U.D.C. 666.982:669.1-426:539.41.01

清水建設研究所報
第26号昭和51年4月

鋼繊維補強コンクリートの強度推定（その1）

——既往の理論的文献の検討——

高木隼二

§1. まえがき

筆者は昭和48年9月から50年8月の2年間米国イリノイ大学大学院土木工学科に留学する機会を得た．その間に特別研究として Clyde E. Kesler 教授の指導の下に「鋼繊維補強コンクリートの強度推定」(Strength Prediction of Steel Fiber Reinforced Concrete）と題する研究を行なった．その研究では，繊維補強複合材料(金属，プラスチックおよびセメントコンクリート）の繊維による補強機構に関する既往の理論的研究を詳細に検討・考察し，それから得られた知識を基にして，鋼繊維（特に異型の鋼繊維）によって補強されたコンクリートの純引張状態における初亀裂強度およびマトリックス破壊後強度の計算式を理論的に求め，その計算結果を実験により検証した．今回は，この研究のうち「その1」として文献研究について報告し，次回に理論式の誘導とその実験による検証について報告する．

なおここで，当報告中に用いられる記号のうち，共通なものについて記しておく．

d：繊維の直径（in.）

E_c, E_f, E_m：各々，複合材料，繊維，マトリックスの弾性係数（psi）

K_1：短繊維の配向による有効係数

K_2：短繊維の長さによる有効係数

l：繊維の長さ（in.）

l_c：繊維の臨界長さ（critical length）（in.）

p_f：複合材料全体に対する繊維の容積パーセント（%）

V_f, V_m：各々，繊維とマトリックスの容積分率

σ_c, σ_f, σ_m：各々，複合材料，繊維，マトリックスの応力（psi）

τ：繊維とマトリックスの間のせん断応力（psi）

§2. プラスチック系および金属系複合材料の繊維強化機構に関する既往の研究

1960年代の初め頃から，高強度繊維で強度の余り高くないマトリックスを強化する繊維強化複合材料に関する研究がさかんになり，プラスチックや金属などの材料については，数多くの理論的解析的な研究が行なわれてきた．そのような解析的研究が行なわれるようになったのは，繊維強化複合材料の強度や弾性係数などを，多くのテストを繰り返し行なうことなく，その要素となる各材料の性質を用いて推定しようとする要求が高まったためであった．

以下に，プラスチック・金属等の材料について行なわれた既往の解析的研究のうち，繊維補強コンクリート(Fiber Reinforced Concrete；以下 F.R.C. と略す）に直接関係すると考えられる， i）繊維の長さ方向の応力分布， ii）繊維強化複合材料の弾性係数，iii）繊維とマトリックスの付着，およびiv）破壊性状と終局強度について述べる．

2.1 繊維の応力分布

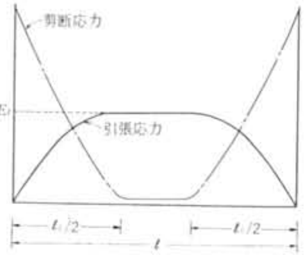
繊維強化複合材料において連続繊維が応力の方向に平行に配置された場合，荷重は繊維のすべての長さにわたって一定であり応力も一定となる．しかし短繊維においてはこの問題はそれほど簡単ではない．これまで多くの研究者が短繊維とマトリックスの界面における繊維方向の応力分布の理論解を示している．この種の研究で最も早いものはCox[1]によって行なわれた．彼の研究では次の3つの仮定を置いている．

ⓐ繊維およびマトリックスは弾性体である．

ⓑ繊維とマトリックスの間の付着は完全であり，スリップは生じない．

ⓒ繊維とマトリックスの横ひずみは等しい．すなわち繊維の両端においては荷重の伝達は行なわれない．

彼の解析の結果の概略図を**図—1**に示す．



図—1 臨界繊維長さ l_c より長い繊維の長さ方向の応力分布[1]

Dow[2] は Cox が検討したモデルにもう 1 つの仮定〝マトリックスは繊維の端部には存在しない″ を加えて検討した．さらに Rosen[3] は Dow のモデルを修正し〝繊維は第一層目としてマトリックスそれ自体により囲まれ，次に繊維とマトリックスの平均的物性を有する材料によって囲まれている″ というモデルを考え検討している．彼の研究では Cox の理論で設けたもの以外に次の仮定を置いている．

ⓐ繊維および繊維とマトリックスの平均的性質を有する材料は引張応力だけを負担する．

ⓑマトリックスはせん断応力だけを負担する．

Dow と Rosen の得た理論解は，Cox の得たものとおおむね等しい傾向を持っている．

以上の研究は繊維もマトリックスも弾性体と仮定しているが，Kelly と Tyson[4] は「繊維は弾性体であるがマトリックスが塑性域にある場合」について研究を行なった．彼らの研究で対象とされたマトリックスは，非常に低い降伏応力を有する銅であり，マトリックスは完全に塑性状態にあると仮定されている．降伏条件は Tresca の最大せん断応力説（材料内の 3 つの最大せん断応力のうち，いずれか 1 つの絶対値がある値に達すると降伏が始まるとする説）が採られている．

2.2 弾性係数

高強度複合材料は例外なく一方向に密に配向した高強度長繊維で補強されており，複合材料の弾性係数を求める研究は，いろいろな荷重状態における，この種の繊維強化複合材料について進められてきた．

Hashin と Rosen[5] は，1964年に長繊維による一方向強化複合材料の弾性係数の上限値と下限値を求める研究を，最少位置エネルギーおよび最少コンプリメンタリー・エネルギーの理論を用いて行なった．彼らの計算式は繊維が規則正しく配列し，繊維とマトリックスの弾性係数の大きさが余り変らない場合には，極めて良い値を示したが，2 つの弾性係数が大きく異なる場合には，計算値と実測値は全く一致しなかった．一方，Hill[6][7] は，横断面方向に等方性を有する一方向強化複合材の弾性係数を計算する方法について研究している．

Heaton[8] は碁盤目に配列した一方向繊維によって強化された複合材料の弾性係数を計算するための〝数値計算法″ について研究した．彼は弾性理論を用い，補強繊維は等しいサイズと無限の長さをもつ円形シリンダーであると仮定している．1971年に Sendeckyj と Yu[9] は繊維の方向に対して直角な荷重がかかった繊維強化複合材料の弾性係数の厳密解を得ている．その研究では繊維は円形を有しランダムに分布していると仮定している．

