

## ロングスパン床構造の振動性状

塩谷 清人  
横田 治彦

### § 1. はじめに

建築技術の進歩に伴って、建物の床構造はスパンの長大化、軽量化の傾向にある。建築計画の面から、開放的な広い空間、自由に使える空間を得るために、柱の少ないロングスパン床構造が採用され、建物の重量を軽減しコスト、耐震性、施工性を向上させるために、デッキプレートと軽量コンクリートによって床スラブが形成される。これらのロングスパン床構造を設計するにあたって床の振動問題にも注意を向ける必要がある。スパンが長くなると、床の固有振動数が低くなり、外乱の振動に対して応答し易くなるとともに、床剛性が小さくなり、人の歩行等の外力による応答も大きくなる。ロングスパンの床構造は、大梁、小梁、床板など多くの部材によって構成されるため、固有振動数が数多く存在し、しかもそれらの固有振動数は、比較的接近した値となることが多い。また、鉄骨を用いた架構であるために、一般に減衰が小さい。

大梁、小梁、コンクリートの床板によって構成された床構造の振動性状を解析的に求めるには、有限要素法を用いて、梁、床板を適当にモデル化して解析する方法が便利である。そこで、有限要素として板要素と梁要素を組みこんだ固有値解析プログラムを開発した。

また、機会あってNビルとPビルのロングスパン床構造について振動試験を行なった。

本論では、振動試験の結果について述べるとともに、固有値を解析的に求め、試験結果と比較検討した。

### § 2. 有限要素法による床構造の固有値解析

従来、建物の床構造について、有限要素法によって固有値解析をする場合、梁を等価な板要素に置換して、床構造をすべて板要素のみで解析する方法が用いられてきた。しかし、梁を板要素に置換する際に、等価な断面の

評価のしかたや、節点数が増して自由度が非常に多くなること等に問題がある。

そこで、本論では、梁については一般の骨組解析に用いられているような梁要素を用い、床板は従来通りの板要素を用いて、それらを重ね合わせることでより床構造の解析を行なった。

#### 2.1 長方形板要素（非適合変位関数による）

図-1 に示すように、 $x, y$ 平面と一致する長方形要素①②③④を考え、各節点について、 $z$ 方向変位、 $x$ 軸まわりの回転、 $y$ 軸まわりの回転を未知の変位とする。また、座標は右手系とし、各変位の正の方向は図のように定める。

図に示されるような未知量に対する剛性マトリックス、質量マトリックスを求めるために、要素内の任意の点 $(x, y)$ におけるたわみ $Uz$ を次のように仮定する。

$$Uz = C_1 + C_2x + C_3y + C_4x^2 + C_5xy + C_6y^2 + C_7x^3 + C_8x^2y + C_9xy^2 + C_{10}y^3 + C_{11}x^2y + C_{12}xy^3 \quad \dots\dots(1)$$

ここに、 $C_1, C_2, \dots, C_{12}$  は定数である。

これらの定数は、

$$(Uz)_{x_1, y_1} = U_1, \left(\frac{\partial Uz}{\partial y}\right)_{x_1, y_1} = U_2, \left(\frac{\partial Uz}{\partial x}\right)_{x_1, y_1} = -U_3, \dots\dots \quad \dots\dots(2)$$

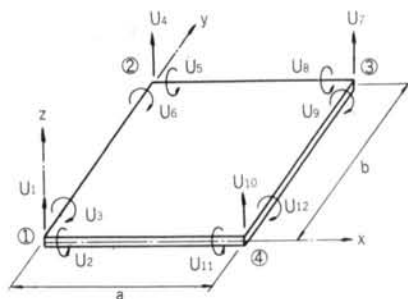


図-1 長方形要素

等の関係から次のように求まる。

$$U = Cc \quad \dots\dots(3)$$

ただし、 $c = [c_1 \ c_2 \ \dots\dots \ c_{12}]$ 、 $U = [U_1 \ U_2 \ \dots\dots \ U_{12}]$  であり、 $C$  は節点座標値  $(x_1, y_1)$ 、 $(x_2, y_2)$ 、 $(x_3, y_3)$ 、 $(x_4, y_4)$  で定まる  $12 \times 12$  のマトリックスである。

