}^2$
三軸 圧縮—圧縮 (周圧)	Akroyd	1967	$\phi 3\times 6$ インチ 円柱	なし	コンクリート $\sigma_c=350\text{kg/cm}^2$
三軸 圧縮—圧縮 (周圧)	畑野	1967	$\phi 10\times 20\text{cm}$ 円柱	ゴム(約1mm)	モルタル $\sigma_c=411\text{kg/cm}^2$ コンクリート
二軸 圧縮—圧縮	Schröder Opitz	1968	20×20×5cm スラブ	Federmessing 箔とP TFE板	コンクリート $\sigma_c=225, 300, 400\text{kg/cm}^2$
三軸 圧縮—圧縮 (周圧)	McCreath Newman	1969	$\phi 10\times 25\text{cm}$ 円柱	なし	モルタル $\sigma_c=310\text{kg/cm}^2$
二軸 圧縮—圧縮 圧縮—引張 引張—引張	Kupfer Hilsdorf Rusch	1969	20×20×5cm スラブ	ブラシ状載荷板	コンクリート $\sigma_c=190, 315, 590\text{kg/cm}^2$
三軸 圧縮—圧縮 (周圧)	Gardner	1969	$\phi 3\times 6$ インチ 円柱	なし	コンクリート $\sigma_c=283\text{kg/cm}^2$
二軸, 三軸圧縮	Gopalakrishnan Neville Ghali	1969	10インチ 立方体 端部 $\frac{3}{8}$ インチ 面取り	グリースとアルミ箔 (0.025mm)	コンクリート $\sigma_c=290\text{kg/cm}^2$
二軸, 三軸圧縮	Launay Gachon Poitevin	1970	7cm 立方体	なし	コンクリート
二軸, 三軸圧縮	Mills Zimmermann	1970	2.25インチ 立方体	グリースとテフロンシート (0.076mm)	コンクリート
二軸 圧縮—圧縮	Rosenthal Glucklich	1970	$\phi 30.5\times 35\text{cm}$ 円筒 (内径25cm)	カードボード (0.20インチ)	コンクリート $\sigma_c=242\text{kg/cm}^2$
三軸 圧縮—振り 引張—振り	岡島	1970	$\phi 15\times 60\text{cm}$ 円筒 (内径10cm)	カップグリッド	コンクリート $\sigma_c=200\text{kg/cm}^2$
三軸 圧縮—引張 (内圧) 引張—引張	岡島	1971	$\phi 15\times 60\text{cm}$ 円筒 (内径10cm)	カップグリッド	コンクリート
二軸 圧縮—圧縮	Buyukozturk Nilson Slate	1971	5×5×0.5インチ スラブ	ブラシ状載荷板	コンクリート $\sigma_c=183\sim221\text{kg/cm}^2$
二軸 圧縮—圧縮	Liu Nilson Slate	1972	5×5×0.5インチ スラブ	ブラシ状載荷板	コンクリート $\sigma_c=210\sim350\text{kg/cm}^2$
二軸 圧縮—圧縮	Taylor Jain	1972	2インチ 立方体	ブラシ状載荷板	軽量コンクリート $\sigma_c=140, 245, 350\text{kg/cm}^2$
三軸 圧縮—圧縮	岡島	1972	$\phi 10\times 20\text{cm}$ 円柱	カップグリッド	普通コンクリートおよび 軽量コンクリート $\sigma_c=200, 300, 350\text{kg/cm}^2$
二軸 圧縮—圧縮	Atan Slate	1973	5×5×0.5インチ スラブ	ブラシ状載荷板	軽量コンクリート $\sigma_c=185, 259\text{kg/cm}^2$ (材令7日)

表—2 既往の複合応力実験一覧

じ、肉眼的にも破壊を生じたことを識別できるような破壊形態に対してあてはまるべき性質の巨視的破壊条件である。

一方、材料の全体的な破壊または崩壊に至らなくても材料内部に散在する空隙、微細な欠陥が応力集中を受けて、材料固有の引張強度と等しくなって破壊を生ずる場合が考えられる。このような場合には、材料内部でのクラックの発生、伝播が生じるが、外部表面には至らず、肉眼で破壊を生じたかどうかを識別することは困難な場合が多い。

このような破壊現象が微視的破壊で、これは材料全体の破壊に至る破壊過程の一段階に相当するものと考えられる。このような微視的破壊に対して適用される破壊条件として、Griffith 説および圧縮力によるクラックの閉塞をも考慮した修正 Griffith 説が考えられる。

ここでは、コンクリートに対して従来適用されている破壊条件の主なものについて簡単に述べる。

1) 最大主応力説

Rankine 説ともいわれ最も古い仮説で、応力が限界応力に達したときに破壊が起こるとする説で、破壊条件は $\sigma_1 = \sigma_c$ or $\sigma_3 = \sigma_t$ ($\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$) (σ_c : 圧縮強度, σ_t : 引張強度) で示される。この説は二軸または三軸圧縮試験結果とは合わないようであるが、引張を含む応力領域ではある程度妥当性があるようである。