上で述べた研究は，連続繊維に関するものであるが，この連続繊維で補強された場合に比べて，短繊維で補強された複合材の弾性係数を求めることは極めてむずかしい．

一方向に配列した短繊維強化複合材の弾性係数の計算方法について，Halpin[10] および Halpin と Pagano[11] が研究しており，ランダムに分散した短繊維で補強された複合材の弾性係数の計算については，Nielsen と Chen[12] および Halpin と Pagano[13] が研究している．Nielsen と Chen の研究[12] では一方向強化複合材の，繊維方向と任意の角度を持つ荷重に対する弾性係数を計算し，それらを平均することによって，ランダムに配向している短繊維で補強された複合材の面内ヤング係数を得ている．Halpin と Pagano[13] は複合材料は疑似等方性を有する積層板として扱うことができるという仮定を置いた上で，積層板の理論を用い，複合材料の弾性係数を得るための分析的な計算方法を得ている．

2.3 繊維とマトリックスの付着

短繊維で強化された複合材料では，一般に繊維とマトリックスの間の付着が破壊するために，その複合材料のもつ終局引張強度，および終局曲げ強度は理論的な値よりも小さくなる．Greszczuk[14] は繊維とマトリックスの界面における付着の機構を理論的に解析した．彼は複合材料が破壊する時点における繊維とマトリックスの付着強度を推定するための式を誘導し，さらにフィラメントで強化された複合材料の曲げ剛性およびヤング係数に，その繊維とマトリックスの付着強度が与える影響について研究を行なっている．Copper と Kelly[15] はマトリックスと繊維の間の付着強度によって大きく左右される複合材料のせん断強度，圧縮強度および引張り状態とせん断状態における破壊機構について研究を行なった．Ebert と Gadd[16] は，2 層複合材料の界面における応力状態についての数学モデルを導き，そのモデルを使って

縦応力，弾性性状，降伏等について研究を行なっている．

2.4 破壊性状および終局強度

繊維強化複合材の破壊強度を計算するための理論の中で最もよく用いられているのは，いわゆる複合則といわれるものである．複合則は非常に簡明であるという利点をもち，また，ある種の材料にとっては，その設計計算上，極めて有用であることが認められている．しかしながら，複合則が総ての繊維強化材料に対して万能薬となり得るわけではない．最近では繊維強化複合材料の破壊過程に関する理解が進むことにより，複合則に対して批判的な見解が現われるようになってきた．Tetelman[17] と Zweben[18] は彼らの論文で，これらの問題をかなり突込んで検討している．一方，Rosen[19] は複合則を，統計手法を用いた分析的な方法によって書き換える必要があると主張している．

繊維強化複合材料の破壊性状を研究する上で，弾性破壊力学において最近蓄積されつつある知識を利用することは，極めて有意義なことと思われる．Tetelman[17] は，タングステンと銅の複合材料のように，非常に靱性のあるマトリックスに囲まれた脆性的な高強度繊維を有するシステムの研究に，破壊力学の適用を検討している．

また一方，繊維強化複合材料の破壊過程の解析において，統計的な手法を用いる傾向が近年著しくなってきており，Rosen[19][20] Zweben[18] および Armenakas[21][22] らは，それらについて文献研究を行なっている．

破壊に関する統計的研究は，まず，繊維産業において始められた．Daniels[23] は繊維の束の破壊を統計的見地から検討し，その研究の結果，次のような結論を得た．すなわち，破壊モードは累積的繊維破壊（Cumulative fiber Fracture）の1つであり，1つの繊維が破壊するとその繊維によって負担されていた荷重は，繊維強度の統計分布に従って残っている他の繊維に均一に再分布される．この累積的繊維破壊のモデルに対し Epstein[24] は破壊伝播モード（Fracture Propagation Mode，または Non Cumulative Fracture）によって繊維強度の問題を研究した．この破壊伝播モードは Weakest Link 理論とも呼ばれ，この理論では繊維はその一部分が強度を失えば，システム全体の破壊が生ずるという仮定をとっている．Epstein はその研究の中で，Weibull[25] によって提唱されていた〝強度の分布関数〟（Distribution Function for Strength），いわゆる Weibull 関数を立証している．Gucer と Gurland[26] は，累積破壊モードと破壊伝播モードの比較を行ない，累積破壊モードによる計算は破壊伝播モードによるよりも高い平均強度を与えることを報告している．

上に述べた研究は，繊維強化複合材料の破壊理論の発展の基礎となっているものであり，これらの研究の段階においては，まだ，繊維がマトリックス中に含まれた複合問題についての検討は行なわれなかったが，Rosen[27] によって始めて繊維強化複合材の破壊について統計的手法による研究が行なわれた．彼は強度の低いマトリックス中に，長い繊維を一方向につめ込み，繊維の方向に荷重された状態について研究を行なった．Rosen のこの研究は，Flom[28] らによって多数のウィスカーで補強された複合材料に適用する方向で研究が進められている．

Zweben[29] は，長繊維で強化された繊維強化材料における累積破壊モードと破壊伝播モードの両方について研究を行なった．Zweben の研究では Rosen の研究で検討されなかった試験体寸法が複合材料の強度に与える影響についても考慮されている．

2.5 まとめ

プラスチック系および金属系繊維強化複合材料に関する既往の理論的研究のうち，i) 繊維の応力分布，ii) 複合材の弾性係数，iii) 繊維とマトリックスの付着，および iv) 破壊性状と終局強度，について概論した．この検討の結果，プラスチック，金属などについては理論的研究がかなり突込んで行なわれていることが分った．特に繊維の応力分布や破壊性状等に関する研究は，繊維補強コンクリートの強度推定式を導く上で，極めて重要なヒントを与えてくれるものと思われる．しかしながら，これらの理論を F.R.C. に直接適用することはできない．その理由の中で最も大きなものとして，次の2つが挙げられる．

a）マトリックス（コンクリート）が脆性を有する．

b）マトリックスのひずみ性能が繊維（鋼）のそれに対し極めて小さい（プラスチック，金属等の複合材料では，一般に逆の関係となる）．

これまで多くの研究者が金属やプラスチック等の複合材料について得られた研究結果をもとに，F.R.C. の強度計算式等を得るための努力を払ってきた．以下に F.R.C. の理論的な研究について概論し，その適用性等について考察を加える．

§ 3. 繊維補強コンクリートの強度推定に関する既往の研究

これまで発表されてきた繊維補強コンクリートの強度などの力学的性質を推定する計算式（理論式）は，大きく分けて２つの分野に分けられる．すなわち，線形破壊力学 (Linear Fracture Mechanics) によるものと複合則 (Law of Mixture) によるものである．この章では，それらの既往の理論について検討する．

3.1 線形破壊力学による検討

1963年に Romualdi[30) 31) 32)] らによって発表された繊維間隔説 (Fiber Spacing Concept) は，線形破壊力学 (Linear Fracture Mechanics) に依っており，F.R.C. における補強機構の解明において新しい時代を拓くものであった．Romualdi らの研究が発表されて以来，多くの研究者が彼らの Fiber Spacing Concept を用いて研究を行なっているが，現在では Spacing Concept の適用性については賛否意見が分かれている[33) 34)]．