上式の逆マトリックスをとることにより、次式が得られる。

$$c = C^{-1}U \quad \dots\dots(4)$$

式(4)を用いて式(1)を表わすと、

$$Uz = PC^{-1}U = NU \quad \dots\dots(5)$$

$$N = PC^{-1} \quad \dots\dots(6)$$

となる。

ここに、マトリックス  $P$  は式(1)より、

$$P = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3] \quad \dots\dots(7)$$

であり、 $N$  は変位関数である。

次に要素内のひずみは、

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= -\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x^2}\right) \\ e_{yy} &= -\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial y^2}\right) \\ e_{xy} &= -2\left(\frac{\partial^2 U_z}{\partial x \cdot \partial y}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(8)$$

の関係と、式(1)から次のように表わせる。

$$e = Qc \quad \dots\dots(9)$$

ここに、 $Q$  は  $3 \times 9$  のマトリックスである。

したがって式(4)、式(9)から次式が得られる。

$$e = QC^{-1}U = BU \quad \dots\dots(10)$$

$$B = QC^{-1} \quad \dots\dots(11)$$

故に要素の剛性マトリックスは、外部仕事と内部仕事を等値することにより得られる次式から求まる。

$$k = \int_v B^T D B dV = (C^{-1})^T \int_v Q^T D Q dV (C^{-1}) \quad \dots\dots(12)$$

ここに、マトリックス  $D$  は等方性板については、

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(13)$$

であり、 $E$  はヤング係数、 $t$  は板厚、 $\nu$  はポアソン比を表わす。

床板全体系の剛性マトリックス  $K$  は、各要素について求まる剛性マトリックス  $k$  を重ね合わせることで求ることができる。

次に、質量マトリックス  $M$  は、d'Alembert の原理より慣性力を導入することによって、静的な問題として求めることができる。

いま、単位体積の質量を  $\rho$  とし、外荷重がないとすれ

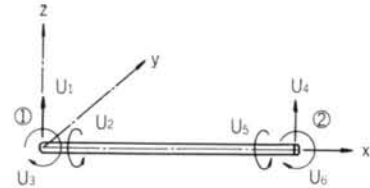


図-2 梁要素

ば、動的荷重は物体力  $p_z$  と同様に考えることができるから、次のようにかける。

$$p_z = -\rho \frac{d^2 U_z}{dt^2} = -\rho \ddot{U}_z \quad \dots\dots(14)$$

要素内の任意の点の変位  $U_z$  は、式(5)のように節点変位で表わされるから、上式より、

$$p_z = -\rho N \ddot{U} \quad \dots\dots(15)$$

このような分布荷重は、次のような等価節点荷重  $F$  になおすることができる。

$$\begin{aligned} F &= -\int_v N^T p_z dV = \left\{ \int_v N^T \cdot \rho \cdot N dV \right\} \ddot{U} \\ &= m \ddot{U} \end{aligned} \quad \dots\dots(16)$$

したがって、要素の質量マトリックスは、

$$m = \int_v N^T \cdot \rho \cdot N dV \quad \dots\dots(17)$$

となり、全体系の質量マトリックス  $M$  は、剛性マトリックスを合成する場合と同様にして求まる。

## 2.2 梁要素

図-2 に示すように、板要素の場合と対応するような座標系を考え、各節点について、 $z$  方向変位、 $x$  軸まわりの回転、 $y$  軸まわりの回転の未知変位を考える。

この場合、剛性マトリックスと質量マトリックスは、板要素のときと同様にして、梁理論から求めることができるが、梁要素については、部材座標と基準座標が一致しないときがあるので、座標変換が必要となる。

いま、座標変換マトリックスを  $T$  とすると、基準座標系における要素の剛性マトリックス  $k'$ 、質量マトリックス  $m'$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} k' &= T k T^T \\ m' &= T m T^T \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(18)$$