2) 最大主歪説

St. Venant によって提唱された説で、材料の破壊が応力でなく歪によって規定されるとした歪仮説で、その条件式は $\epsilon_1 = \epsilon_c$, $\epsilon_3 = \epsilon_t$, (ϵ_c : 圧縮極限歪, ϵ_t : 引張極限歪) で示される。コンクリートの破壊が本質的には引張破壊(分離破壊)である点を考慮するとやや妥当性があるように考えられる。

3) Mohr-Coulomb 説

Coulomb の内部摩擦説としても良く知られている説で、破壊条件がせん断応力と垂直応力との一次の関係で表わされるとしたもので、Mohr 説の一種と考えられ次のように示される。

$$\tau = c - \sigma \tan \phi$$

(c : 粘着力, ϕ : 内部摩擦角)

本説は次に述べる Mohr 説と同様に、土や砂の破壊規準として従来良く使用されている。

4) Mohr 説

破壊時の Mohr の応力円群の包絡線が破壊条件を決定するとする仮説で、破壊時のせん断応力と垂直応力の関係式で一般に表示される。

$$\tau = f(\sigma)$$

Mohr の応力円は最大、最小2主応力によって決定され、中間主応力は破壊条件には関与しないと考えるに立脚しているが、この点に関しては問題が多い。

本仮説はまた最大主応力 σ_1 と最小主応力 σ_3 との関係式、

$$\sigma_3 = f(\sigma_1)$$

で表わすことも可能である。

従来、土質の分野に限らず岩石、コンクリートの破壊条件として採用されている場合も多いが、コンクリートのように圧縮強度と引張強度間に大きな差がある材料ではせん断破壊が生ずる点は問題が多く、形式上示されるようなせん断応力と垂直応力間の関係よりも主応力相互間の関係式と考えた方が妥当である。

5) 正八面体応力説

Nadai によって提唱された仮説で Mohr 説を三次元的に拡張したもので、破壊は八面体せん断応力 τ_{oct} と八面体垂直応力(平均垂直応力) σ_{oct} との関係で表わされると考えたもので $\tau_{oct} = f(\sigma_{oct})$ である。

$$\tau_{oct} = \{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\}^{1/2} / 3$$

$$\sigma_{oct} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$$

である。

τ_{oct} を一定と考えたのが有名な Mises-Huber-Hencky 説(最大せん断弾性歪エネルギー説)で、圧縮強度と引張強度が等しい鋼材のような延性材料に対しては適用されているが、コンクリートのような脆性材料に対しては不適当である。また、Freudenthal による有効応力説も本質的には正八面体応力説と同義である。

6) Griffith 説

Griffith は完全弾性体中に存在する扁平な楕円形のクラックを考え、応力によってクラックが進展した場合の表面エネルギーの増加と、外力によるポテンシャルエネルギーの減少が平衡状態に達したときに引張破壊が生ずると考え、そのときの限界応力を求めた。

これは、

$$\sigma = \sqrt{2E\gamma/\pi c}$$

c : クラックの長半径, γ : 表面エネルギー

E : ヤング係数

で与えられる。さらに、Griffith は潜在クラックから引張破壊の考えを二次元応力状態に拡張し次式を得た。

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 \leq 0 \text{ のとき } \sigma_3 = \sigma_t$$

$$\sigma_1 + 3\sigma_3 > 0 \text{ のとき}$$

$$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + 8\sigma_t(\sigma_1 + \sigma_3) = 0$$

(σ_t : 単軸引張強度)

7) 修正 Griffith 説

Griffith 説ではクラック進展時にも、もとの楕円形を

した潜在クラックが変形しないものと仮定しているが、クラック周辺の応力が圧縮応力であればクラックが閉塞すると考えられるので、McClintock, Walsh は Griffith 理論を次のように修正した。

$$\frac{\mu(\sigma_1 + \sigma_3 - 2\sigma_c) - (\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{1 + \mu^2}}{= 4\sigma_t\sqrt{1 - (\sigma_c/\sigma_t)}}$$

μ : クラック面の摩擦係数

σ_c : クラックが閉じる限界応力

クラックが非常に偏平な場合には $\sigma_c \approx 0$ であるので、

$$\mu(\sigma_1 + \sigma_3) - (\sigma_1 - \sigma_3)\sqrt{1 + \mu^2} = 4\sigma_t$$

と与えられる。

上記 Griffith 説および修正 Griffith 説は本来ガラスの破壊現象を説明するために提案された仮説であり、本質的には内部クラックの伝播という微視的破壊の説明を与えるにすぎない点を銘記すべきであろう。