Romualdi らによる研究

Romualdi ら[30) 31) 32)] は〝繊維の間隔が 0.5 インチより小さくなると，繊維補強コンクリートの引張り状態における初亀裂発生強度 (F.R.C の曲げ試験における応力―ひずみ曲線が直線から外れる時点の強度をいう．以下初亀裂強度と呼ぶ）は増大する〟と報告している．彼らは，この強度増大の理由として，Griffith[35)] の線形破壊力学に基づくモデルを用い，「コンクリートに内存する微小クラックの端部における応力拡大係数 (Stress Intensity Factor) が，繊維が存在することによって減少すること」をあげている．さらに Romualdi らは，引張り状態における初亀裂強度は，$\dfrac{1}{\sqrt{S}}$ に比例すると述べている[31)]．ここで S は平均繊維間隔である．

Romualdi らは，彼らの理論を実証するために実験を行なったが，その１回目の実験では，連続繊維を試験体の長手方向に平行に配置した試験体を用いた．しかし，このような方法で繊維を配置することは，実験的には可能であっても実用的ではないので，２回目の実験では，単繊維を直接コンクリートの中に混入する方法をとった．ただ，この場合には混入された繊維の何割かは，応力の加わる方向に対し効果的に配向しないので，彼らはその有効比も考慮した上で，ランダムに分布した単繊維の間の平均間隔を求める式を提案した．

$$S = 13.8\,d\sqrt{\frac{1}{p_f}} \qquad \cdots\cdots\cdots(1)$$

S＝繊維の平均間隔 (in.)，d＝繊維の直径 (in.)
p_f＝繊維の体積パーセント（%）

Romualdi らは実験結果を理論値と比較し，繊維間隔理論は繊維補強コンクリートに極めて有効であり，これを用いることにより，繊維補強コンクリートの初亀裂強度を推定することが可能であると述べている．

Snyder と Lankard[36)] は鋼短繊維を混入したモルタル・コンクリートについて実験を行ない，その実験結果から「F.R.C. の曲げ試験における初亀裂強度は，繊維間隔が小さくなるに従って増加し，Romualdi の繊維間隔理論は有効である」と述べている．

これに対し Shah ら[37)] は「Romualdi らの実験では繊維間隔を変えるために異なった直径の繊維を用いており計算し直したところ，繊維間隔は初亀裂強度にほとんど影響を与えないことが分った」と述べている．しかし Romualdi[38)] は彼らの研究[32)] が，Shah ら[33) 37)] によって正しく解釈されておらず，初亀裂強度は繊維間隔説によって計算することができる，としている．Shah と Rangan[33)] および Untrauer ら[34)] は「繊維間隔はF.R.C. の引張強度とは直接関係ないが，繊維間隔が小さくなると F.R.C. の靱性が増大する」と述べている．

繊維間隔理論に関するその他の研究

J. N. Kar ら[39)] は Cox[1)] らによって示された短繊維の長繊維に対する付着力の低下，および短繊維の配向の仕方が試験体の型枠表面に近い部分と試験体の中央部分では異なることを考慮して有効繊維間隔を求めた．

$$S_e = 8.85\,d\sqrt{\frac{1}{p_f K_1 \dfrac{l}{K_2 d}\left(1-\dfrac{l}{3K_2 d}\right)}} \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

S_e＝有効繊維間隔 (in.)
p_f＝繊維の容積パーセント
K_1＝使用する試験体によって定まる平均繊維配向係数
K_2＝付着長さ係数

彼らはその論文の中で，繊維補強コンクリートの引張強度は有効繊維間隔の関数として現わすことができる，と述べている．

McKee[40)] は２つの繊維の重心間距離を用いて繊維間隔式を導いた．その繊維間隔は次の式によって与えられている．

$$S = \sqrt[3]{\frac{F_v}{p_f}} \qquad \cdots\cdots\cdots(3)$$

F_v＝１本の繊維の体積（立方インチ）
p_f＝繊維の容積パーセント（%）

ただ，この式では長い繊維の重なり合う影響について考慮していない．

Parimi ら[41] は，確率概念を導入することによって繊維平均間隔を求めている．

$$S=5\sqrt{\frac{\pi}{K_1}}\cdot\frac{d}{\sqrt{p_f}} \qquad \cdots\cdots\cdots(4)$$

p_f=繊維の容積パーセント（%）

K_1=配向による有効係数

K_1 の値は Romualdi[31] らによれば 0.405 であるが Parimi らは 0.637 を主張しており，その値を用いると繊維間隔式は次のようになる．

$$S=11.1\,d/\sqrt{p_f} \qquad \cdots\cdots\cdots(5)$$

彼らは Romualdi らによって提唱された式(1)は余りに安全側にあると主張している．

Swamy[42] は上記の式(2)，(3)，(4)について比較検討を行なった．それによれば，3つの式においては，主要な2つの要因すなわち〝長さに対する付着係数〟と〝直径に対する付着係数〟を考慮していないので，曲げおよび引張強度を正確に推定することはできないと述べている．彼は，これらの要因を考慮して検討した結果，有効繊維間隔 S_e を提唱した．

曲げの初亀裂強度に対しては，

$$S_e=27\sqrt{\frac{d}{p_f l}} \qquad \cdots\cdots\cdots(6)$$

終局曲げ強度に対しては，

$$S_e=25\sqrt{\frac{d}{p_f l}} \qquad \cdots\cdots\cdots(7)$$

この式は，曲げ試験における初亀裂強度および終局強度のよい推定値を与える，と Swamy は述べている．

Chen による研究

Chen[43] は，ガラス繊維補強セメントの亀裂発生時の応力 σ_c を破壊力学に基づいて導いた．

$$\sigma_0=\sqrt{\frac{\pi E G_c}{2\sqrt{2}\,S}} \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

S=繊維の平均間隔，式(1)と同じ（in.）

E, G_c=マトリックスの弾性係数および臨界ひずみエネルギー解放率（psi および $\sqrt{\text{in}}$）

Chen はこの式を Romualdi と同様な方法で求めている．ただ，この式では G_c が必要になっているがコンクリートの G_c は簡単には得られないので，この式は実用的とはいえない．

Buckley による研究

以上述べてきた研究は，すべて繊維間隔説に関したものであるが，Buckley[44] はそれらとは異なり，Griffith の破壊理論[35]に従って，ガラス繊維補強コンクリートの終局強度を計算する式を求めた．

$$\sigma_u=\sqrt{\frac{2TE_c}{(1-\mu^2)\pi C}+\frac{p_f\sigma_f{}^2 l E_c}{928(1-\mu^2)E_f C}} \qquad \cdots\cdots\cdots(9)$$