こうして得られた要素の剛性マトリックス、質量マトリックスを重ね合わせて、全体系のマトリックスが求まる。

## 2.3 固有値解析

2.1, 2.2 で求めた板要素と梁要素の剛性マトリックス、質量マトリックスを全体系(基準座標系)につい

て合成し、拘束条件を考慮して得られた剛性マトリックス、質量マトリックスを  $Kr$ 、 $Mr$  とする。

いま、系の自由振動を考えると、運動方程式は次式で与えられる。

$$Mr\ddot{U} + KrU = 0 \quad \dots\dots(19)$$

この場合、調和振動となるので、変位  $U$  は次のようになる。

$$U = qe^{i\omega t} \quad \dots\dots(20)$$

したがって、

$$\ddot{U} = -\omega^2 qe^{i\omega t} \quad \dots\dots(21)$$

式(20)、(21)を式(19)に代入して  $e^{i\omega t}$  を消去すると、

$$(-\omega^2 Mr + Kr)q = 0 \quad \dots\dots(22)$$

となる。上式は、次の条件が成りたつとき  $q$  の 0 でない解が存在する。

$$|-\omega^2 Mr + Kr| = 0 \quad \dots\dots(23)$$

したがって、式(23)を満足する  $\omega$  を求めることにより系の固有振動数が得られ、各振動数に対応する固有モードが得られる。

### § 3. 床構造の振動試験

#### 3.1 Nビル床構造の振動試験

Nビルは地上19階、塔屋3階（最高部高さ87.15m）の高層部と、地上6階、地下2階の低層部から成っている。高層部は鉄骨造で、低層部は鉄骨鉄筋コンクリート造である。この建物の高層部19階の床において振動試験を行なった。

19階の床構造は、H鋼を用いた大梁（800×300×12×28）と、小梁（240×199×7×10）、デッキプレートと軽

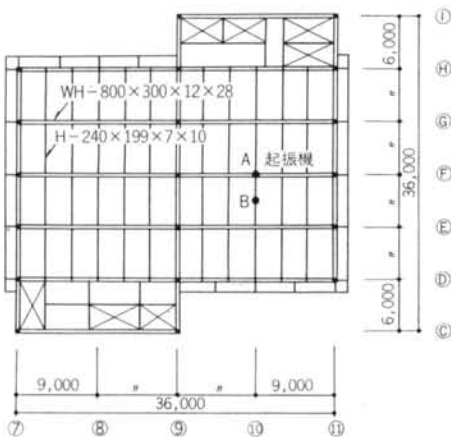


図-3 Nビル19階梁要素

量コンクリートから成っている。図-3の梁伏図に示すように、柱は7通り、9通り、11通りにあり、18m×24mの床構造が9通りの両側にある。試験の対象となったのは9通り、11通り、D通り、H通りで囲まれた床で、起振機を図中のAとBの位置に設置して、振動試験を行なった。試験に用いた測定機器を次に示す。

- 起振機 (EX-100DC 伊藤精機)
  - 加振モーメント 0~100kg・cm
  - 最大加振力 1000kg
  - 振動数 1.7~50Hz

- 低域振動計 (VM-4122 国際機械振動)
  - ペン書きオシログラフ (WTR-211 渡辺測器)

実験時の施工状況は、鉄骨の耐火被覆は施してあったが、床のタイルは未施工であった。

実験にあたって、最初に床構造の固有振動数と、減衰定数を求めるために、起振機の回転数を徐々に変化させて、ある測定点での共振曲線を得た後、各々の固有振動数において、起振機を定常運転し、測定点を順次移動して各次の固有振動モードを調べた。

