

異方性多層地盤のドレン圧密に関する数値解析（その1）

尾上篤生

§ 1. はじめに

一般に沖積粘土地盤は圧密特性の異なる幾つかの土層から形成されている。多層地盤の一次元圧密を解析的に扱った例としては、Gray (1945)¹⁾ が2層問題を研究したのが最初で、彼の方法で3層以上の解を得ることも不可能ではないが、実用に耐える簡単な図表を作成することは困難である。Abbott (1960)²⁾ は、やはり一次元圧密に関して Terzaghi の式を Crank-Nicholson の差分スキームによる差分方程式に直し、多層地盤の数値解析を行なった。他方、ドレン圧密^{注)}に対する Barron (1948)³⁾ の自由ひずみの基本式が、半径方向の変位を許す方程式から出発した Aboshi と Yoshikuni (1969)⁴⁾ によって等ひずみのものであるとされたが、これに先立ってドレンの脱水抵抗を考慮した等ひずみの場合の圧密が、脱水抵抗を無視した Barron の解よりもずっと遅れることを、彼らは電気的相似モデルを用いた数値解析によって示した (1967)⁵⁾。この脱水抵抗に関する研究も Barron³⁾ に始まったが、Biot の理論から導びかれた Yoshikuni と Nakanodo (1974)⁶⁾ の最密解で脱水抵抗に影響する主たるパラメータ L が明らかになって完成された感がある。この解は等方性均一地盤のドレン圧密について与えられたもので、間隙水の半径方向の流れと鉛直方向の流れを分離して圧密係数の異方性を考慮する場合は Carrirro の手法の併用による。

本論文は、ドレン圧密の基礎方程式と脱水抵抗をもつドレン端部での境界条件を差分式に直し、土の圧密係数と透水係数の異方性を含む多層地盤内の過剰間隙水圧分布を調べ、単一地盤に関する最密解の用い方によってはどの程度の誤差で多層地盤の平均圧密度を求め得る

かについて報告するものである。2層地盤の場合の数値計算によると、上・下層がそれぞれ全層の厚さにわたって存在すると仮定した单一地盤の解析解から半径方向平均過剰間隙水圧の深度分布を計算し、各々の深度分布から両層が現実に存在する深度での分布だけを取り出して求めた近似的な圧密度は、高々数パーセントの誤差で多層地盤の平均圧密度に一致することが明らかになった。

§ 2. 解析方法

2.1 等方性均一地盤の解析解

吉国 (1973)⁷⁾によれば、間隙水圧に関する圧密の式は式(1)である。

$$\dot{u} = C_v \nabla^2 u + \varphi \quad \dots \dots (1)$$

ここに、 $\nabla^2 \varphi = 0$, φ : スカラーポテンシャル

軸対称ドレン圧密の圧密ポテンシャルを境界条件で規定し、ドレン上・下端で等ひずみ、ドレン端および換算円外周で半径方向のひずみが零、表面の全荷重が一定の条件のもとで次の放物形圧密方程式が成立する。

$$\dot{u} = C_v \nabla^2 u \quad \dots \dots (2)$$

土の異方性を考慮すれば、同じ条件のもとで式(3)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = C_h \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + C_v \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \quad \dots \dots (3)$$

となる。ドレン材の透水係数が有限であるために、ドレン端部で間隙水流の連続条件式(4)が成り立つ。

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r} \right)_{r=r_w} + \frac{r_w}{2} \frac{k_w}{k_h} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right)_{r=r_w} = 0 \quad \dots \dots (4)$$

境界条件は、① $\partial u / \partial r = 0$, at $r = r_e$,

② $u = 0$, at $z = 0$,

③ $u = 0$, at $z = 2H$,

④ 式(4), at $r = r_w$,

⑤ $u = u_0$, when $t = 0$,

である。このとき式(2)の解は次の式(5)で与えられる⁸⁾。

注) 土中の間隙水の半径方向求心流れと鉛直方向流れが存在するが、接線方向の流れ成分がない圧密、すなわちドレンを打設した地盤に生ずる圧密を本論文ではドレン圧密と称する。

$$u(r, z, T) = \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} C_{mn} \cdot \sin \frac{m\pi z}{2H} \cdot D_0(\alpha_{mn} \cdot r) \cdot e^{-h^2_{mn} \cdot c_h \cdot t} \quad \dots\dots(5)$$

$$\text{ここで, } C_{mn} = \frac{8u_0 m}{\pi L \alpha_{mn}^2 r_e^2} \left[D_0(\alpha_{mn} \cdot r_e) - \frac{1}{N^2} \left\{ 1 + \left(\frac{m^2}{L \cdot \alpha_{mn} \cdot r_w} \right)^2 \right\} \cdot D_0^2(\alpha_{mn} \cdot r_w) \right]$$

$$h^2_{mn} = \alpha_{mn}^2 + \left(\frac{m\pi}{2H} \right)^2, \quad t = \frac{d_e^2}{c_h} \cdot T, \quad \alpha_{mn} \text{ は } \frac{D_0(\alpha_{mn} \cdot r_w)}{\alpha_{mn} r_w D_1(\alpha_{mn} \cdot r_w)} = -\frac{L}{m^2} \text{ を満す固有値,}$$

$$L = \frac{32}{\pi^2} \frac{k_h}{k_w} \left(\frac{H}{d_w} \right)^2, \quad D_i \text{ は } D_i(\alpha r) = J_i(\alpha r) - \frac{J_1(\alpha r_e)}{Y_1(\alpha r_e)} J_i(\alpha r), \quad (i=0, 1),$$

(J, Y) : (第一種・第二種) Bessel 関数

半径方向平均過剰間隙水圧分布は式(6)で与えられ,

$$\bar{u}(z, T) = \frac{2\lambda^2}{(\lambda^2 - 1) \cdot L} \sum_{m=1, 3, \dots}^{\infty} \sum_{n=1, 2, \dots}^{\infty} c_{mn} \cdot \frac{m^2}{\alpha_{mn}^2 r_e^2} \cdot \sin \frac{m\pi z}{2H} D_0(\alpha_{mn} \cdot r_w) \cdot e^{-h^2_{mn} \cdot c_h \cdot t} \quad \dots\dots(6)$$

また, 空間に平均圧密度は次に示す式(7)である.