§ 4. 材料の破壊条件の表示 (破壊曲面)

4.1 破壊曲面

材料の破壊時の主応力状態は、三次元主応力空間内の 1 点で示され、このような点の集合より構成される曲面を破壊曲面といい、これは破壊条件を図示したものである。

モルタル、コンクリート等脆性材料は非均質であり、かつ異方性があるので、厳密には異方性をも考慮した破壊曲面を求めるべきであろうが、ここでは等方均質の仮定に基づいた破壊曲面について考えてみる。

この場合には 3 主応力相互間に互換性がある。

この破壊曲面 (failure surface) は実験によって求められるが、図-1 に示すような概形をしており、静水圧線 (space diagonal, $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$) を軸に円錐状、あるいは釣鐘状に膨らんだ形状をしており、均質等方な材料に静水圧が掛かった場合には破壊が生じないことから、圧縮領域においては破壊曲面は無限に閉じることがない。

一方、引張領域においては破壊曲面の先端が凸状に突出して閉じている。

この破壊曲面の形状を求めるためには、静水圧線とひとつの主応力軸を含む平面 (Rendulic 面または Rendulic-Henkel 面)、および静水圧線に垂直な平面 (直断面, Right Section) で切断した切口曲線を求めればよい。

Rendulic 面上での切口曲線は図-2 に示されるように静水圧線を境にした上下 2 本の曲線が得られ、これらの曲線は土質という圧縮試験 (Compression Test, $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$) および伸張試験 (Extension Test, $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$)

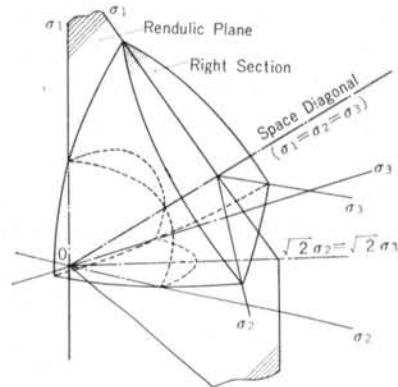


図-1 破壊曲面の概形

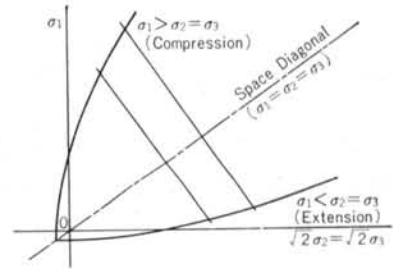


図-2 Rendulic 面

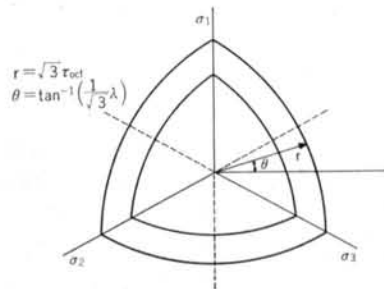


図-3 直断面

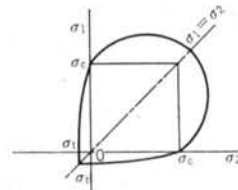


図-4 二次元主応力平面

の応力状態を示している。

また、直断面上での破壊条件は、図-3 に示されるように主応力の和 ($I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$) が一定な平面上の切口曲線を示し、等辺六角形を均等に膨らませたような形状をしており、この曲線上の点を求めるためには静水圧線からの距離 r と角度 θ とが求めればよい。

また、この曲面が二次元主応力平面によって切断された切口曲線が、二次元主応力状態での破壊条件を表わしている(図-4参照)。それで、このようにして求められた破壊曲面を、いかに数式的に表示するかという問題が破壊条件の決定に置き換えられよう。

上述のように、Rendulic 面および直截面上で破壊条件を検討するために、主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ による直交座標系を直截面上の座標系 $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ (σ_3' は面に垂直)

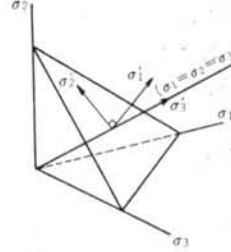


図-5 座標変換

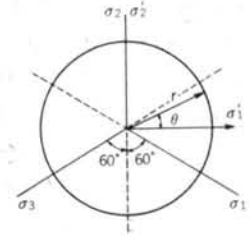


図-6 直截面上での座標

に変換する必要があるが、この場合両者の間には次のような関係が成り立つ(図-5, 図-6参照)。

この場合、 $\sigma_1' \sim \sigma_2'$ 平面上の1点までの距離および角度は次のようである。

$$r = \sqrt{\sigma_1'^2 + \sigma_2'^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3\right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_3\right)^2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} = \sqrt{3} \tau_{oct}$$

$$\tan \theta = \frac{\sigma_2'}{\sigma_1'} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_1 + \sqrt{\frac{2}{3}}\sigma_2 - \frac{1}{\sqrt{6}}\sigma_3}{\frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\sigma_3} = \frac{2\sigma_2 - (\sigma_1 + \sigma_3)}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left\{\frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{\sqrt{3}(\sigma_1 - \sigma_3)}\right\}$$

