

コンクリート構造体の非線形熱伝導問題に関する一考察（その1）

生 駒 哲 夫

§ 1. はじめに

本報告は専ら、非線形熱伝導問題（半無限体）の一解法について述べるものであるが、それに先立って、この伝導問題が、コンクリート構造体に関する熱の関連問題の中で、どういう位置付けをもつかを予め明らかにするために、その概略について簡単にふれてみたい。

今日、コンクリート構造体に対する温度、あるいは熱の影響は、その関連分野においては極めて重大であるにもかかわらず、それについての因果関係は決定的な形では、まだほとんど解明されていない、というのが実情である。それはおそらく、コンクリートが水分と骨材、セメントペースト、およびキャピラリー・ポアとゲル・ポアとから成る多孔質複合材料であって、しかもその熱的性状を支配するパラメーターが数多く存在していて、かつ構成材料の物性定数（例えば、膨張係数、比熱、密度、熱伝導係数、etc.）の多くが輸送の性質¹⁾をもっている、ということに帰因しているからと推察される。

しかしながらコンクリートが示すこのような複雑な熱的な振舞いにもかかわらず、とりわけ熱伝導と、それに伴う熱応力とを正しく把握することは、構造力学的にも特に急務な今日の課題であると考えられる。具体的には原子力施設のコンクリート構造物（PCR、コンテナメント）や液化天然ガス（LNG）のコンクリートタンクの熱的挙動、あるいは火災を受けた一般構造物の熱的損傷の度合いを構造力学的に推定することなどは、その重要な一例といえよう。

ところで、元来、金属や高分子材料の方面では、外から与えられる温度範囲が狭く²⁾、かつ温度の時間的変化率が小さい限りにおいては、熱弾性の基礎方程式系の中の慣性項が無視できる³⁾ため、問題を熱伝導問題と熱応力問題とに分離することができる。

しかし、一方のコンクリートの場合には、先に述べたように、それが無秩序な多孔質複合材料であるという特性に加えて、不可避的に水分の役割（特に100℃前後まで

は自由水が、また約400℃以上においては結晶水が関与してくる）が、その熱による変形挙動をより複雑なものにしてしまい、従来から金属やポリマーに対してなされてきたような取り扱い、ほとんど現実性を失ってしまうと考えられる。そのことは、次の事実からも容易に理解されるであろう。

コンクリート構造が外部から熱を受けると、その内部では温度勾配、あるいは圧力勾配に依存して、水分の拡散が生じ、外部に向っては表面から水蒸気として散逸が起る。その結果、コンクリートは必然的にその水分含有量勾配、および温度勾配に応じて、微視的にはキャピラリーの膨張、収縮となって現われ、また、巨視的には構造体全体としての膨張、収縮変形として現われるようになる。

そうした変形メカニズムの要因としては、大きくは物理的なものと、化学的なものの2つが考えられる、とされているが⁴⁾、それらの可逆過程（物理的体積変化）と、非可逆過程（化学的体積変化）^{注1)}とはそのまま、当然エネルギー保存則によって塑性変形を生じなければならなくなる。乾燥収縮、クリープおよび収縮亀裂などがそれに当るであろう^{注2)}。

こうして、巨視的にも無視できない塑性変形を生じるコンクリートの熱的な振舞いをより正しく把握するためには、常にクリープをも含めた塑性解析を行なわなくてはならない、ということがうなずける。

以上の理由により、コンクリートに対しては、もはや金属等に対する既成の熱弾的な扱いは最初からその妥当性を欠いてしまうといえる。また、同時にこれらのことから、コンクリート構造体の熱応力解析に関しては常に連成問題としてのアプローチの必要性があると考え

注1) ここにいう可逆、非可逆とは、いったん散逸しただけの水分を再び外から与えることによって変形が元に戻る場合と、そうでない場合とを意味する。

注2) ただし、ここではいずれも自由水が主要な役割を果す温度範囲のみに限定してのことである。

られる。しかしこのように、解析を連成問題として行なう場合に伴う困難さ以前に、熱を受けたコンクリートの膨張、収縮を理論的に解析することは、これはまた非常に難しく、現在のところ実験に関する文献⁵⁾がわずかに見られるだけで、理論的なもの⁶⁾は皆無に近い。