$$\bar{U}(T) = 1 - \frac{\bar{u}(T)}{u_0} \quad \dots\dots(7)$$

$$\text{ここで, } \bar{u}(T) = \frac{4\lambda^2}{\pi(\lambda^2 - 1)L} \sum \sum c_{mn} \frac{m}{\alpha_{mn}^2 r_e^2} D_0(\alpha_{mn} \cdot r_w) e^{-h^2_{mn} \cdot c_h \cdot t}$$

$$\lambda = de/dw$$

多層地盤では, 第 ℓ 層と第 $\ell + 1$ 層の境界で間隙水の鉛直方向の連続が満されねばならないので次の式(8),

$$k_v^{(\ell)} \frac{\partial u_\ell}{\partial z} = k_v^{(\ell+1)} \frac{\partial u_{\ell+1}}{\partial z} \quad \dots\dots(8)$$

が成り立つが, 式(8)と式(4)を同時に満足する式(3)あるいは式(2)の解を得ることは困難である.

2.2 異方性多層地盤の解析方法

2.2.1 基礎方程式と境界条件および初期条件

図-1 のように n 層から成る地盤にドレンが打設されたとき, 第 ℓ 層に関する圧密の方程式は式(9)である.

$$\frac{\partial u_\ell}{\partial t} = c_h^{(\ell)} \left(\frac{\partial^2 u_\ell}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\ell}{\partial r} \right) + c_v^{(\ell)} \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial z^2} \quad \dots\dots(9)$$

ここに, $(u_\ell, c_h^{(\ell)}, c_v^{(\ell)})$: 第 ℓ 層の(過剰間隙水圧, 水平方向・鉛直方向圧密係数)

境界条件と初期条件は, 両面排水および片面排水に対してそれぞれ表-1 のとおりであり, $z = H$ 以外では両排水条件で違ひがない.

2.2.2 基礎方程式の差分化と変数の無次元化

式(9)を Euler の方法により差分化すると, 式(10)を得る.

$$\begin{aligned} \frac{u(r, z, t + \Delta t) - u(r, z, t)}{\Delta t} &= c_h^{(\ell)} \left(\frac{u(r + \Delta r, z, t) + u(r - \Delta r, z, t) - 2u(r, z, t)}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{u(r + \Delta r, z, t) - u(r - \Delta r, z, t)}{2 \cdot \Delta r} \right) \\ &\quad + c_v^{(\ell)} \left(\frac{u(r, z + \Delta z, t) + u(r, z - \Delta z, t) - 2u(r, z, t)}{(\Delta z)^2} \right) \end{aligned} \quad \dots\dots(10)$$

換算円直径を d_e , 同半径を r_e , ドレン直径を d_w , 同半径を r_w , $\lambda = d_e/d_w$, $\mu = H/d_w$ とし, $r = r_w \sim r_e$ を M 等分, H を N 等分して各々 Δr , Δz とする.

$\eta = r/r_e$, $\zeta = z/H$, $\phi = u/u_0$ において, 第 1 層の水平方向圧密係数 $c_h^{(1)}$ を用いて $T = c_h^{(1)} \cdot t / d_e^2$ なる変換をした後に, 改めて ϕ を u に直せば全ての変数は無次元化され, 式(10)の無次元化された差分式は次の式となる.

条件 境界		両面排水	片面排水
$z=0$		$u_1=0$	同左
$z=H$		$u_n=0$	$\frac{\partial u_n}{\partial z}=0$
$z=D_1$	$u_1=u_2, k_v^{(1)} \frac{\partial u_1}{\partial z}=k_v^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial z}$		
$z=D_2$	$u_2=u_3, k_v^{(2)} \frac{\partial u_2}{\partial z}=k_v^{(3)} \frac{\partial u_3}{\partial z}$	同左	
\vdots	\vdots		
$z=D_{n-1}$	$u_{n-1}=u_n, k_v^{(n-1)} \frac{\partial u_{n-1}}{\partial z}=k_v^{(n)} \frac{\partial u_n}{\partial z}$		
$r=r_w$	$\left(\frac{\partial u_t}{\partial z}\right) + \frac{r_w k_w}{2k_h} \left(\frac{\partial^2 u_t}{\partial z^2}\right) = 0$	同左	
方 向 $r=0$	$\frac{\partial u_t}{\partial r}=0$		
$t=t=0$	$u_t=1.0$	同左	

表-1 境界条件と初期条件

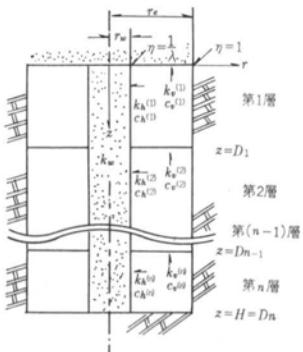


図-1 n 層からなる地盤に打設されたドレーンと座標軸

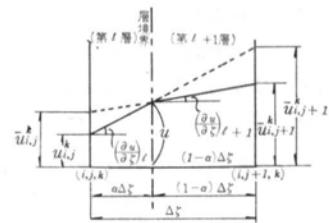


図-3(a) 層境界のモデル(1)

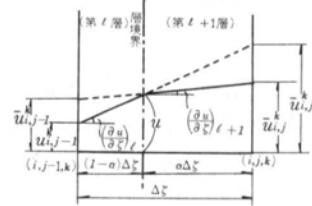


図-3(b) 層境界のモデル(2)

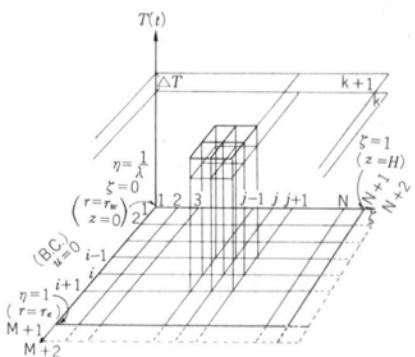


図-2 2次元差分網

$$u_{i,j}^{k+1} = Z_t \cdot u_{i,j-1}^k + R_t \left(1 + \frac{1}{2P}\right) \cdot u_{i+1,j}^k + \left(1 - 2R_t - 2Z_t\right) \cdot u_{i,j}^k + R_t \left(1 - \frac{1}{2P}\right) \cdot u_{i-1,j}^k + Z_t \cdot u_{i,j+1}^k \quad \dots \dots (11)$$

$$\text{ここで, } R_t = \left(\frac{2M\lambda}{\lambda-1}\right)^2 \cdot \frac{C_v^{(t)}}{C_h^{(1)}} \cdot \Delta T, \quad Z_t = \left(\frac{N\lambda}{\mu}\right)^2 \cdot \frac{C_v^{(t)}}{C_h^{(1)}} \cdot \Delta T, \quad P = \frac{M}{\lambda-1} + i-1$$