ここで，σ_u=ガラス繊維補強コンクリートの終局強度（psi）

T=マトリックスの表面エネルギー

μ=マトリックスのポアソン比

σ_f=繊維が引き抜ける時繊維に発生する応力（psi）

C=マトリックスの限界亀裂長さの半分（in.）

p_f=繊維の容積パーセント（%）

上式も限界クラック長さC，および表面エネルギーTがコンクリートでは簡単に得られないので実用的とはいえない．また，この計算式によるとガラス繊維は，ガラス繊維などより高い弾性係数を持つ繊維（例えばスチール繊維）より補強用繊維としてより良い性質を有する，という結論が導かれているが，これは「複合材料の強度を改善するためには，補強用繊維の弾性係数は高いほど良い」[45] という複合理論に反しており，驚くべき結論である．

以上が線形破壊力学を用いて F.R.C. の強度計算式を得るために行なわれた研究の主なものである．

この線形破壊力学を用いる方法は，上で述べてた各研究に関するコメントでも示したように，いろいろな問題点を含んでいる．その問題点のうちで主なものは以下の通りである．

i）繊維間隔理論による理論値は，繊維間隔が小さくなるに従って一般に実験値をかなり大幅に上回る．

ii）繊維間隔理論では，終局強度は計算できず，初亀裂強度だけが対象となる．

iii）計算上 G_c や T などを必要とするが，コンクリートにおいては，これらの値は簡単には得られない．

以上のような理由から，このアプローチは現状では満足すべきものとはいい難い．

3.2 混合則による検討

複合材料の弾性係数（E_c）と強度（σ_c）は混合則によって次のように推定することができる．

$$E_c=K_1K_2E_fV_f+E_mV_m \qquad \cdots\cdots\cdots(10)$$

$$\sigma_c=K_1K_2\sigma_fV_f+\sigma_mV_m \qquad \cdots\cdots\cdots(11)$$

E_c，E_f および E_m はそれぞれ複合材料，繊維およびマトリックスの弾性係数，また σ_c，σ_f，および σ_m は各

々それらの強度，V_m はマトリックスの容積分率，V_f は繊維の容積分率，そして K_1 と K_2 は繊維の配向係数と長さによる有効係数である．多くの研究者が，この理論を使って繊維補強コンクリートの強度を推定する式を提案している．（ただし，研究者[17) 18) 19)]によっては繊維補強コンクリートに混合則を直接適用することに批判的である．）

Pakotiprapha による研究

Pakotiprapha[46)] は繊維補強コンクリートの弾性係数，引張終局強度の推定式を導いた．彼は，その誘導において「繊維はマトリックス内に均一に分布していること」および「繊維はどのような方向にも等しい確率で配向していること」の２つの仮定を置いている．引張における初亀裂発生前の繊維補強コンクリートの弾性係数 E_c は次によって与えられるとしている．

$$E_c=E_mV_m+\phi F_1E_fV_f \quad \cdots\cdots\cdots(12)$$

$F_1=\dfrac{3}{256\overline{\theta}}(12\overline{\theta}+8\sin\overline{\theta}+\sin 4\overline{\theta})$＝配向有効係数

$\overline{\theta}=\sin^{-1}(h/l)$

h＝試験体の厚さ（in.）

l_c＝繊維の臨界長さ（in.）

$$\phi=1-\frac{l_c}{2l}=\text{短繊維の修正係数} \quad \cdots\cdots\cdots(13)$$

彼はまた繊維補強コンクリートの終局引張強度 σ_u を求めたが，その誘導においては「終局引張強度はマトリックスは既に破壊しているので，繊維の降伏強度によって決まる」との仮定を置いている．

$$\sigma_u=\phi F_2\sigma_{fu}V_f \quad \cdots\cdots\cdots(14)$$

$$F_2=\frac{1}{8\theta}(2\overline{\theta}+\sin 2\overline{\theta})$$

σ_{fu}＝繊維の終局強度（psi）

この式の修正係数 ϕ について考えてみると，この係数は長繊維における最大付着応力と短繊維のそれとを比較する形で誘導されているために，$l=\dfrac{l_c}{2}$ のとき，$\phi=0$ となるので，繊維の長さが $\dfrac{l_c}{2}$ より小さい場合には適用することはできない．さらに，鋼繊維補強コンクリートの破壊においては，一般に繊維は降伏強度に達することなく引き抜けるので，式(14)を鋼繊維補強コンクリートに適用することは疑問である．これは実験値が常に理論値よりも小さいことからもうかがわれる．

Mujumdar の研究

Mujumdar[47)] は，ガラス繊維補強モルタルの弾性係数 E_c と終局引張強度 σ_c を計算する式を提案している．

$$\left.\begin{aligned}E_c&=\frac{3}{8}E_fV_f+E_m(1-V_f)\\ \sigma_c&=\frac{3}{8}\sigma_f\left(1-\frac{l_c}{2l}\right)V_f\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(15)$$

ここで 3/8 は，Krenchel[48)] によって求められた繊維の配向有効係数である．なお，式(15)でも式(12)，(14)と同様に繊維長さによる有効係数として $(1-l_c/2l)$ が用いられているが，これは F.R.C. に対しては不適当である．

Spurrier による研究

Aveston，Cooper および Kelly[49) 50)] は繊維補強された脆性材料における亀裂発生の理論を発表している．その研究では，繊維の破壊時のひずみがマトリックスのそれよりも小さい時には，複合材料は大きな１本の亀裂が発生して破壊するのに対し，繊維の破壊時ひずみがマトリックスのそれよりも非常に大きいときには，多数の亀裂が発生することによって破壊する，としている．

この理論を用い，Spurrier[51)] らはガラス繊維補強セメントの引張応力—ひずみ曲線を表わす式を求めた．

一般にガラス繊維補強セメントの引張応力—ひずみ曲線は３つの領域に分けられる．まず，第一の領域では弾性的挙動を示し，次の領域では十分な繊維があれば多数の亀裂が生じ，３番目の領域では疑似塑性変形を示す．Aveston らの理論を用いて，Spurrier らはランダムな２次元配向の短繊維で補強されたガラス繊維補強セメントの例をとって，その引張応力—ひずみ曲線を求める式を導いており，その式はガラス繊維補強石灰プラスターについて行なわれて実験結果によって検証されている．