その結果、起振機位置Aにおいて5.65Hzと10.05Hzの固有振動数、起振機位置Bにおいて7.00Hz、13.40Hz、15.90Hzの固有振動数を確認した。固有振動数5.65Hzと7.00Hzのときの共振曲線を図-4に、固有振動モードを図-5に示す。なお、これらのモード図は、測定点中の最大振幅値で規準化している。また、床板のような長方形板の振動モードは、長辺方向と短辺方向の振動モードの組み合わせとして表われるので、振動次数の表現は、長辺方向1次、短辺方向2次等とした方が理解し易い。したがって、本論では、振動次数を大梁方向とそれに直角な小梁方向の次数で表わす。こうした方法で試験結果を整理すると表-1のようになる。

試験結果に大梁方向2次のモードがないのは、起振機設置位置が、大梁方向偶数次モードの節にあっているために、そうしたモードが刺激されないからである。

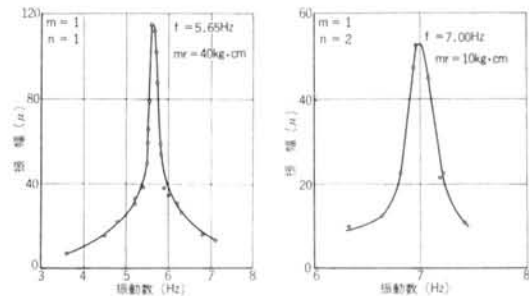


図-4 Nビル19階床の共振曲線

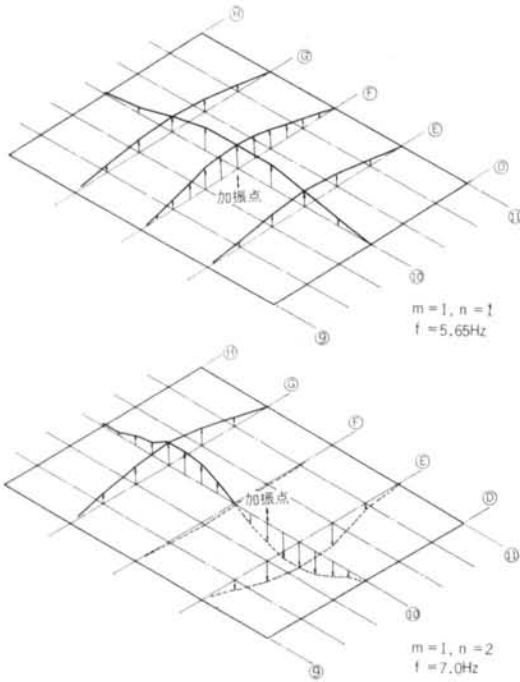


図-5 Nビル19階床の固有振動モード

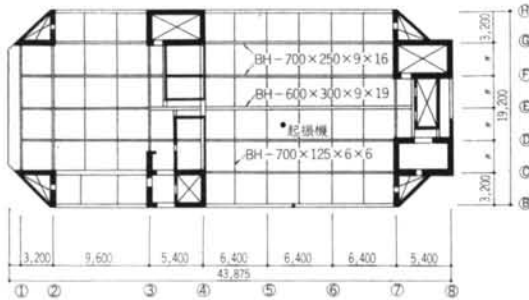


図-6 Pビル7階梁伏図

### 3.2 Pビル床構造の振動試験

Pビルは、地上12階、塔屋3階（最高部高さ54.6m）、地下2階の鉄骨鉄筋コンクリート造で、振動試験は7階の床構造について行なった。

試験の対象としたのは、図-6の梁伏図で4、7通りと、B、H通りに囲まれた部分であり、ビルトアップH型鋼ハニカム成形梁（BH-600×300×9×19、BH-700×250×9×16、BH-700×125×6×6）とB、H通りの合成梁（BH-700×140×9×16とRC-1600×180）、およびデッキプレートと軽量コンクリートの床板から成り、4通りと7通りでコア部分に接合されている。

振動次数 (大梁方向)・(小梁方向)	固有振動数 (Hz)	減衰定数 (%)	起振機の加振 モーメント (kg・cm)
1・1	5.65	1.8	40
1・2	7.00	1.6	10
1・3	10.05	5.3	10
1・4	13.40	1.9	10