2.2.3 境界条件-1 ($\eta=1/\lambda$ を除く周囲境界)

$$\text{① } \zeta=1 \text{において, 両面排水の場合, } u_{i,N+1}^k = 0 \quad \dots \dots (12_1)$$

$$\text{片面排水の場合, } u_{i,N+2}^k = u_{i,N}^k \quad \dots \dots (12_2)$$

他の境界条件は, $\zeta=1$ における排水条件によらない。

$$\text{② } \zeta=0 \text{において, } u_{i,1}^k = 0 \quad \dots \dots (13)$$

$$\text{③ } \eta=1 \text{において, } u_{M+2,j}^k = u_{M,j}^k \quad \dots \dots (14)$$

2.2.4 境界条件-2 (層境界)

層境界では、間隙水圧の不連続が生じることを防がねばならないので、Abbott²⁾の方法に従って処理する。

[I] 層境界上またはその直前（左側）の格子点

図-2の差分網の中から、第 ℓ 層と第 $\ell+1$ 層の境界線を挟む $\Delta\zeta$ 区間を取り出して図-3(a), (b)に示した。図-3(a)で、境界面で u が等しいことと流れの連続条件とから、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_l \cdot \alpha \Delta\zeta + \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{l+1} (1-\alpha) \Delta\zeta = u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k \quad \dots \dots (15)$$

$$k_v^{(t)} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_l = k_v^{(t+1)} \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{l+1} \quad \dots \dots (16)$$

が成り立つ。図中の u の分布を表わす折線の延長が格子線と交わる値を $\bar{u}_{i,j}^k$, $\bar{u}_{i,j+1}^k$ とすれば、線 j 上またはその右側に層境界がある場合、

$$\bar{u}_{i,j+1}^k = u_{i,j+1}^k + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_l - \left(\frac{\partial u}{\partial \zeta}\right)_{l+1} \right] \cdot (1-\alpha) \Delta\zeta \quad \dots \dots (17)$$

となり、式(16), 式(17)を式(15)に代入すれば次のようになる。

$$\bar{u}_{i,j+1}^k = u_{i,j+1}^k + Q(u_{i,j+1}^k - u_{i,j}^k) \quad \dots \dots (18)$$

$$\text{ここで, } Q = \frac{(1-\alpha)\left(1 - \frac{k_v^{(t)}}{k_v^{(t+1)}}\right)}{\left\{ \frac{k_v^{(t)}}{k_v^{(t+1)}} + \alpha \left(1 - \frac{k_v^{(t)}}{k_v^{(t+1)}}\right) \right\}} \quad \dots \dots (19)$$

層境界上またはその直前（左側）の格子点で第 ℓ 層の $u_{i,j}^{k+1}$ を求めるときは、式(11)中の $u_{i,j+1}^k$ のかわりに見掛けの間隙水圧 $\bar{u}_{i,j+1}^k$ を用いる。

[II] 層境界直後（右側）の格子点

図-3(b)の様に格子線が層境界の右側にあるとき、 α を図中のごとく定義することにより、

$$\bar{u}_{i,j-1}^k = u_{i,j-1}^k + Q(u_{i,j-1}^k - u_{i,j}^k) \quad \dots \dots (20)$$

$$\text{ここで, } Q = \frac{(1-\alpha)\left(1 - \frac{k_v^{(t+1)}}{k_v^{(t)}}\right)}{\left\{ \frac{k_v^{(t+1)}}{k_v^{(t)}} + \alpha \left(1 - \frac{k_v^{(t+1)}}{k_v^{(t)}}\right) \right\}} \quad \dots \dots (21)$$

[I]と同様に、層境界直後（右側）の格子点で第 $\ell+1$ 層の $u_{i,j}^{k+1}$ を求めるときは、式(11)中の $u_{i,j-1}^k$ のかわりに見掛けの間隙水圧 $\bar{u}_{i,j-1}^k$ を用いれば良い。

2.2.5 境界条件-3（ドレーン境界……平均変化率法）

[I] 第 ℓ 層内部の格子点で成り立つ差分方程式

$r=r_w$ すなわち $\eta=1/\lambda$ においては式(4)が成り立ち、これを差分式に直すと式(22)になる。

$$\frac{u_{2,j}^k - u_{1,j}^k}{r_e \cdot \Delta\eta} + \frac{r_w k_w}{2k_h^{(t)}} \left(\frac{u_{1,j+1}^k - 2u_{1,j}^k + u_{1,j-1}^k}{(H \cdot \Delta\zeta)^2} \right) = 0 \quad \dots \dots (22)$$

ここで、

$$S = \frac{2k_h^{(t)} \cdot (H \cdot \Delta\zeta)^2}{r_w k_w \cdot (r_e \cdot \Delta\eta)} = \frac{8M\mu^2}{(\lambda-1) \cdot N^2} \cdot \frac{k_h^{(t)}}{k_w} \quad \dots \dots (23)$$

とおくと、式(22)は次の式(24)のように整理される。

$$[1, -(2+S), 1] \cdot u_j = -S \cdot u_{2,j}^k \quad \dots \dots (24)$$

$$\text{ここで, } u_j = \left\{ u_{1,j-1}^k, u_{1,j}^k, u_{1,j+1}^k \right\}$$

第 ℓ 層の内部では式(24)が成り立つが、ドレーン端部であって、かつ、層境界前後の格子点においては以下のようないくつかの処理を要する。

[II] ドレーン端部でかつ層境界直前（左側）の格子点

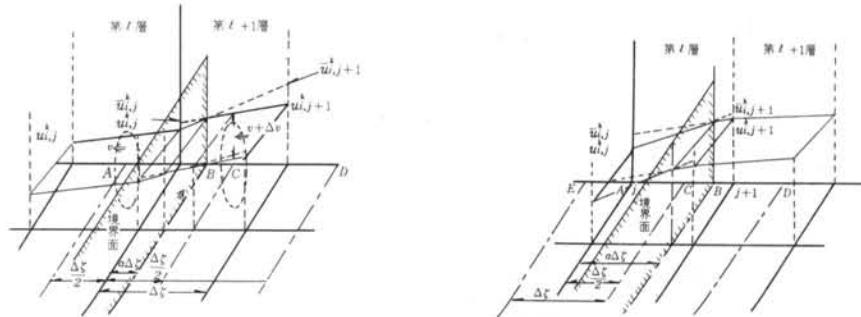


図-4(a) ドレン端部で層境界のモデル(1)