そこで今はこういう事実を認めながらも、上述のような、より厳密な扱いは今後の課題に残して、ここではその第1ステップとして専らコンクリートの熱伝導問題、それも解析手法のみに議論を限定する。

本来、コンクリート構造体が熱を受けた時、その内部での熱の伝わり方は、伝導が対流や放射に卓越して起こるが、それは一般的に温度に対して非線形、すなわち構造材料そのものの特性が温度に依存しながら行なわれるため、その熱伝導問題は数学的には非線形方程式を解くことになる。現在、この種の方程式の解法は専ら電算機による数値解析に頼っているのが実態であるが、問題の性質によっては、経済的、時間的にみて、必ずしもこのような解法は得策とはいえない場合もある。

そこで、ここではその一例として、コンクリートの物性値が温度の関数となる半無限、非線形、非定常問題を近似的にはあるが、境界層理論⁷⁾(流体力学)に基づいて解析的に解く一手法を考えたのでそれを提案し、併せて一部の検討結果をも報告する。

§ 2. 解析方法

予め、解析上の要点を述べる。

- (i)熱容量を積分して、温常(従属変数)を適当にスケール変換する⁸⁾。
- (ii)変換された温度を、時間の変数とする未定係数をもつ多項式で近似的にする。
- (iii)もともとの熱的釣り合い式(熱伝導方程式)を適当に定義された境界層厚さ⁹⁾内部で積分し、新たな熱的平衡方程式を導き、先の未定係数を決定する。

なお、以下では境界条件として、温度が与えられた場合と、熱束が与えられた場合とを別々に扱う。

[I] 温度境界条件が与えられた場合

$$\text{基礎方程式 } \rho(T)C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \quad \dots\dots(1)$$

ここに、 ρ , C , k , T は、それぞれ密度、比熱、熱伝導係数、温度とする。

$$\text{境界条件 } T(x, t) |_{x=0} = A(t) \quad \dots\dots(2)$$

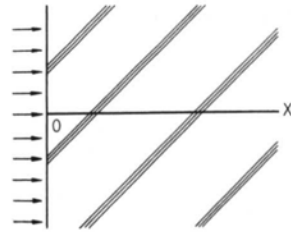


図-1

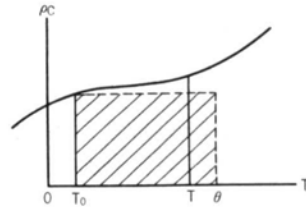


図-2

$$\text{初期条件 } T(x, t) |_{t=0} = 0 \quad \dots\dots(3)$$

この初期条件は、初期温度分布が均一である限り、一般性を失うものではない。

まず、次の温度スケール変換を行なう。

$$\begin{aligned} \theta &= \theta(T) = \theta(T(x, t)) \\ &= \frac{1}{\rho_0(T_0)C_0(T_0)} \int_{T_0}^T \rho C dT \quad \dots\dots(4) \end{aligned}$$

ここに、 T_0 は const. で以後、簡単のため0とする。こうすると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta}{\partial t} &= \frac{1}{\rho_0 C_0} \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_{T_0}^T \rho C dT \right) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\rho C}{\rho_0 C_0} \frac{\partial T}{\partial t} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= \frac{1}{\rho_0 C_0} \frac{\partial}{\partial T} \left(\int_{T_0}^T \rho C dT \right) \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\rho C}{\rho_0 C_0} \frac{\partial T}{\partial x} \end{aligned}$$

これから、式(1)は次のように変形される。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(T) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \quad \dots\dots(5)$$

$$\text{ただし、 } C, \alpha(T) = k(T)/\rho(T)C(T) \quad \dots\dots(6)$$

同様に境界条件も変換されて、

$$\theta |_{x=0} = \theta(T(0, t)) = \theta(A(t)) \equiv \theta_0(t) \quad \dots\dots(7)$$

次に、式(2)に従って表面から与えられた温度が、任意の時刻 $t=t$ に構造体のどの深さ x にまで到達したかを示す量として、次式で定義される熱境界層 $x=\delta(t)$ を考える。なお今後、特にことわらない限り $\theta=\theta(x, t)$ は $\theta=\theta(T(x, t))$ を意味するものとする。

$$\left. \begin{aligned} T(x, t) |_{x=\delta(t)} &= T(\delta(t), t) = 0 \\ \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\delta(t)} &= \frac{\partial T(\delta(t), t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\delta(t)} &= \frac{\partial^2 T(\delta(t), t)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(8)_{1-3}$$