表-1 Nビル19階床の振動試験結果

振動次数 (大梁方向)・(小梁方向)	固有振動数 (Hz)	減衰定数 (%)	起振機の加振 モーメント (kg・cm)
1・1	7.55	2.0	20
1・2	11.05	1.5	15
1・3	15.6	1.8	15
2・1	17.2	1.1	15
2・2	20.1	—	10
1・4	22.3	—	10

表-2 Pビル7階床の振動試験結果

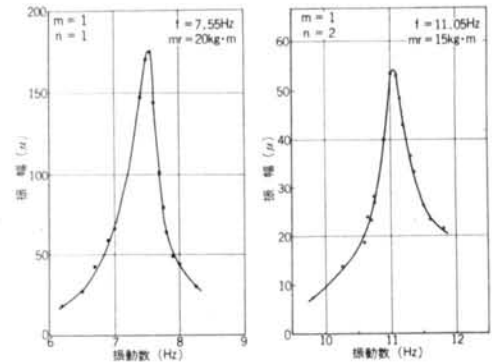


図-7 Pビル7階床の共振曲線

起振機は図-6に示した位置に設置し、Nビルの場合と同じ方法で実験を行なった。

実験より得られた結果を表-2に示す。また1-1、1-2のモードについて、共振曲線を図-7に、モード図を図-8に示す。

## § 4. 数値計算例

### 4.1 Nビル床構造の固有値解析

図-3の梁伏図に示す床構造を、図-9のような要素に分割したモデルを考える。太い実線は大梁を、太い破線は小梁を示し、細い破線は板要素の境界を示す。

要素数は、板要素が48、梁要素が58（うち大梁が18要素、小梁が40要素）である。

床板は、デッキプレートが用いられているために、実

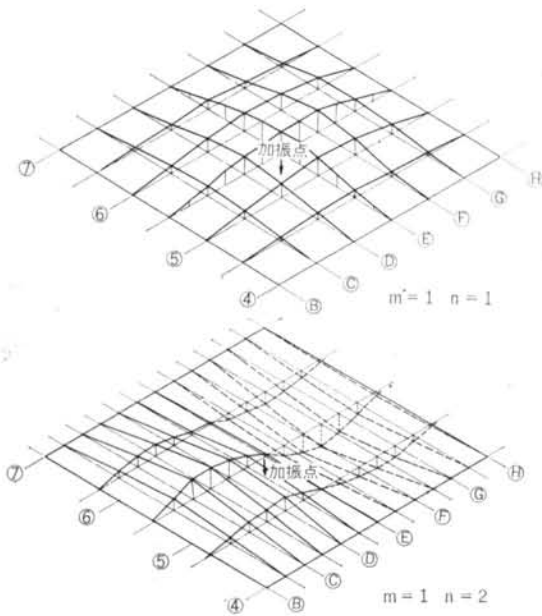


図-8 Pビル7階床の固有振動モード

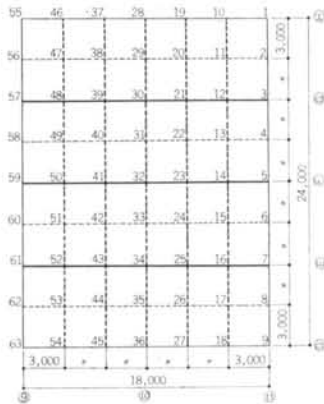


図-9 Nビル19階床の要素分割

際には異方性板であるが、ここでは次のようにして等価な平板に置換し、等方性板として解析した。

いま、 $\gamma_c$ ：コンクリート密度

$n$ ：鋼板とコンクリートのヤング係数比

$A_s, A_c, A_t$ ：デッキプレート，コンクリート，鉄筋の断面積

$I_s, I_c, I_t$ ：デッキプレート，コンクリート，鉄筋の断面二次モーメント

$Y_s, Y_c, Y_t$ ：デッキプレート，コンクリート，鉄筋の中立軸位置

$Y_V$ ：コンクリートとデッキプレートの合成断面の中立軸位置

とすれば、

合成断面の重量：

$$W_V = \text{デッキプレートの重量}(W_S) + \gamma_c A_c \quad \dots\dots (24)$$

合成断面の中立軸：

$$Y_V = \frac{A_c Y_c + n A_s \cdot Y_s + n A_t Y_t}{A_c + n A_s + n A_t} \quad \dots\dots (25)$$