図-4(b) ドレン端部で層境界のモデル(2)

図-4(a), (b)にドレン端部で、かつ、層境界面を挟む格子点 $(1, j)$, $(1, j+1)$ 付近のモデルを示した。 α が $\Delta\zeta$ に対する第 j 点から層境界面までの距離の比を表わすことは図-3と同じである。また、 j 点の前後 $\Delta\zeta/2$ の区間で r 方向の水頭勾配が境界の有無にかかわらず一定であることを仮定する。すなわちこの区間で、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_{r=r_w} = \frac{u_{2,j}^k - u_{1,j}^k}{\Delta r}$$

が成り立つものとする。

[II]-1 : $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ のとき。

図-4(a)で第 j 点の前後 $\Delta\zeta/2$ の位置を各々A点, C点, 層境界をB点とすると、A~B~C間で周囲からドレンに流入する水量は、A面, C面からの流入量の差に等しいから、

$$2\pi r_w \left\{ (\alpha + \frac{1}{2}) k_h^{(t)} + (\frac{1}{2} - \alpha) k_h^{(t+1)} \right\} H \cdot \Delta\zeta \left(\frac{u_{2,j}^k - u_{1,j}^k}{r_e \cdot \Delta\eta} \right) + \pi r_w^2 k_w \left(\frac{u_{1,j+1}^k + u_{1,j-1}^k - \bar{u}_{1,j}^k - u_{1,j}^k}{H \cdot \Delta\zeta} \right) = 0$$

$$\text{上式に, } \bar{u}_{1,j}^k = u_{1,j}^k + Y(u_{1,j}^k - u_{1,j+1}^k) \quad \dots \dots \text{25} \quad Y = - \frac{\alpha \left(1 - \frac{k_v^{(t)}}{k_v^{(t+1)}} \right)}{\left\{ \frac{k_v^{(t)}}{k_v^{(t+1)}} + \alpha \left(1 - \frac{k_v^{(t)}}{k_v^{(t+1)}} \right) \right\}} \quad \dots \dots \text{26}$$

を代入することにより、式24のかわりとして式27を得る。

$$[1, -(2+S+Y), (1+Y)] \cdot u_j = -S \cdot u_{2,j}^k \quad \dots \dots \text{27}$$

$$\text{ここに, } S = \frac{8M\mu^2}{(\lambda-1)N^2} \cdot \frac{\left\{ (\alpha + \frac{1}{2}) k_h^{(t)} + (\frac{1}{2} - \alpha) k_h^{(t+1)} \right\}}{k_w} \quad \dots \dots \text{28}$$

[II]-2 : $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ のとき。

この場合は図-4(b)に見るごとく、連続の式は、

$$2\pi r_w k_h^{(t)} (H \cdot \Delta\zeta) \left(\frac{u_{2,j}^k - u_{1,j}^k}{r_e \cdot \Delta\eta} \right) + \pi r_w^2 k_w \left(\frac{\bar{u}_{1,j+1}^k + u_{1,j-1}^k - 2u_{1,j}^k}{H \cdot \Delta\zeta} \right) = 0$$

上式に式29を代入して、

$$[1, -(2+S+Q), (1+Q)] \cdot u_j = -S \cdot u_{2,j}^k \quad \dots \dots \text{29}$$

ここに S は式28で、 Q は式29で表わされる。

[III] ドレン端部でかつ層境界直後(右側)の格子点

α を図-3(b)と同様に定義する。

[III]-1 : $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$ のとき。

$$[(1+Y), -(2+S+Y), 1] \cdot u_j = -S \cdot u_{2,j}^k \quad \dots \dots \text{30}$$

$$S = \frac{8M\mu^2}{(\lambda-1)N^2} \frac{\left\{ (\alpha + \frac{1}{2})k_h^{(t+1)} + (\frac{1}{2} - \alpha)k_h^{(t)} \right\}}{k_w} \quad \dots \dots (31)$$

$$Y = -\frac{\alpha \left(1 - \frac{k_v^{(t+1)}}{k_v^{(t)}} \right)}{\left\{ \frac{k_v^{(t+1)}}{k_v^{(t)}} + \alpha \left(1 - \frac{k_v^{(t+1)}}{k_v^{(t)}} \right) \right\}} \quad \dots \dots (32)$$

[III]-2 : $\frac{1}{2} \leq \alpha < 1$ のとき。

$$[(1+Q), -(2+S+Q), 1] \cdot u_j = -S \cdot u_{2,j}^k \quad \dots \dots (33)$$

ここに, S は式(2)の ℓ を $\ell+1$ とした値, Q は式(2)で表わされる。

α の定義の違いに注意して吟味すれば、式(2)の Y は式(2)の Q と、また式(2)の Y は式(2)の Q と、それぞれ等しいことが解かる。したがって、

[I]～[III]および $u_{1,1}^k = 0$ を考慮すると、第 ℓ , $\ell+1$ 層境界が第 j , $j+1$ 点の間の j 点寄りにあるとき、ドレン端部で次の方程式が成り立つ。ただし、 Q は式(2)で表わされる Q を用いる。