また、材料が均質の場合には、直截面上の切口曲線において $-30^\circ \leq \theta \leq 30^\circ$ の範囲だけ求めればよく、他の領域はすべてこの部分と同じである。

4.2 既往の各種破壊条件の破壊曲面表示

ここでは、既往の各種破壊条件を破壊曲面で表示する。

そのため、まず種々の破壊条件をすべて主応力 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ で表示し、次にその関係式を直截面上での座標系 $\sigma_1', \sigma_2', \sigma_3'$ に変換することから直截面上での形状が求まる。

同様に Rendulic 面上での形状をも求めることができる。

一例として、Mohr-Coulomb 説に基づく破壊曲面の概形を示すと図-7のようである。

既往の各種破壊条件を Rendulic 面および直截面上に表示すると図-8, 図-9のようである。

この2つの図を基にして検討を加えてみよう。

von Mises 条件(最大せん断弾性歪エネルギー説)は、静水圧線を軸とした半径 $\sqrt{2/3} \sigma_0$ (σ_0 : 単軸圧縮強度)の円柱で表わされる。このことは本条件が直截面上の切口曲線が円で、また Rendulic 面上では静水圧線の上側および下側が等距離にある平行線であることで示される。

同様に正八面体応力説(Nadaiの説)は直截面上の切口曲線が円で、Rendulic 面上では静水圧線に対称な放物線で示されることから分るように、母線が放物線で示される円錐形で表わされる。

最大主応力説は、静水圧線を軸とした正三角柱で示され、最大主歪は直截面上での切口曲線が等辺六角形である六角錐で一義的に表わされる。

また、最大せん断応力説(Trescaの説)の破壊曲面は、静水圧線を軸とした正六角柱で表示される。

Mohr-Coulomb 説は直截面上での切口曲線が等辺六角形で示され、Rendulic 面上での切口曲線は主応力増加とともに直線的に増大していく傾向を示し、等辺六角錐によって示される。この点では最大主歪説と同様な破壊曲面の形状を示すが、最大主歪説では一義的に決定されるのに対し、Mohr-Coulomb 説では最大主応力と最小主応力の関係式により一義的ではない点異なる。

Mohr の二次式では、当然のこととして Mohr-Coulomb 説に類似した形状を示している。しかしながら、Rendulic 面上での切口曲線は放物線で示される点、また直截面上でも等辺六角形の中央部を外側へ膨らませた放物線で表わされる点異なる。

Griffith の破壊条件を破壊曲面に示すと図-10, 11である。本規準は破壊曲面としては特異な形状で示され、Ren-

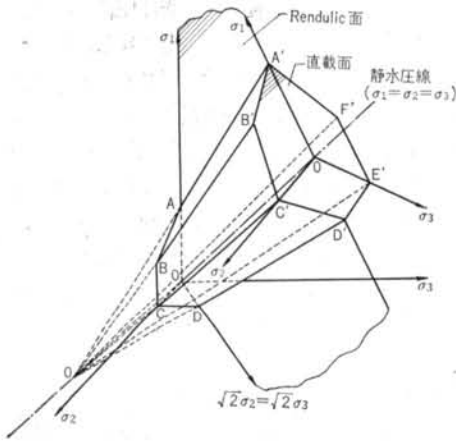


図-7 Mohr-Coulomb 説の破壊曲面

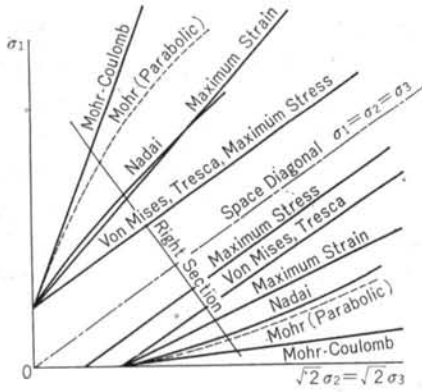


図-8 Rendulic 面上の表示

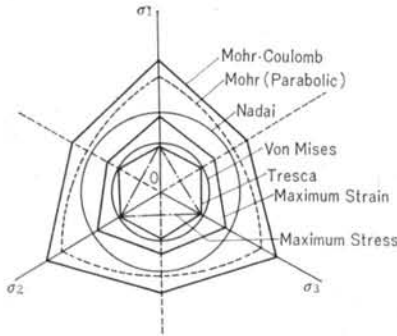


図-9 直截面上の表示

rendulic 面での切口曲線は直線部分と二次式で示される放物線と示される。また直截面による切口曲線で検討すると主応力之和が小さい場合には切口の形状は正三角形で示されるが、以後次第に三角形の辺の中央部が外側に膨らんだ放物線に移行して行き Mohr の二次式的になる。