合成断面 2 次モーメント：

$$I_V = \frac{1}{n} \left\{ I_c + A_c (Y_V - Y_c)^2 \right\} + I_s + A_s (Y_s - Y_V)^2 + I_t + A_t (Y_t - Y_V)^2 \quad \dots\dots (26)$$

として求める。以下に、解析に用いた各要素の諸定数を示す。

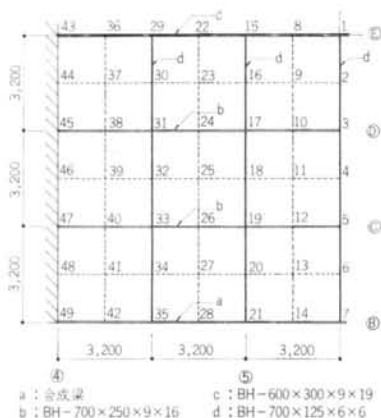
- ・ 板要素
  - ヤング係数  $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
  - ポアソン比 0.3
  - 板厚 6.06cm
  - 密度  $3.72 \text{ g/cm}^3$
- ・ 梁要素
  - ヤング係数  $2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$
  - ポアソン比 0.3
  - 密度  $7.9 \text{ g/cm}^3$
- 断面 2 次モーメント
  - 大梁  $2.916 \times 10^5 \text{ cm}^4$
  - 小梁  $8.952 \times 10^3 \text{ cm}^4$
- 断面極 2 次モーメント
  - 大梁  $3.341 \times 10^5 \text{ cm}^4$
  - 小梁  $1.027 \times 10^4 \text{ cm}^4$
- 断面積
  - 大梁  $257.2 \text{ cm}^2$
  - 小梁  $58.7 \text{ cm}^2$

解析の対象とした床板は、H通りでコア部分に、9通りで隣りの床板に接しており、D通り、11通りで柱に支持された形になっている。こうした複雑な境界条件を適確にモデル化するのは困難なため、ここでは、床板の全周を固定としたものと、全周を単純支持としたものの2つの場合について解析し、実験値と比較した。

得られた結果と実験結果との比較を表-3に示す。

振動次数 (大梁方向)・(小梁方向)	固有振動数 (Hz)		
	解析 (単純支持)	試験結果	解析 (周辺固定)
1 ・ 1	3.20	5.65	6.93
1 ・ 2	4.25	7.00	8.11
1 ・ 3	6.52	10.05	10.47
1 ・ 4	11.62	13.40	14.22

表-3 Nビル19階床における試験結果と解析結果の比較



図一10 Pビル7階床の要素分割

#### 4.2 Pビル床構造の固有値解析

Pビル7階の床構造は、図一6 からわかるように、5通りと6通りの中間の小梁と、E通りの大梁に関して対称になっている。したがって、対称性を用いて、自由度を減らし、解の精度をあげるために、これらの梁に囲まれた部分を解析の対象とした。要素分割を 図一10 に示す。要素数は、板要素36、梁要素42であり、図中、実線は梁要素、破線は要素の境界を示す。梁は4種類でa、b、……のように区別している。境界条件は、4通り、7通りを完全固定、B通り、H通りを自由として解析した。したがって、B通り、H通り部分の壁による拘束の影響は無視したことになる。

床板はNビルと同じ構造なので、4.1 で示した方法で等価な剛性をもつ等方性板に置換した。以下に解析に用いた諸定数を示す。ヤング係数、ポアソン比は、4.1 で用いた値と同じである。