〔片面排水の場合〕

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1-(2+S) & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & 1-(2+S) & 1 & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & 1-(2+S+Q)(1+Q) & \cdot & \cdot & \cdot \\ & \cdot & \cdot & (1+Q)-(2+S+Q) & 1 & \cdot \\ & \cdot & \cdot & \cdot & 1-(2+S) & 1 \\ \cdot & & & & & \\ & & & & 1-(2+S) & 1 \\ \cdot & & & & \cdot & 2-(2+S) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{1,1}^k \\ u_{1,2}^k \\ \vdots \\ u_{1,j-1}^k \\ u_{1,j}^k \\ u_{1,j+1}^k \\ u_{1,j+2}^k \\ \vdots \\ u_{1,N}^k \\ u_{1,N+1}^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} o \\ u_{2,2}^k \\ \cdot \\ u_{2,j-1}^k \\ u_{2,j}^k \\ u_{2,j+1}^k \\ u_{2,j+2}^k \\ \cdot \\ u_{2,N}^k \\ u_{2,N+1}^k \end{pmatrix}$$

〔両面排水の場合〕 この場合は上記の係数行列の第 $N+1$ 行、第 N 列を 0、第 $N+1$ 列を 1 とする。

もし層境界が j 点よりも $j+1$ 点に近い場合は、 Q として式(2)で表わされる Q を用いる。

2.2.6 境界条件3の補遺(ドレン境界……多項式法)

2.2.5ではドレン端部での境界条件式(2)を、圧密の差分式(1)と独立に使用してドレン端の間隙水圧を求めていく。したがって、ドレン端での間隙水圧の微分係数を、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=1/\lambda} = \frac{u\left(\frac{1}{\lambda} + \Delta\eta, \zeta, T\right) - u\left(\frac{1}{\lambda}, \zeta, T\right)}{\Delta\eta} \quad \dots \dots (34)$$

として計算するので、半径方向分割数 M を大きく取らねば近似誤差が大きい。 M を m 倍すれば、式(1)の R_i から知れるように、安定性を維持するために ΔT を m^2 に反比例して小さくする必要がある。式(34)を平均変化率法と呼び、これに対して、次の方法を多項式法と称して両方法による計算結果を後述する。

ドレン端部で $\zeta = \zeta_j$ における $u_{1,j}^k$ を計算するとき、

$(\eta_i, u_{i,j}^k)$, $i = 2, 3 \dots M+1$ の関係を、 u を η の M 次多項式とみて式(34)が成り立つとする。

$$u_{i,j}^k = C_{1,j} + C_{2,j}\eta_i + C_{3,j}\eta_i^2 + \dots + C_{M,j}\eta_i^{M-1} + C_{M+1,j}\eta_i^M \quad (i=1, 2 \dots M+1) \quad \dots \dots (35)$$

ここで、 $C_j = \{C_{i,j} | i=1, 2, \dots M+1\}$, $U_j = \{u_{i,j}^k | i=1, 2, \dots M+1\}$,

$$A = \left\{ \eta_i^m \middle| i=1, 2, \dots M+1 \right\}, \quad A^{-1} = [a_{i,j}]$$

とかくとき、

$$C_j = A^{-1} \cdot U_j$$

から C_j が求まる。

しかるに、

$$\left(\frac{\partial u}{\partial \eta} \right)_{\eta=\eta_1} = \frac{1}{\lambda} = \sum_{m=1}^M m C_{m+1, j} \eta_1^{m-1} \quad \dots \dots (36)$$

であるから、式 24 で $(u_{2,j}^k - u_{1,j}^k)/\Delta \eta$ のかわりに式 36 の右辺を用いて、

$$u_{1,j-1}^k - 2u_{1,j}^k + u_{1,j+1}^k = -S \left[\sum_{m=1}^M m \eta_1^{m-1} \left(\sum_{i=1}^{M+1} a_{m+1, i} \cdot u_{i,j} \right) \right] = -S \left[\sum_{i=1}^{M+1} u_{i,j} \cdot \left(\sum_{m=1}^M m \eta_1^{m-1} \cdot a_{m+1, i} \right) \right]$$

すなわち、次式を得る。

$$u_{1,j-1}^k - (2-S \cdot E_1) u_{1,j}^k + u_{1,j+1}^k = -S \left(\sum_{i=2}^{M+1} E_i \cdot u_{i,j}^k \right) \quad \dots \dots (37)$$

$$\text{ここに, } E_i = \sum_{m=1}^M m \eta_1^{m-1} \cdot a_{m+1, i} \quad \dots \dots (38)$$

ドレーン端部で同時に非排水端では、

$$2u_{1,N}^k - (2-S \cdot E_1) u_{1,N+1}^k = -S \left(\sum_{i=2}^{M+1} E_i \cdot u_{i,j}^k \right) \quad \dots \dots (39)$$

となり、層境界前後のドレーン端部では、27, 29, 30, 33の各式で左辺では S のかわりに $-S \cdot E_1$ を、右辺では $u_{2,j}^k$ のかわりに $\sum_{i=2}^{M+1} E_i \cdot u_{i,j}^k$ を用いれば良い。

2.2.7 過剰間隙水圧の分布と圧密度

半径方向に平均された圧密度の深度分布 $U_z(\zeta, T)$ は、無次元化された過剰間隙水圧の分布 $u(\eta, \zeta, T)$ から次の式で求められる。

$$U_z(\zeta, T) = \frac{\int_{\frac{1}{\lambda}}^1 (1-u(\eta, \zeta, T)) \eta d\eta}{\int_{\frac{1}{\lambda}}^1 \eta d\eta}$$

$$U(T) = \frac{\int_0^1 \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 (1-u(\eta, \zeta, T)) \eta d\eta d\zeta}{\int_0^1 \int_{\frac{1}{\lambda}}^1 \eta d\eta d\zeta}$$

である。これらの数値計算には台形公式を使った。

§ 3. 数値計算

3.1 数値計算

本論文では、表-2に掲げた各種の2層地盤を扱ったが、同時に2層のそれぞれの土質定数からなる单一地盤の差分計算も行なって、多層地盤のドレーン圧密解析を持つ工学的意味を吟味した。インプット項目のうち L は式(5)の解析解で、ドレーンの脱水抵抗を表わす主たるパ

ラメータと同一のものである。3層地盤以上はいうに及ばず、2層地盤であっても現実に考えられ得る各パラメータの組合せを網羅した計算は困難であるので、設計あるいはデータ分析に際してその都度数値を与えて計算しなければならない。