修正 Griffith 説は Mohr-Coulomb 説と同様な直線関係で表わされる。

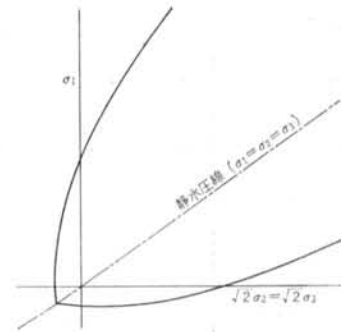


図-10 Griffith 説の Rendulic 面上の表示

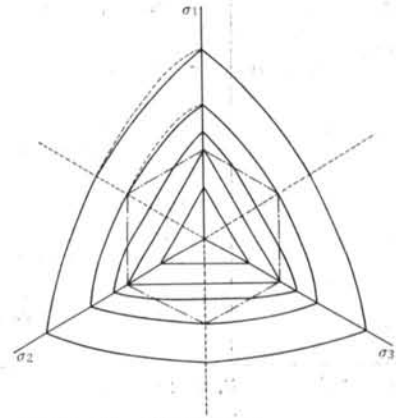


図-11 Griffith 説の直截面上の表示

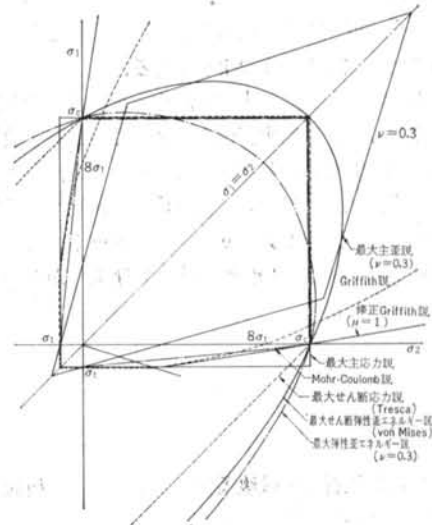


図-12 各種破壊説の二次元表示 (ただし $\sigma_t = \sigma_c/10$)

ここでは最大弾性歪エネルギー説を除外しているが、最大弾性歪エネルギー説では von Mises 説と同様円柱で示される。

また、二次元主応力平面上に既往の各種破壊条件を表

破 壊 説	関 係 式 (二次元)
最大主応力説	$\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = -\sigma_0'$
最大主歪説	$\sigma_1 - \nu\sigma_2 = \sigma_0, \sigma_1 - \nu\sigma_2 = -\sigma_0'$
最大せん断応力説	$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_0$
Mohr-Coulomb 説	$\frac{\sigma_1}{\sigma_0} - \frac{\sigma_3}{\sigma_0'} = 1$
Mohr 説 (二次式)	$(\sigma_1 - \sigma_3)^2 + \alpha(\sigma_1 + \sigma_3) + \beta = 0$
最大弾性歪エネルギー説	$\sigma_1^2 - 2\nu\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$
最大せん断弾性歪エネルギー説	$\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2^2 = \sigma_0^2$
正八面体応力説	$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \alpha\sigma_1\sigma_2 + \frac{\beta}{\beta(\sigma_1 + \sigma_2)} + \gamma = 0$
Griffith 説	$\sigma_1 + 3\sigma_2 > 0$ のとき $\sigma_2 = -\sigma_0$ $\sigma_1 + 3\sigma_2 < 0$ のとき $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 8\sigma_0'(\sigma_1 + \sigma_2) = 0$
修正 Griffith 説	$\mu(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{1 + \mu^2}(\sigma_1 - \sigma_2) = 0$

(注) σ_0 : 単軸圧縮強度, σ_0' : 単軸引張強度

表-3 各種破壊説の二次元主応力表示

示すと図-12のようである。

この場合、既往の各種破壊条件の二次元主応力平面上における関係式は表-3のようである。

本表から解るように最大せん断応力説、最大せん断弾性歪エネルギー説、最大弾性歪エネルギー説は圧縮域および引張域における形状は同様であり、一方、最大主応力説、最大主歪説、Mohr 説、Griffith 説等は圧縮領域と引張領域との形状が異なり、コンクリートの場合には圧縮強度が引張強度の10倍程度大きい事実とかなり一致するようである。

§ 5. 考察

ここでは脆性材料の破壊条件に関する既往の研究を破壊曲面の考えから考察を加える。

ひとくちに脆性材料の破壊条件といっても種々の応力の組み合わせ状態が考えられるので、そのような応力状態すべてを十分に満足するような破壊条件を確立することはかなり困難であろうと思われる。