上記3式は、 $x \leq \delta(t)$ において、初期条件の式(3)を自動的に満たしている。

独立変数 x , t は変換を受けないから、変換された温度 θ についても式(8)と同様の関係式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \theta(x, t) \Big|_{x=\delta(t)} &= \theta(\delta(t), t) = 0 \\ \frac{\partial \theta(x, t)}{\partial x} \Big|_{x=\delta(t)} &= \frac{\partial \theta(\delta(t), t)}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial^2 \theta(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\delta(t)} &= \frac{\partial^2 \theta(\delta(t), t)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(9)_{1-3}$$

次に、式(5)を $0 \leq x \leq \delta(t) < h$ を満たす任意の深さ h 内で積分すると、

$$\int_0^h \frac{\partial \theta}{\partial t} dx = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} \left[\alpha(T) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] dx$$

上式はまた、初期条件の式(3)と熱境界層の定義により次式と同値になる。

$$\int_0^{\delta(t)} \frac{\partial \theta}{\partial t} dx = \left[\alpha(T) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \Big|_{x=0}^{x=\delta(t)}$$

ここで式 (9)_{1,2} より、

$$\text{左辺} = \int_0^{\delta(t)} \frac{\partial \theta}{\partial t} dx = \frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} \theta(x, t) dx - \theta(\delta(t), t) \frac{d\delta(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} \theta(x, t) dx$$

$$\text{右辺} = \left[\alpha(T) \frac{\partial \theta}{\partial x} \right] \Big|_{x=0}^{x=\delta(t)} = \alpha(T(\delta(t)), t) \frac{\partial \theta(\delta(t), t)}{\partial x} - \alpha(T(0, t)) \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} = -\alpha(A(t)) \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x}$$

結局、式(5)の基礎式は次のようになる。

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} \theta(x, t) dx = -\alpha(A(t)) \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} \quad \dots\dots(10)$$

そこで条件式が式(7), (9)₁₋₃, (10), 合せて5つあることを考慮して、 $\theta = \theta(x, t)$ を4つの未定係数と、1つの未知量 $\delta(t)$ とを含む、次の x に関する三次式で表わせるものと仮定する。

$$\theta = \theta(x, t) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad \dots\dots(11)$$

ここに、 a, b, c, d は時間の未知関数。

式(11)を式(7)と(9)₁₋₃に適用して、4つの係数 a, b, c, d を残りの1つの未知数量 $\delta(t)$ の関数として表わすと、式(11)は次のようになる。

$$\theta(x, t) = \theta_s(t) \left(1 - \frac{x}{\delta(t)} \right)^3 \quad \text{注3)} \quad \dots\dots(12)$$

ここで最後の条件式(10)を、この未知量 $\delta(t)$ を決定するために用いる。式(12)を式(10)に代入すると、

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\theta_s(t) \delta(t)}{4} \right) = 3 \cdot \alpha(A(t)) \frac{\theta_s(t)}{\delta(t)}$$

$$\therefore \frac{d}{dt} \left(\theta_s(t) \cdot \delta(t) \right)^2 = 24 \cdot \alpha(A(t)) \cdot \theta_s^2(t)$$

これは $\delta(t)$ についての微分方程式とみなせるから、それを解いて、

$$\delta(t) = \sqrt{24 \int_0^t \alpha(A(t)) \theta_s^2(t) \cdot dt} / \theta_s(t) \quad \dots\dots(13)$$

こうして、式(12), (13)によって変換された温度分布 $\theta(x, t)$ が完全に求まったから、これから再び式(4)を通じて元の温度 T に逆変換すると、

$$\theta_s(t) \left(1 - \frac{x}{\delta(t)} \right)^3 = \frac{1}{\rho_0 C_0} \int_0^T \rho C dT \quad \dots\dots(14)$$

この右辺は T についての既成関数であるから、これを T について解けば、最終的に求める温度分布 $T = T(x, t)$ が得られる。

注3) この形は Biot が与える式¹⁰⁾に類似していることに留意。

[II] 熱束境界条件が与えられた場合

基礎方程式 $\rho(T)C(T)\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right]$ (1)