ここでは、表-2にみるとおり2層から成る等方性異質地盤の上層と下層に関する土質定数の比を異質の程度と呼び、これを種々に変えて各層並びに全層平均圧密度、

CASE	F計算 方 法	分 割	インプット項目								参考値			
			第1層のL	λ	μ	δ	ε	H_1/H	β	γ	第2層のL	両層の Lの加重 平均値	このインプット項目の 表わす一つの実際例 (H=20m, de=2.5m, ds=50cm, ks=0.01)	
1	平均 変化 率 法	$M=20$	0.51876			1	1	1.0	1	1	0.51876	0.51876	$k^{(1)} = 1.0 \times 10^{-6}$	$k^{(2)} = 1.0 \times 10^{-6}$
2			"			1	1	0.5	4	4	"	"	$=1.0 \times *$	$=1.0 \times *$
3			"			1	1	*	1/4	1/4	"	"	$=1.0 \times *$	$=1.0 \times *$
4			"			4	4	*	4	4	2.07576	1.29726	$=1.0 \times *$	$=4.0 \times *$
5			2.07506			1/4	1/4	*	1/4	1/4	0.51876	"	$=1.0 \times *$	$=0.25 \times *$
11			0.51876			1	1	1.0	1	1	0.51876	0.51876	$=1.0 \times 10^{-6}$	$=1.0 \times 10^{-6}$
12			0.20750			4	4	0.5	4	4	0.83002	"	$=0.4 \times *$	$=1.6 \times *$
13			0.83002			1/4	1/4	*	1/4	1/4	0.20750	"	$=1.6 \times *$	$=0.4 \times *$
14			0.03989			25	25	*	25	25	0.99763	"	$\Delta 0.0769 \times *$	$=1.9231 \times *$
15			0.99763			1/25	1/25	*	1/25	1/25	0.03989	"	$=1.9231 \times *$	$=0.0769 \times *$
16			0.01027			100	100	*	100	100	1.02725	"	$=0.0198 \times *$	$=1.9802 \times *$
17			1.02725			1/100	1/100	*	1/100	1/100	0.01027	"	$=1.9802 \times *$	$=0.0198 \times *$
18			0.00259			400	400	*	400	400	1.03493	"	$=0.0050 \times *$	$=1.9950 \times *$
19			1.03493			1/400	1/400	*	1/400	1/400	0.00259	"	$=1.9950 \times *$	$=0.0050 \times *$
22			0.15962			4	4	0.25	4	4	0.63847	0.51876	$=0.30769 \times 10^{-6}$	$=1.23077 \times 10^{-6}$
23			1.18573			1/4	1/4	*	1/4	1/4	0.29644	"	$=2.2857 \times *$	$=0.57143 \times *$
24	多 項 式 法	$M=8$	0.02730			25	25	*	25	25	0.68258	"	$=0.052632 \times *$	$=1.31579 \times *$
25			1.85270			1/25	1/25	*	1/25	1/25	0.07411	"	$=3.5714 \times *$	$=0.14286 \times *$
26			0.00689			100	100	*	100	100	0.68938	"	$=0.013289 \times *$	$=1.3289 \times *$
27			2.01460			1/100	1/100	*	1/100	1/100	0.02015	"	$=3.8835 \times *$	$=0.038835 \times *$
28			0.00173			400	400	*	400	400	0.69109	"	$=0.00333 \times *$	$=1.3322 \times *$
29			2.05959			1/400	1/400	*	1/400	1/400	0.00515	"	$=3.97022 \times *$	$=0.009926 \times *$
32			0.29644			4	4	0.75	4	4	1.18573	0.51876	$=0.57143 \times 10^{-6}$	$=2.2857 \times 10^{-6}$
33			0.63847			1/4	1/4	*	1/4	1/4	0.15962	"	$=1.23077 \times *$	$=0.30769 \times *$
34			0.07411			25	25	*	25	25	1.85270	"	$=0.142857 \times *$	$=3.5714 \times *$
35			0.68258			1/25	1/25	*	1/25	1/25	0.02730	"	$=1.31579 \times *$	$=0.052632 \times *$
36			0.02015			100	100	*	100	100	2.01460	"	$=0.038835 \times *$	$=3.8835 \times *$
37			0.68938			1/100	1/100	*	1/100	1/100	0.00689	"	$=1.3289 \times *$	$=0.013289 \times *$
38			0.00515			400	400	*	400	400	2.05959	"	$=0.009926 \times *$	$=3.97022 \times *$
39			0.69109			1/400	1/400	*	1/400	1/400	0.00173	"	$=1.3322 \times *$	$=0.00333 \times *$

表-2 2層地盤の数値計算例

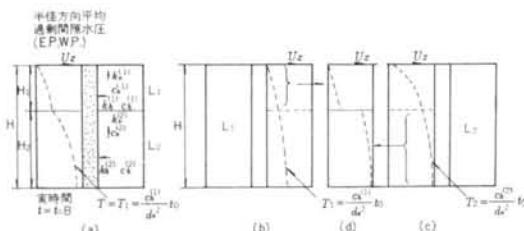


図-5 単一地盤解の使用方法(模式図)

過剰間隙水圧分布を比較するが、Lの層厚加重平均値が主として0.52の場合に限った。

次に单一地盤の解析解の扱い方で、2層地盤の圧密を近似する可能性を調べるために、以下のような近似解を考察した。

図-5(a)のような差分による2層地盤の半径方向平均過剰間隙水圧分布に対し、上層および下層がそれぞれ全

層の厚さにわたって存在すると仮定した単一地盤の解を同図(b), (c)の点線で表わす。(b), (c)からそれぞれ上層、下層が実在する深度におけるUzの分布を抜き出して(d)に示す。このようにして求めた近似解(d)と差分解(a)の分布形の違いと、両図の空間内平均圧密度およびその経時変化を比較する。

3.2 数値計算結果と考察

单一地盤に関して、平均変化率法、多项式法のそれぞれの差分解、および解析解式(7)によって求めたUの経時変化を図-6に、またT=0.1のときのuの分布とUzの分布を図-7に示したが、良い一致をみることができた。