既往のモルタル、コンクリートに関する研究をまとめ

た表-2からも分るように、従来の研究は圧縮、引張、曲げ、振り等を組み合わせたもので、その種類は非常に多いが主として二軸、三軸の圧縮試験が多く、引張と組み合わせあった試験は純引張試験が困難なために余り行なわれていない。従来引張としては円筒供試体の内圧を利用した引張試験を行なった場合が多い。圧縮または引張以外の応力の組み合わせ実験はその例が極めて少ない。

そこで、ここでは従来実験が行なわれた二軸の圧縮、引張の全領域、および三軸の圧縮領域での実験結果と既往各種破壊条件との検討を行なってみた。

5.1 二軸試験

従来行なわれた二軸圧縮試験では、立方体または直方体の供試体を用いて行なわれたものが多く、供試体の端面と加圧板の摩擦力のために内部の応力状態が真の二軸応力状態でない欠点を生じている。そのため各種減摩擦材を使用した圧縮試験が行なわれているが、それでもなお摩擦の影響はかなり存在しているものと思われる。

また、荷重順序も2方向の応力を比例的に荷重させる比例荷重法と、1方向ずつ荷重を行なう定順序荷重法およびこれらを併せたような方法があり、この荷重順序の影響、また全面荷重が不可能であるために部分荷重を採用せざるを得ないわけで、これらの要因が破壊条件に影響を及ぼしていると考えられよう。

従来行なわれた二軸試験結果を全領域にわたって図示

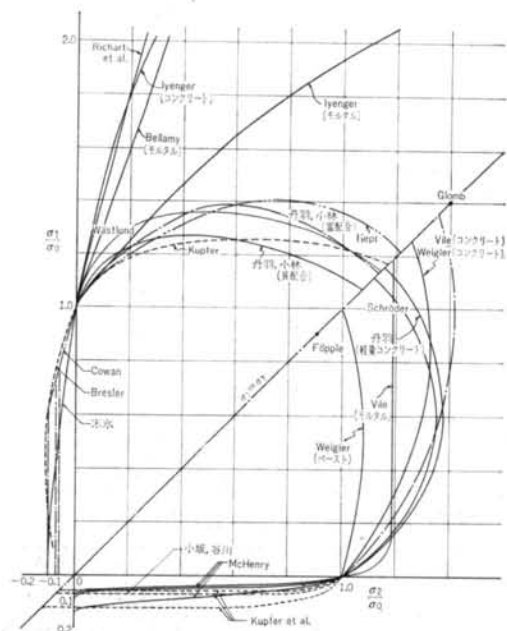


図-13 既往の二軸試験結果

すると、図-13のようである。この図から解るように、圧縮-圧縮領域においては σ_2 の増加とともに σ_1 は放物線的に増加し、 σ_2 が圧縮強度の2~8割のところまで最大となり、以後次第に減少し、二軸等圧縮の場合には単軸圧縮強度の1~4割増となる。

二軸時の最大圧縮強度は圧縮強度の2~4割増の結果を示している。図中の Iyengar²⁰⁾、Richart²¹⁾ 等の結果は液圧を使用した場合の結果であり、他の研究者の結果と大きくはずれており、信頼性に乏しい。

この実験結果は正八面体応力説的である。

圧縮-引張領域では、圧縮強度と引張強度とを直線で結んだ関係で代表される。また、引張-引張の実験は Kupfer²³⁾ 等の実験があるだけにすぎないが、この結果は二軸引張強度が単軸引張強度に等しいことを示している。

これら引張域を含む結果は Mohr 説で説明できる。

いずれにしろ、二次元主応力平面では圧縮域と引張域の性状が異なるので、単一の破壊条件で説明することは不可能であろう。

5.2 三軸試験

三軸試験の場合には圧縮、引張の組み合わせで各種の応力状態が考えられる。しかしながら、この場合にも二軸の試験結果の場合と同様、引張試験を含んだものはその試験が困難なためほとんど見当たらず、主として三軸の圧縮試験に関する実験が行われてきた。この場合の三軸圧縮試験では円柱供試体を使用して周圧と軸圧を掛けた例が多く、この場合水平2方向の荷重が等しい ($\sigma_1 \geq \sigma_2 = \sigma_3$, $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$) 2つの特殊な応力状態の場合しか求めることができない。

最近になって試験機の発達により、立方体または直方体を使用した任意の応力状態での試験が行なわれるようになったが、現在までのところ丹羽等²⁴⁾およびフランスの Launay²⁷⁾ 等による実験結果が見られるにすぎない。

この場合にも供試体の端面摩擦、載荷順序、部分載荷等の影響やコンクリートの本質的欠陥である非均質性、異方性が破壊条件に影響を与えるものと考えられる。

図-14、15は丹羽等による実験結果を示しているが、これによると Rendulic 面上では静水圧線から上側の放物線 (Compression Test) までの距離が下側の放物線 (Extension Test) までの距離より大きく、また直截面上での切口曲線が等辺六角形の各辺の中央部を外側に膨らませたような形状をしている。