彼らによって与えられたガラス短繊維補強セメントの亀裂発生前の弾性係数 E_c および終局強度 σ_u は次のとおりである．

$$E_c=\eta E_fV_f+E_mV_m \quad \cdots\cdots\cdots(16)$$

$$\sigma_u=\eta\sigma_{fu}V_f \quad \cdots\cdots\cdots(17)$$

ここで，

$$\left.\begin{aligned}&l\leq\frac{5}{6}l_c\left(2-\frac{\tau_d}{\tau_s}\right)\text{ のとき，}\\ &\quad\eta=\frac{9}{40}\cdot\frac{l}{l_c[2-(\tau_d/\tau_s)]}\\ &l>\frac{5}{6}l_c\left(2-\frac{\tau_d}{\tau_s}\right)\text{ のとき，}\\ &\quad\eta=\frac{3}{8}\left[1-\frac{5}{12}\cdot\frac{l_c}{l}\left(2-\frac{\tau_d}{\tau_s}\right)\right]\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots(18)$$

τ_d：界面の動的せん断強度（psi.）

τ_s：界面の静的せん断強度（psi.）

σ_{fu}：繊維の終局強度（psi.）

Swamy による研究

Swamy[42] は混合則を修正し，繊維補強コンクリートの初亀裂強度，および終局破壊強度を求める式を提唱した．彼はその誘導において，以下の仮定を置いている．

1）繊維補強コンクリートは繊維の引き抜けによってのみ破壊が生じる．

2）マトリックスの破壊係数（Modulus of Rupture）はある係数によって，その直接引張強度に変換することができる．

3）繊維の配向係数は Romualdi[31] によって求められた 0.405 とする．

彼は最終的に次の式を得ている．

$$\sigma_c = A\sigma_m V_m + \alpha\, 0.82\, \tau\, V_f \frac{l}{d} \qquad \cdots\cdots\cdots(19)$$

ここで，

σ_c，σ_m＝繊維補強コンクリートおよびマトリックスの破壊係数（N/mm^2）

α，A＝実験定数

式(19)を用いて，多くの他の研究者によって得られた曲げ強度のデータを検討し，初亀裂強度 σ_{fc}，および終局破壊強度 σ_u に対する回帰分析の結果，次の２式が得られた．（単位＝N/mm^2）

$$\sigma_{fc} = 0.843\,\sigma_m V_m + 2.93 V_f \frac{l}{d} \qquad \cdots\cdots\cdots(20)$$

$$\sigma_u = 0.97\,\sigma_m V_m + 3.41 V_f \frac{l}{d} \qquad \cdots\cdots\cdots(21)$$

式(20)および(21)から初亀裂強度に対する付着強度 $\tau = 3.75 N/mm^2$，終局強度に対するそれは $\tau = 4.15 N/mm^2$ が得られた．彼の理論に従えば，繊維補強コンクリートにおける初亀裂は付着のスリップによって起き，次に繊維の漸進的な引き抜けが起こり，最終的には繊維とマトリックスの間の相関せん断応力が終局付着強度に達した時に破壊が生じる．

Swamy の研究とは別に，同様の式が ACI 544 委員会レポート[52] と A. N. Naaman[54] によって提唱されている．

ACI 544 委員会による式は，

$$\sigma_c = A\sigma_m(1 - V_f) + BV_f \frac{l}{d} \qquad \cdots\cdots\cdots(22)$$

A，B＝実験定数

上記の式は実験式であり，理論的な裏付けはない．しかし，一般にこのタイプの式では，未知常数 A，B を決定するための十分なデータがあれば，良い推定値を得ることができる．

Naaman による統計的研究

Naaman[54] は繊維補強コンクリートの引張強度を計算するための分析モデルについて研究した．そのモデルは次に述べるような特徴を持っている．

1）モデルは主に統計理論と混合則によっている．

2）モデルは複合材料の亀裂発生以前および亀裂発生後の両方の挙動をシュミレートするように作られている．

3）亀裂発生後の破壊モードは靱性を有すると仮定している．

4）コンクリート中における繊維の統計分布はポアソン分布に従うと仮定している．

5）繊維の強度は，Weakest link theory によるとしている．

6）クラック平面を横切る繊維の数などの要因は確率密度関数によっている．

7）このモデルによって複合材料の初亀裂強度および亀裂発生後強度の確率分布関数と確率累積関数を決定することができる．

彼は１つの環要素（link member）に対する複合材料の初亀裂強度 $\overline{\sigma_{fc}}$ と亀裂発生後強度 $\overline{\sigma_u}$ の期待値（Expected value）を導いた．

$$\overline{\sigma_{fc}} = \overline{\sigma_{mu}}(1 - V_f) + \alpha\overline{\tau} V_f \frac{l}{d} \qquad \cdots\cdots\cdots(23)$$

$$\overline{\sigma_u} = \frac{1}{\pi}\,\overline{\tau}\, V_f \frac{l}{d} \qquad \cdots\cdots\cdots(24)$$

ここで，

$\overline{\sigma_{mu}}$＝マトリックスの平均終局強度（psi）

α＝実験常数

$\overline{\tau}$＝繊維とマトリックスの平均付着強度（psi）

最終的に，彼は Weakest link theory を用いて N 個の環をもつ引張試験体の初亀裂強度および亀裂発生後強度を求めた．

亀裂発生後強度の理論値と測定値の比較の結果，両者の間にいくぶん差が認められた．この差は繊維の数が多いほど大きくなるので，これは繊維の数が多くなると繊維１本当りの付着強度が落ちるためではないかと説明している．

Naaman の得た式のうち，式(24)は理論式であるが，式(23)は式(19)と同様に実験式であり，係数 α を決めるために多くのデータが必要となる．

彼の式によって得られる推定値がどれ程正確であるかという問題は別にしても，F.R.C. の理論解析に初めて本格的に統計理論を導入した点は大いに認められるべき所

であり，今後この種の研究が更に押し進められることが望まれる．

3.3 その他の研究

これまで述べてきた2つの分類に入らない，いくつかの研究があるので，まとめてここで述べる．

Lankard[55] は有効繊維付着面積 B を提唱している．

$$B=\pi dl^2n/L$$

ここで，

n＝試験体中の繊維数

L＝試験体の長さ

彼は B を用いることにより F.R.C. の終局曲げ強度を推定することができると述べている．

短繊維による補強効率は，その繊維の配向状態による有効係数（配向有効係数）と，長さによる有効係数（長さ有効係数）の2つに分けて考えることができる．繊維補強コンクリートの配向有効係数を求める一番最初の試みは Romualdi ら[31] によって行なわれた．彼らは短繊維が3次元的に総ての方向に等しい確率で配向する場合の配向有効係数として，0.41の値を得ている．Parimi[41] らは，Romualdi とはやや異なった方法で 0.637 を得ている．Abolite[53] と Kar ら[39] はコンクリートの試験体の表面近くと試験体内部における繊維の配向の仕方のちがいを考慮に入れて，この問題を検討し，Abolite[53] はコンクリート試験体の内部における配向有効係数として 0.333，表面近くの場合は 0.50 であるとした．これに対し，Kar ら[39] は試験体表面から十分離れている部分における配向有効係数は0.33，表面に十分に近いところにおけるそれは 0.825 であるとした．このように配向有効係数に関しては比較的多くの提案があるのに対して，長さに対する有効係数としては式(13)が唯一のものである．しかし，この式は前項でも述べたように，繊維が l_c より短かい場合には適用できない．