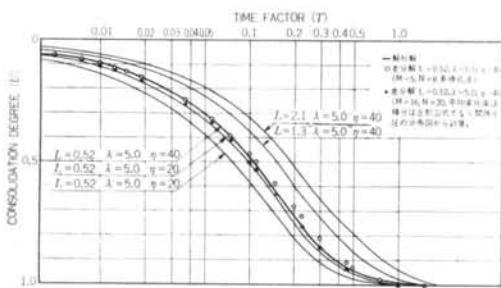


図-6 $L=0.52, \lambda=5.0, \eta=40$ の場合の解析解と差分解の比較と各種 Case の解析解による圧密度曲線

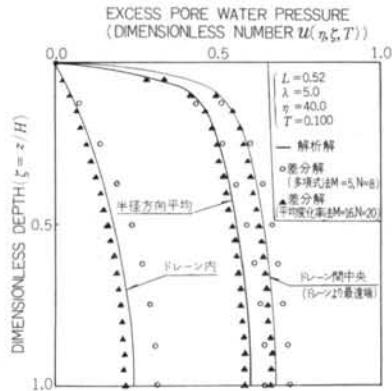


図-7 過剰間隙水圧の深度分布・解析解と差分解との比較

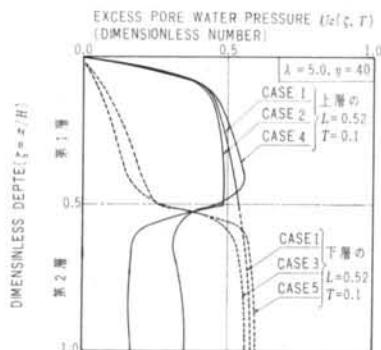


図-8 第2層が第1層と同質の地盤 (Case 1),
第2層が第1層の C_h, C_k の4倍 (Case 2),
第2層が第1層の C_h, C_k, k_b, k_b の4倍 (Case 4),
第1層が第2層の C_h, C_k の4倍 (Case 3),
第1層が第2層の C_h, C_k, k_b, k_b の4倍 (Case 5),
の各種間の同じ実時間経過後の u の分布・差分解 (平均変化率法 $M=16, N=20$)

図-8は上層と下層の層厚が等しく、性質が異なる場合の半径方向平均過剰間隙水圧分布である。単一層である Case 1 に対し、Case 2 は透水係数が上・下層共 Case 1 に等しく、圧密係数が上層は Case 1 と同じで下層は

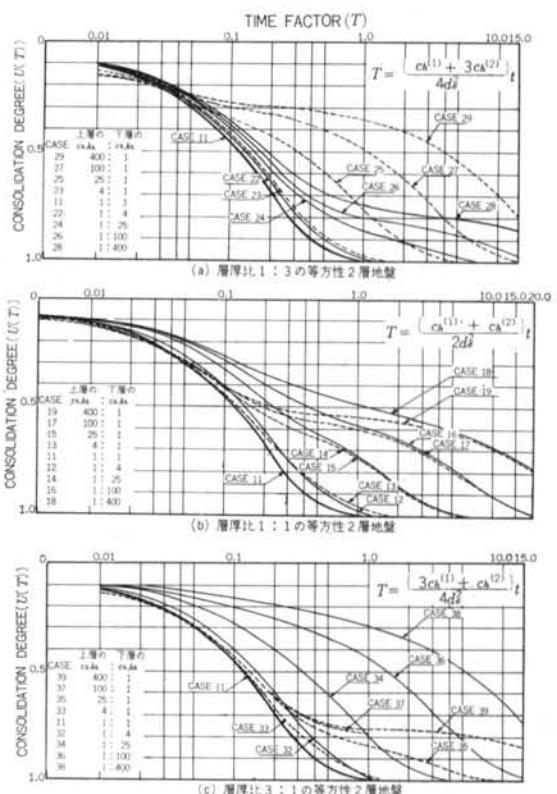


図-9 各種の場合の \bar{C}_h に関する時間係数と圧密度曲線
($\lambda=5, \eta=40, \bar{L}=0.52$)

Case 1 の 4 倍の例である。Case 2 の下層の圧密が速いため上層の間隙水圧も Case 1 より小さい。Case 4 は、上層が Case 1 と同じであるが、下層が透水・圧密係数とも上層の 4 倍という例で、上層の内部に間隙水圧のピークがみられ、その位置から下の流れは下層に向かう速度成分があることに興味が持たれる。点線で示した Case 1, 3, 5 は下層の土質が互いに等しいが、上層の圧密係数が下層の 4 倍 (Case 3)、圧密係数、透水係数とも 4 倍 (Case 5) の例である。この場合も層境界近傍を除けば、下層は上層の性質の違いによって大きな影響は受けないといえよう。

図-9(a)(b)(c)に、 λ, η, \bar{L} なるパラメータを持つ单一地盤の圧密度曲線 (Case 11) を示した。横軸は C_h の層厚加重平均 \bar{C}_h に関する時間係数である。 λ, η, \bar{L} が同じであっても、上・下層の異質の程度が大きい程、单一地盤の圧密度曲線より遅れ、(a), (b), (c)いずれも大きい C_h, k_h と小さい C_h, k_h の比が 4 度程度であれば、遅れは高々 10% であるが、この比が大きくなると著しい遅れを示す。この比が等しい 2 層地盤でも、单一地盤の圧密度曲線からの遅れのパタ