この破壊曲面を既往各種破壊条件と比較すると、Mo-

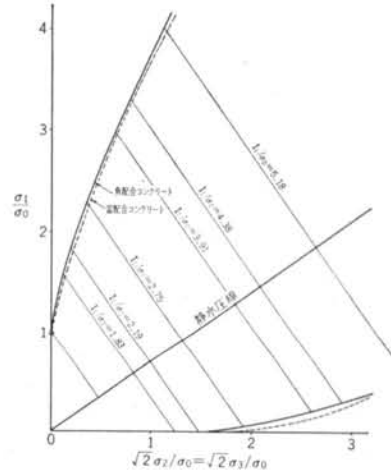


図-14 Rendulic 面上の表示 (by Niwa et al.)

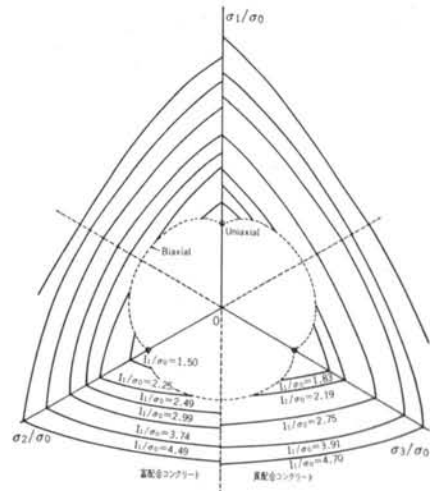


図-15 直截面上の表示 (by Niwa et al.)

hr の二次式が実験結果を最も良く説明できるようにする。

また、Griffith 説も形状が Mohr 説に類似している点からやや妥当性があるといえよう。

以上のように実験結果を既往の破壊条件と比較、検討を行なった場合に、二軸、三軸の試験結果を同時に満足する説は見当たらないようである。

これはコンクリートの異方性、非均質性、実験時の端面摩擦、載荷方法、また三軸圧縮試験での破壊時の決定の困難性等の要因が累積して理想的な試験の遂行を阻止する点、また既往の各種破壊説自体にも各々欠点があるために満足な破壊条件を与えることができない点に原因があるものと思われる。以下各説について述べる。

(1) 最大主応力説

破壊曲面が静水圧線を軸とした正三角柱で表わされる点が実験結果から求められる破壊曲面の形状と異なり、本説は妥当でない。

(2) 最大主歪説

破壊曲面で表示すると直截面上では等辺六角形で示され、大略において Mohr-Coulomb 説と同様な形状で示される点、多少妥当性もあろうが、二軸等圧縮の場合が最大値を示す点の実験結果に合わない。

(3) Mohr 説

Mohr-Coulomb 説では破壊曲面が六角錐で表わされ、破壊曲面の概形としては大略実験結果と合う。ただし、Mohr の二次形式の方が Rendulic 平面および直截面上での切口曲線がともに放物線で示される点からいっそう妥当性がある。

既往の破壊条件の中ではコンクリートの破壊条件としては最も妥当である。

これは次のように考えられる。すなわち、一般に三軸応力状態にある材料内に存在するクラック中、最も破壊を生じ易いクラックは、中間主応力方向に平行な面内に存在する偏平円形ないし針状クラックであって、破壊は中間主応力方向と平行な面内に起こり最大、最小主応力の組み合わせで決定され、中間主応力による影響が少ないからである。

他の破壊説の中では Griffith 説が Mohr の二次形式と同様な形式で表わされるのでやや妥当性がある。

von Mises の説、Tresca の説（最大せん断応力説）、Nadai の説（正八面体応力説）等は破壊曲面の形状が異なり不適當である。

§ 6. まとめ

コンクリートの破壊条件を破壊曲面表示し、実験結果と対応させた場合に最も一致がよいのは Mohr の二次形式であった。しかしながら、本説の場合二軸試験結果に対しては満足でなく、むしろ正八面体応力説の方がうまく説明がつく。

Mohr 説では中間主応力の影響を全く無視しているが、その影響は小さいとはいえ無視できない。

正八面体応力説では中間主応力をも組み込んでおり最大、最小主応力と同等の係数を持つ形で示されているが実験結果と合わない。

それでコンクリートの破壊条件としては Mohr の二次形式と正八面体応力説の中間の条件式で示されよう。

すなわち、破壊条件式としては最大、中間、最小の3主応力を考慮に入れた関係式で中間主応力の係数を小さく示したものが妥当であると考えられる。

最後に、コンクリート等脆性材料の破壊条件に関する研究は最近になってかなり行なわれるようになった。

実験的に破壊条件を求める場合にしろ、理論との照合を行なうにしろ、二軸、三軸の高精度の実験を行なう必要があろう。また、応力の組み合わせ方法にも種々の形式が考えられるが、引張を含んだ実験となると極めて少ない。