以上は，配向と長さの2つの有効係数を別々に考えたものであるが，この2つの係数相互の影響について検討したものに Laws[56] の研究がある．彼女は短繊維が一方向にそろっている場合，2次元ランダムに分散している場合，および3次元ランダムに分散している場合の3つの状態における有効係数を求めた．Laws はその結果から次のような結論を導いている．すなわち「長さと配向の2つの有効係数は，これまで考えられていたような各々の係数の積で単純に現わすことはできない．また，マトリックスにクラックが生じる前と後では，これらの有効係数は異なる.」彼女の得た，配向と長さの両方を考慮した有効係数 η は式(18)に示されている．

3.4 まとめ

F.R.C. の強度推定について，これまで提案されてきた多くの式を，線形破壊力学説（繊維間隔説を含む）と混合則の2つに大きく分類し，その実際への適用性などについて検討した．各式をまとめて**表—1** に示す．これらの式のもつ欠点等については各論で述べたとおりであるが，全体を通していえることは鋼繊維が異形となった場合の F.R.C. の純引張状態における初亀裂強度および亀裂発生後強度を計算できる式がないということである．それらの計算式の必要性については次章で述べる．

§ 4. 異形鋼繊維補強コンクリートの強度計算式の必要性

F.R.C. の強度増大は繊維の付着強度が極めて重要な要因になる．Tattersall[57] によれば，F.R.C. の引張強度等の性質を向上するためには，異形繊維を用いるのが最も効果的であることが実験的に確かめられている．

これまで F.R.C. の引張強度を得る試みはその多くが，曲げ試験の値（曲げ破壊係数）から求められているが，この計算過程では〝コンクリート試験体断面におけるひずみ分布は直線である〟という仮定を置いている．しかし，F.R.C. の場合には，コンクリートが引張り破壊を生じた後，繊維が順次引き抜けることにより見かけのひずみ分布は直線とならず，上記の仮定は妥当でないので計算値が純引張試験による値と異なるのは当然といえよう．F.R.C. の曲げ試験結果から，引張強度を得ようとする試みは Robinson[58] らによって行なわれているが今のところ，決定的なものは出ていない．このことから現状では，F.R.C. の引張強度を知るためには純引張試験を行なうことが必要である．

F.R.C. は，プレインコンクリートに比べ，初亀裂強度が向上すると共に靱性が飛躍的に伸び，一種の疑似延性を示すようになる．**図—2** に F.R.C. の純引張試験の荷重—変位関係を示す．**図—2** において，荷重が A 点に達するまではマトリックスと繊維が共同で荷重を負担しているが，A点に達するとマトリックスは破断し，荷重はB点まで落ちる．B点から繊維の引き抜けによる荷重の増大が生じ，亀裂後強度（Post Cracking Strength）C点に達する．このCの値は繊維の形状等により大きく異なり，直線繊維（straight fiber）の場合に比べ，異形繊維は極めて大きな亀裂後強度を生じる．このように，マトリックス破断以後にも荷重が負担されるところが，プレインコンクリートと大きく異なる点であり，F.R.C.

の持つ性質を十分に発揮させようとするならば，初亀裂強度A点と共に，亀裂後強度C点を知っておく必要がある．さらにまた，今後，設計方法が現在の弾性設計法から，終局強度設計法に変っていく傾向があることを考えると，コンクリートが靭性を有することは，非常に大きな意味を有する．この点からも，より大きな靭性が得られる異形鋼繊維を用いたF.R.C.の初亀裂強度，および亀裂後強度を推定する計算方法の開発が望まれる．

これまで行なわれてきたF.R.C.の強度計算式を得るための研究は，大きく分けて，線形破壊力学（繊維間隔説を含む）を用いるものと，複合則によるものがあった．しかしこれらのいずれの式をもってしても，上で述べた目的に合致するものは得られていないのが実情である．以上のような観点から，筆者は異形鋼繊維補強コンクリートの強度推定式を理論的に導き，その式の妥当性を実験により検証したが，その理論の誘導と実験による検証については次号にて報告する．

	研究者名	提案式
繊維間隔説（線形破壊力学説）	Romualdi	$\overset{(*1)}{\sigma_{fc}}=f(\frac{1}{\sqrt{S}})$、$S=13.8d/\sqrt{p_f}$
	Kar	〃 $S=8.85d\sqrt{p_f K_1 \frac{\frac{1}{\ell}}{K_2 d}(1-\frac{\ell}{3K_2 d})}$
	McKee	〃 $S=\sqrt[3]{Fv/p_f}$
	Parimi	〃 $S=5\sqrt{\pi d^2/K_1 p_f}=11.1d/\sqrt{p_f}$
	Swamy	〃 $S=A\sqrt{d/p_f \ell}$ 初亀裂強度：A=27 終局強度：A=25
	Chen	$\sigma_{fc}=\sqrt{\frac{\pi E_m G_{cm}}{2\sqrt{2}\,S}}$ $S=13.8d/\sqrt{p_f}$
線形破壊力学説	Buckley	$\overset{(*2)}{\sigma_u}=\sqrt{\frac{2TE_c}{(1-\mu^2)\pi C}+\frac{p_f\sigma_f^2 \ell E_c}{928(1-\mu^2)E_f C}}$
混合則	一般式	$E=K_1K_2E_fV_f+E_mV_m$ $\sigma=K_1K_2\sigma_fV_f+\sigma_mV_m$
	Pakotiprapha	$E_{fc}=E_mV_m+\varphi F_1E_fV_f$ $F_1=\frac{3}{256\bar{\theta}}(12\bar{\theta}+8sin\bar{\theta}+sin4\bar{\theta})$ $\bar{\theta}=sin^{-1}(h/\ell)$ $\varphi=1-\frac{\ell c}{2\ell}$ $\sigma_u=\varphi F_2\sigma_{fu}V_f$ $F_2=\frac{1}{8\bar{\theta}}(2\bar{\theta}+sin2\bar{\theta})$
	Majumdar	$\sigma_{fc}=\frac{3}{8}\sigma_fV_f+\sigma_mV_m$ $\sigma_u=\frac{3}{8}\sigma_{fu}(1-\frac{\ell_c}{2\ell})V_f$
	Swamy	$\sigma_{fc}=0.843\sigma_mV_m+2.93V_f\frac{\ell}{d}$ $\sigma_u=0.97\sigma_mV_m+3.41V_f\frac{\ell}{d}$
	Naaman	$\sigma_{fc}=\sigma_{mu}(1-V_f)+\alpha\tau V_f\frac{\ell}{d}$ $\sigma_u=\frac{1}{\pi}\tau V_f\frac{\ell}{d}$
	Spurrier	$\sigma_{fc}=\eta\sigma_fV_f+\sigma_mV_m$ $\sigma_u=\eta\sigma_{fu}V_f$ ここで $\ell\leqq\frac{5}{8}\ell c(2-\frac{\tau d}{\tau s})$のとき $\eta=\frac{9}{40}\frac{\ell}{\ell c[2-(\tau d/\tau s)]}$ $\ell>\frac{5}{8}\ell c(2-\frac{\tau d}{\tau s})$のとき $\eta=\frac{3}{8}[1-\frac{5}{12}\frac{\ell c}{\ell}(2-\frac{\tau d}{\tau s})]$
その他	Lankard	$\sigma=f(B)$, $B=\pi d\ell^2 n/L$