- ・板要素 板厚 5.96cm  
密度 3.39 g/cm<sup>3</sup>
- ・梁要素 断面2次モーメント  
a :  $7.054 \times 10^5 \text{cm}^4$   
b :  $1.159 \times 10^5 \text{cm}^4$   
c :  $1.232 \times 10^5 \text{cm}^4$   
d :  $3.435 \times 10^4 \text{cm}^4$   
断面極2次モーメント  
a :  $7.127 \times 10^5 \text{cm}^4$   
b :  $1.201 \times 10^5 \text{cm}^4$   
c :  $1.331 \times 10^5 \text{cm}^4$   
d :  $3.670 \times 10^4 \text{cm}^4$

なお、対称軸となるE通りと、5、6通りの中間の梁については剛性を半分に評価している。

解析結果と実験結果の比較を 表一4 に示す。

振動次数 (大梁方向)・(小梁方向)	固有振動数 (Hz)	
	試験結果	解析結果
1 ・ 1	7.55	8.02
1 ・ 2	11.05	14.21
1 ・ 3	15.6	22.23
2 ・ 1	17.2	17.53
2 ・ 2	20.1	24.01
1 ・ 4	22.3	31.73

表一4 Pビル7階床における試験結果と解析結果の比較

## § 5. 結論

Nビルの床構造については、支持条件が複雑であるために、解析は周辺単純支持の場合と固定の場合について行ない、実験値と比較したが、表一3 に示したように実験値は両解析値の間にあり、やや周辺固定に近い値をとっている。また、高次モードになるほど実験値が周辺固定の解析値に近づく傾向がある。

Pビルの場合は、床板の対称性を用いることにより、少ない自由度で解の精度があがるようにした。支持条件も比較的単純な形をしているので、解析の際に実状に近いような境界条件を与えた。その結果、表一4 に示したように低次モードについては、実験値に近い値が得られた。しかし、1-3、1-4のモードについては、実験値と計算値がかなり異なっている。これは、B、H通りを完全な自由端としたために、現実には壁で拘束している部分の影響が解析に反映されず、特に大梁方向1次で小梁方向高次のモードではその影響が大きいためと思われる。

また、梁の振り中心が現実のもの異なること、異方性の床板を等方性板に置換したことなども、解析値の誤差が大きくなる原因と考えられるが、上記の結果からみて、ここに述べた解法は実用に十分であるといえよう。

以上、本論ではロングスパン床構造の振動問題について、有限要素法を用いた解析的なアプローチを示すとともに、実在の床構造を対象とした振動実験結果を紹介した。さらに、この床構造を板要素と梁要素を用いた有限要素法によってモデル化し、固有値解析を行ない、振動試験結果と比較した。以上の検討の結果をまとめると、鉄骨の梁、デッキプレート、軽量コンクリート等によって構成されるロングスパン床構造は、20Hz以下の振動数範囲に数多くの固有振動数を持っており、高次の固有振動数は互に接近した値となる。各次の減衰定数は約2%と小さな値を示しており、振動問題を考えるときに不

利な材料となる。したがって、ロングスパン床構造を設計する場合には、振動についても考慮する必要がある。

また、ロングスパン床構造の振動性状を解析的に求める場合、板要素と梁要素を用いた有限要素法は、実物に忠実なモデル化が可能であるとともに、実用上十分な精度で解が求まることから、非常に有効な方法である。

なお、本論では床構造の固有値解析のみについて述べたが、今後さらに、応答解析、あるいは人体感覚との関係等についても検討を加える予定である。

最後に、本論作成に当り、プログラミング、数値計算等につきご指導いただいた研究所伊藤哲次氏に感謝の意を表す次第である。

#### <参考文献>

- 1) J. S. シェムニスキー：“マトリックス構造解析の基礎理論” 培風館（昭46）
- 2) Zienkiewicz, O. C. & Y. K. Cheung：“The Finite Element Method for Analysis of Elastic Isotropic and Orthotropic Slabs” Proc. Inst. Civ. Eng., Vol. 28 (1964) pp. 471~488