引張を含んだ場合には、引張強度が単軸引張強度より小さくなる結果が報告されている例もある。特に純引張と組み合わせさせた三軸試験はその例を見ない。

今後、これらの引張の組み合わせ実験が活発に行なわれることが望まれる。

<参考文献>

- 1) A. Föppl: "Mitteilungen" Mech. Tech. Laboratorium (München) (1900)
- 2) von Kármán: "Festigheitsversuche unter allseitigem Druck" Mittlg. und Forschungsarb. des V. D. I., Heft 118 (1912)
- 3) R. Böker: Dissertation, Technische Hochschule, Aachen (1914)
- 4) M. Roß, A. Eichinger: "Proceedings of 2nd International Congress for Applied Mechanics" Zürich (1926)
- 5) A. A. Griffith: "The Phenomena of Rupture and Flow in Solids" Philosophical Transactions of Royal Society, 221 (1920) pp. 163-198
- 6) F. Richart, A. Brandtzaeg, R. Brown: Bulletin No. 190, Eng. Exp. Sta., University of Illinois (1929)
- 7) A. Leon: Über der Scherfestigkeit des Beton, Vol. 34, 1934~35
- 8) G. Balmer: U.S. Dept. Int. Bureau of Reclamation Struct. Report. Lab. Red. No. Sept. 23 (1949)
- 9) G. Wästlund: "Nya rön Angående betongens grundläggande halbfasthetsegenskaper" Särtryck ur Betong, Vol. 3, 1 Stockholm (1937)
- 10) H. J. Cowan: "The Strength of Plain, Reinforced and Prestressed Concrete under the Action of Combined

- Stresses with Particular Reference to the Combined Bending and Torsion of Rectangular Section" Magazine of Concrete Research, No. 14 (1953)
- 11) B. Bresler, K. S. Pister: "Failure of Plain Concrete under Combined Stresses" Proc. of A. S. C. E., Vol. 81 (1955)
 - 12) A. Freudenthal. "The Inelastic Behavior and Fracture of Concrete" Congr. of Appl. Mech. (1951)
 - 13) B. Bresler, K. S. Pister; "Strength of Concrete under Combined Stresses" Journal of A. C. I., Proc. 55, No. 3, 321 (1958)
 - 14) D. McHenry, J. Karni: "Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stress" Journal of A. C. I., Proc. 54, No. 10, 829 (1958)
 - 15) 坪井善勝, 末永保美: "組合わせ応力のもとにおける無筋コンクリートの破壊に関する実験的研究" 日本建築学会論文報告集第164号 昭和35年2月
 - 16) C. J. Bellamy: "Strength of Concrete under Combined Stress" Journal of A. C. I., Proc. 58, No. 4, 367 (1961)
 - 17) H. Beigler, G. Becker: "Deutscher Ausschuss für Stahlbeton" Ausschuss. Heft 157 (1963)
 - 18) G. S. Robinson: Proc. of A. S. C. E., Vol. 91, No. ST 1, 71 (1967)
 - 19) G. W. D. Vile; "Proc. Int. Conf. Structure of Concrete, London, 1965" (1968) p. 275
 - 20) S. R. Iyengar, K. T. K Chandrashekhara, K. T. Krishnaswamy: Journal of A. C. I., Proc. 62, No. 2, 239 (1965)
 - 21) О. Я. Берг, Н. В. Смирнов: Ветон и жепезобетон, №. 11, 34 (1965)
 - 22) S. Schröder, H. Opitz: Bauplanung-Bautechnik, 22. Heft 4, 190 (1968)
 - 23) H. Kupfer, H. K. Hilsdorf, H. Rüschi: "Behavior of Concrete under Biaxial Stress" Journal of A. C. I., Proc. 66, No. 8, 656 (1969)
 - 24) 丹羽義次, 小林昭一, 平島健一: "二軸圧縮応力状態におけるモルタルの破壊条件" 材料 Vol. 16, No. 161 Feb. (1967) pp. 38~44
 - 25) 小林昭一, 小柳 治: "コンクリートの圧縮域における破壊条件" 材料 Vol. 16, No. 170 Nov. (1967) pp. 43~48
 - 26) 畑野 正: 土木学会論文集, 143, 22 (1967)
 - 27) P. Launay, H. Gachon P. Poitevin: "Deformation et Résistance ultime du Beton sous l'étreinte triaxial" Annal Inst. Tech. Batiment Trav. Publics., No. 269 Mai (1970)
 - 28) M. A. Taylor, A. K. Jain: "Path Dependent Compressive Testing of an All-Lightweight Aggregate Concrete" Journal of A. C. I. Dec. (1972)