*1）添字のfcは初亀裂（*first crack*）強度を表わす。

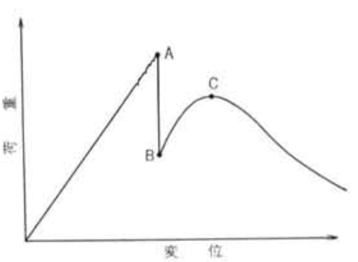
*2）添字のuは終局（*ultimate*）強度を表わす。

表—1 既往のF.R.C.強度計算式一覧表

§5. まとめ

鋼繊維補強コンクリートは，従来のコンクリートにくらべ引張りや曲げ強度，耐亀裂性や耐衝撃性などの性能が向上し今後いろいろな方面に適用が期待される新しい材料である．特に繊維を異形とした時には，この性能の向上は著しい．

この研究は，そのようなすぐれた性能をもつ鋼繊維補強コンクリートの強度計算式を理論的に求めることを目的として行なわれたが，この報告では「その1」として既往の理論的研究の検討について論述した．そこでは，まず，F.R.C.よりも長い歴史をもつプラスチック系および金属系複合材料の理論的研究を検討し，次にそれから得られた知識を基に，既往のF.R.C.強度計算式についてその実用性などを詳細に検討した．その結果，これまで提案されている計算式では，異形鋼繊維補強コンクリートの引張強度を正しく推定することができないことが明らかになった．この事実をふまえて，異形鋼繊維補強コンクリートの引張強度計算



図—2 F.R.C.の純引張試験における荷重—変位曲線

式を理論的に求め，その式の実用性を実験で確かめた　　にて報告する．
が，この理論式の誘導と実験による検証については次号

＜参考文献＞

1) Cox, H. L.: "The Elasticity and Strength of Paper and Other Fibrous Materials" Brit. Journal of App. Physics (London), Vol. 3, March 1952.

2) Down, N. F.: "Study of Stresses Near a Discontinuity in a Filament Reinforced Composite Metal" General Electric Company Report TISR63SD61, p. 1963

3) Rosen, B. W.: "Mechanics of Composite Strengthening" Fiber Composite Materials, Amer. Society for Metals, 1964

4) Kelly, A., & Tyson, W. R.: Journal of Mech. Phys. Solids, Vol. 13, No. 6, p. 329

5) Hashin, Z. & Rosen, B. W.: "The Elastic Moduli of Fiber-Reinforced Materials" Journal of Appl. Mech., Vol. 31, No. 6, pp. 223～232, 1964

6) Hill, R.: "Theory of Mechanical Properties of Fiber-Strengthened Materials" Journal of Mech. and Phys. of Solids, Vol. 12, pp. 199～212, 1964

7) Hill, R., "Theory of Mechanical Properties of Fiber-Strengthened Materials" Journal of Mech. and Phys. of Solids, Vol. 13, pp. 189～198, 1967

8) Heaton, M. C.: "A Calculation of the Elastic Constants of a Unidirectional Fiber-Reinforced Composite" Brit. Journal of App. Phys., Series 2, Vol. 1, pp. 1039～1048, 1968

9) Sendeckyj, G. P. & Yu, E. W.: "Some Exact Results in Transveres Deformation of Fiber-Reinforced Composites" Journal of Comp. Mater., Vol. 5, p. 533, 1971

10) Halpin, J. C.: "Stiffness and Expansion Estimates for Oriented Short Fiber Composites" Jour. of Comp. Mater. Vol. 3, p. 732, 1969

11) Halpin, J. C. & Pagano, N. J.: "Stiffness and Expansion Estimates for Oriented and Random Fibrous Composites" AFML-TR-69-341, 1970

12) Nielsen, L. E. & Chen, P. E.: "Young's Modulus of Composites Filled with Randomly Oriented Fibers" Jour. of Mater., Vol. 2, p. 352, 1968

13) Halpin, J. C. & Pagano, N. J.: "The Laminate Approximation for Randomly Oriented Fibrous Composites' Jour. of Comp. Mater., Vol. 3, p. 720, 1969

14) Greszczuk, L. B.: "Theoretical Studies of the Mechanics of the Fiber-Matrix Interface in Composites" Interfaces in Compositions, ASTM STP-452, pp. 42～58, 1969

15) Copper, G. A. & Kelly, A.: "Role of the Interface in the Fracture of Fiber-Composite Materials" ASTM STP-452, pp. 90～106, 1969

16) Ebert, L. J. & Gadd, J. D.: "A Mathematical Model for Mechanical Behavior of Interfaces in Composite Materials" Fiber Composite Material, Amer. Soc. for Metals, 1964

17) Tetelman, A. S.: "Fracture Processes in Fiber Composite Materials" Comp. Mater. Testing and Design, ASTM STP 460, 1969

18) Zweben, C.: "Tensile Strength of FiberReinforced Composites: Basic Concepts and Recent Development" Comp. Marer. Testing and Design, ASTM STP 460, pp. 528～539, 1969

19) Rosen, B. W.: "Strength of Uniaxial Fibrous Composites" Mech. of Comp. Mater., Proceedings of the Fifth Symposium on Naval Structural Mechanics, Pergamon Press, pp. 621～651, 1970

20) Rosen, B. W.: "Mechanics of Composite Strengthening" Cahpter 3 of Fiber Composite Materials, Amer. Soc. for Metals, pp. 37～75, 1964