境界条件 $-k(T)\frac{\partial T}{\partial x}\Big|_{x=0} = Q(t)$ (5)

ここに、負号は外向き単位法線方向を正にとっていることによる。

初期条件 $T(x, t)|_{t=0} = 0$ (3)

先の式(4)と同様の温度スケール変換を行なうと、基礎方程式(1)は式(5)に変換される。

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\alpha(T)\frac{\partial \theta}{\partial x}\right] \quad \text{.....(5)}$$

ただし、 $\alpha(T) = k(T)/\rho(T) \cdot C(T)$ (6)

また、式(5)の境界条件も同様に変換されて、

$$-\alpha(T)\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=0} = Q(t)$$

あるいは、 $x=0$ での温度を T_s とし、これに対する α を α_s とすると、上式は次のように書き換えられる。

$$-\frac{\partial \theta}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{Q(t)}{\alpha_s} \quad \text{.....(16)}$$

次に、式(9)₁₋₃で熱境界層 $\delta(t)$ を定義し、先と同様に $0 \leq x \leq \delta$ で式(5)を積分すると、式(10)が導ける。

$$\frac{d}{dt} \int_0^{\delta(t)} \theta(x, t) dx = -\alpha_s \cdot \frac{\partial \theta(0, t)}{\partial x} \quad \text{.....(10)}$$

ここで温度分布について式(11)を仮定すると、

$$\theta = \theta(x, t) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad \text{.....(11)}$$

これを式(9)₁₋₃と式(10)に適用すると、式(12)と類似の形が求まって、

$$\theta(x, t) = \frac{Q(t) \cdot \delta(t)}{3\alpha_s} \left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^3 \quad \text{.....(17)}$$

再びこれを式(10)に用いて $\delta(t)$ を求めると、

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{12\alpha_s}{Q(t)} \int_0^t Q(t) \cdot dt} \quad \text{.....(18)}$$

ここに、 α_s は式(6)からも明らかなように、

$$\alpha_s = \alpha(T_s) = k(T_s)/\rho(T_s)C(T_s) \quad \text{.....(19)}$$

で、 $x=0$ での表面温度 T_s (未知)の関数である。

そして、この α_s は式(4)と式(17)より次のようにして求めることができる。

$$\theta_s = \theta_s(T_s) = \frac{1}{\rho_0(0) \cdot C_0(0)} \int_0^{T_s} \rho(T)C(T)dT \quad \text{.....(4)'}$$

$$\theta_s = \theta\Big|_{x=0} = \frac{Q(t) \cdot \delta(t)}{3\alpha_s} \quad \text{.....(17)'}$$

式(17)'に式(18)を代入して、

$$\theta_s = \frac{2}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{Q(t)}{\alpha_s} \int_0^t Q(t) \cdot dt} \quad \text{.....(17)'}$$

式(4)'を T_s について解いて、

$$T_s = T_s(\theta_s)$$

これを式(19)に代入して、

$$\alpha_s = \alpha(T_s(\theta_s)) = \alpha(\theta_s) \quad \text{.....(20)}$$

したがって、式(17)'と式(20)とを連立して解けば α_s が定まる。

こうして、完全な解が式(17)と式(18)より求まったことになる。

以上で、境界条件が温度で与えられた場合と、熱束で与えられた場合との非線形解が得られた訳であるが、線形解、すなわち物性値 ρ, C, k が温度に依存しない定数の場合の解は、式(4)を考慮して、式(12)~(13)と、式(17)~(18)とから直ちに得られる。

[III] 線形解

A) 境界条件が式(2)で与えられた場合

$$T(x, t) = T_s(t) \left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^3 \quad \text{.....(21)}$$

$$\delta(t) = \sqrt{24\alpha \int_0^t T_s^2(t) dt} / T_s(t) \quad \text{.....(22)}$$

ここに、 T_s は $x=0$ での温度、 α は定数。

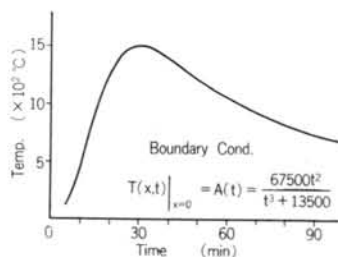
B) 境界条件が式(5)で与えられた場合

$$T(x, t) = \frac{Q(t) \cdot \delta(t)}{3\alpha} \left(1 - \frac{x}{\delta(t)}\right)^3 \quad \text{.....(23)}$$

$$\delta(t) = \sqrt{\frac{12\alpha}{Q(t)} \int_0^t Q(t) dt} \quad \text{.....(24)}$$

§ 3. 解析結果

ここでは、§ 2. の [I] の場合のみについて解析結果を求めた。なお、解析に当っては、熱容量 ρC については適当な実験データがないため常温時の値¹¹⁾を採用し、熱伝導係数 k のみを次の実験式¹²⁾として与えた。



図—3

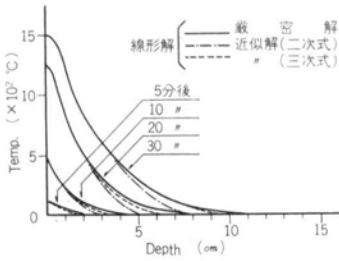


図-4

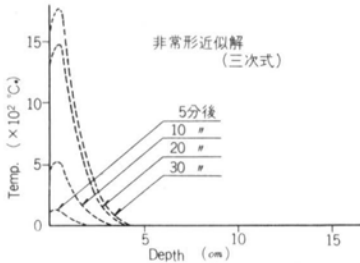


図-5

$$k(T) = -0.00018T + 0.282 \quad \dots\dots (25)$$

$$\rho C = 0.6156 \quad \dots\dots (26)$$

ただし、単位はそれぞれ [cal/cm·min·°C], [cal/cm³, °C]. なお、境界条件式はビル火災時を想定して、図-3で表わされるような次式で与えた。

$$A(t) = 67500 t^2 / (t^3 + 13500) \quad \dots\dots (27)$$

<参考文献>

- 1) 長島 昭：日本機械学会誌 78巻678号(昭50. 5)
- 2) Heinz Parkus：“Thermoelasticity” Blaisdell (1968)
- 3) Y. C. Fung：“Foundations of Solid Mechanics” Prentice-Hall (1965)
- 4) W. Czernin：“Zementchemie für Bauingenieure” (1964) (邦訳「建設技術者のためのセメント・コンクリート化学」技報堂)
- 5) Von K. Kordina & U. Schneider：“Zum mechanischen Verhalten von Normalbeton unter instationärer Wärmebeanspruchung” beton, Jan. 1975
M. L. A. Moncrieff：“Time, Temperature, Creep and Shrinkage in Concrete”
- 6) Z. P. Bazant：“Thermodynamics of Interacting Continua with Surfaces and Creep Analysis of Concrete Structures,” Northwestern Univ. (1971)
- 7) Schlichting：“Boundary Layer Theory” 6th ed. McGraw-Hill (1968)
- 8) Boley & Weiner：“Theory of Thermal Stresses” Wiley (1960)
- 9) 7) に同じ
- 10) Thomas J. Lardner & Frederick V. Pohle：“Application of Biot's Variational Principle in Heat Conduction” Department of Aerospace Engineering and Applied Mechanics, No. 587, May 1961
- 11) 小原俊平：“建築の熱設計” 鹿島出版会
- 12) 原田 有：“コンクリートおよび部材の火災特性について” コンクリートジャーナル Vol. 11, No. 8 August 1973

結果は、線形解、非線形解を別々に図-4、5に示す。

それぞれの図中において、二次多項式による近似解とは、仮定する近似式(1)の右辺第4項を省き、それに対応して、未定係数の決定条件式の1つ、式(9)を除いて以下全く同様にして求めたものである。

§ 4. 検討結果

ここでは、表面の境界条件が温度で与えられた場合の非線形解である式(13)、(14)と、それに対応する線形解式(2)とを、既存の厳密解と比較しながら検討した。

次のことがいえよう。

- ①線形解の範囲内では、ここでの近似解析手法は、ほぼ妥当なものと思われる。
- ②温度分布として予め仮定する多項式の次数を高くするほど、解の精度は向上する。
- ③これらのことから、温度境界条件をもつ線形問題(半無限体)に対しては、適用見通しがあったが、同境界条件に対する非線形解の妥当性については今後ともに実験、その他を通じて検討していくことが必要であろう。

なお、熱束境界条件に対する解の検討は次回に譲る。