21) Armenakas, A. E., et al.: "Strength of Glass-Fiber Bundles and Composites Subjected to Slow Rates of Straining" Technical Report AFML-TR-69-314, Wright-Patterson Air Force Base, March 1970

22) Armenakas, A. E., et al.: "Statistical Theories of Strength of Bundles and Fiber-Reinforced Composites" Technical Report AFML-TR-70-3, Wright-Patterson Air Force Base, May 1970

23) Daniels, H. E.: "The Statistical Theory of the Strength of Bundles of Threads: I" Proc. Roy. Soc. Series A, Vol. 183, No. A995, pp. 405～435, (1944～45)

24) Epstein, B.: "Statistical Aspects of Fracture Problems" Jour. Appl. Physics, Vol. 19, No. 2, pp. 140～147, 1948

25) Weibull, W.: "A Statistical Theory of the Strength of Materials" Ing. Vetenskaps Akad. Handl., No. 151 (1939); "The Phenomenon of Rupture in Solids" Ibid., No. 153 (1939)

26) Gucer, D. E. & Gurland, J.: "Comparison of the Statistics of Two Fracture Modes" Jour. Mech. Phys. Solids, Vol. 10, pp. 356～373, 1962
27) Rosen, B. W.: "Tensile Failure of Fibrous Composites" Amer. Inst. Aero. Astro Jour., Vol. 2, No. 11, pp. 1985～1991, 1964
28) Flom, D. G., et al.: "High Strength High Modulus, Whisker Reinforced Plastic Composites" Technical Report AFML-TR-66-362, Wright-Patterson Air Force Base, February 1967
29) Zweben, C.: "Tensile Failure of Fiber Composites" Amer. Inst. Aero. Astro. Jour., Vol. 6, No. 12, pp. 2352～2311, 1968
30) Romualdi, J. P. & Batson, G. B.: "Behavior of Reinforced Concrete Beams with Closely Spaced Reinforcement" Jour. Amer. Concr. Inst., 60 (6), pp. 775～789, 1963
31) Romualdi, J. P. & Batson, G. B.: Proc. ASCE, Jour. Eng. Mech. Div., 89, pp. 147～168, 1963
32) Romualdi, J. P. & Mandel, J. A.: "Tensile Strength of Concrete Affected by Uniformly Distributed and Closely Spaced Short Lengths of Wire Reinforcement" Jour. Amer. Concr. Inst., 61 (6), pp. 657～671, 1964
33) Shah, S. P. & Rangan, B. V.: "Fiber Reinforced Concrete Properties" Jour. Amer. Concr. Inst., 68, pp. 126～135, 1971
34) Untrauer, R. S. & Works, R. E.: Discussion of Reference 33, Jour. Amer. Concr. Inst., 61 (12), 1964
35) Griffith, A. A.: "The Phenomena of Rupture and Flaw" Proc. Int. Congr. Appl. Mech., 1924
36) Snyder, M. J. & Lankard, D. R.: "Factors Affecting the Strength of Steel Fibrous Concrete" Jour. Amer. Concr. Inst., 69, pp. 96～100, 1972
37) Broms, B. B. & Shah, S. P.: Discussion of Reference 32, Proc. ASCE, Jour. Engr. Mech. Div., 90 (EM1), pp. 167～171, 1964
38) Romualdi, J. P.: Discussion of Reference 38, Jour. Amer. Concr. Inst., 68 (8), p. 627, 1971
39) Kar, J. N., et al.: "Strength of Fiber Reinforced Concrete" Jour. of Structural Division, Proceedings of ASCE, May 1972
40) McKee, D. C.: "The Properties of an Expansive Cement-Mortar Reinforced with Random Wire Fibers" Ph. D. Thesis, University of Illinois, Urbana, 1969
41) Parimi, R. R., et al.: "Effectiveness of Random Fibers in Fiber-Reinforced Concrete" International Symposium in Kyoto, Fractur of Material, 1972
42) Swamy, P. S., et al.: "The Mechanics of Fiber Reinforcement of Cement Matrix" ACI Special Publication SP-44, 1974
43) Chen, H. C., et al.: "The Theoretical Prediction of the Cracking Stress of Glass Fiber Reinforced Inorganic Cement" Jour. of Materials Science, 7, 1972
44) Buckley, E. L.: "Investigations of Alternative Fiber Reinforcements for Portland Cement Concrete" Research Report TR-2-72, Construction Research Center, University of Texas, November 1972
45) Holistor, G. S. & Thomas, C.: "Fiber-Reinforced Materials" Elsevier, Amsterdam, 1966
46) Pakotiprapha, B., et al.: "Mechanical Properties of Cement Mortar with Randomly Oriented Short Steel Wires" Magazine of Concrete Research, Vol. 26, No. 86, March 1974
47) Mujumdar, A. J., et al.: "Reinforcement of Cements and Gypsum Plaster by Glass Fibers" Bldg. Res. Stat. Current Paper, CP 40/70, Dec. 1970
48) Krenchel, H.: "Fiber Reinforcement" Akademisk Förlag, Copenhagen, 1964
49) Aveston, J., Cooper, G. A. & Kelly, A.: "Single and Multiple Fracture" Proc. Conf. Props. Fibre Composite, pp. 15～26, 1972
50) Aveston, J. & Kelly, A.: "Theory of Multiple Fracture of Fibrous Composites" J. Mater. Sci., 8, p. 352, 1973
51) Spurrier, J. & Luxmoore, A.: "Theoretical and Experimental Tensile Behavior of Fiber-Reinforced Cementitious Materials" Fiber Science and Technology, (6), 1973
52) ACI Committee 544: "State-of-the-Art Report on Fiber Reinforced Concrete" ACI Journal, November 1973
53) Abolitz, A. L.: Discussion of reference 31, Jour. Amer. Concr. Inst., 61 (12), p. 1651, 1964
54) Naaman, A. N.: "A Statistical Theory of Strength for Fiber Reinforced Concrete" Ph. D. Thesis, MIT, August 1972
55) Lankard, D.: "Prediction of the Flexural Strength Properties of Steel Fibrous Concrete" Fibrous Concrete, Construction Material for the Seventies (May 1-3, 1972) Conf. Proc. M-28; U. S. Army Const. Engr. Res. Lab., Champaign, Illinois, 1972
56) Laws, V.: "The Efficiency of Fibrous Reinforcement of Brittle Matrices" Jour. Phys. D., 4, pp. 1737～1746, 1971
57) Tattersall, G. H. & Urbarowicz, C. R.: "Bond Strength in Steel Fibre Reinforced Concrete" Mag. Concr. Res., 26, pp. 105～113, 1974

58) Robinson, A. R., et al.: "Concrete for Tunnel Liners" Univ. of Ill., Dep. of Civil Engr., Aug. 1974