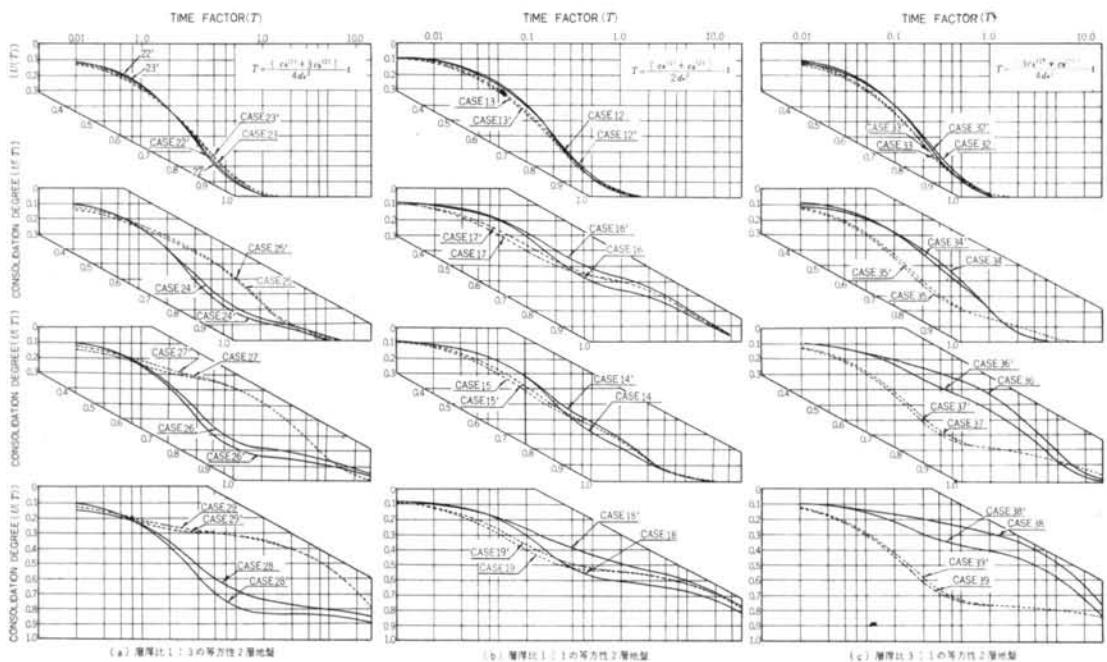


図-10 2層地盤の圧密度曲線と近似解法の圧密度曲線の比較

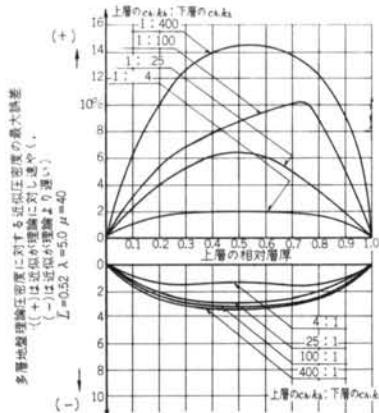


図-11(a) 多層地盤理論圧密度に対する近似圧密度の最大誤差
と相対層厚の関係

ーンを次の4つに分けることによって興味ある特徴を指摘できる。すなわち、上層厚さの全層厚に対する比を相対層厚と呼ぶと、上層が、

- ①大きい C_h , k_h を持ち、その相対層厚が大
 - ②小さい C_h , k_h を持ち、その相対層厚が小
 - ③大きい C_h , k_h を持ち、その相対層厚が小
 - ④小さい C_h , k_h を持ち、その相対層厚が大
- の順に、初期の圧密度曲線の遅れが大きくなる。同図(c)でみるように①のパターンは、異質の程度に殆んど影響

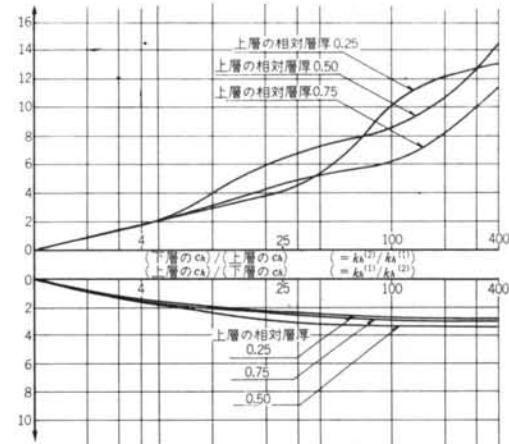


図-11(b) 多層地盤理論圧密度に対する近似圧密度の最大誤差
と異質の程度の関係

されずに圧密度が相対層厚に等しくなるまで单一地盤の圧密度曲線からの遅れが少ない。逆に④のパターンは(c)の実線のごとく、異質の程度が小さくとも圧密の初期から遅れが目立つ。ただし①のパターンでも、圧密度が相対層厚を超える付近以降は著しく遅れ始める。この考察を試みれば、いま \bar{L} , \bar{C}_h が単一地盤(Case 11)の L , C_h とそれぞれ等しい2層地盤を扱っているので当然のことといえよう。上層のドレーンによる脱水抵抗は単一地盤より大きいが、 C_h も大きいので圧密は速く、かつ上層

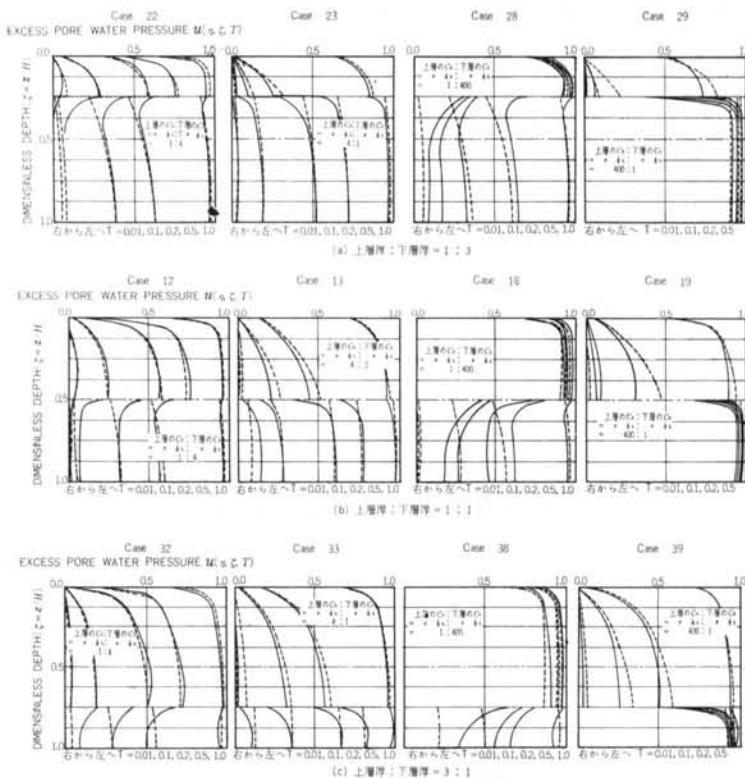


図-12 2層地盤の間隙水圧分布（実線）と単一地盤の解から作った近似分布（点線）（ $T : \bar{C}_h$ に関する時間係数）

の相対層厚が大なる故、圧密の遅い下層を含めた空間内平均圧密度は単一地盤の経時変化と同程度の傾向を示すのである。そして上層の圧密度がほぼ100%に達すると、空間内平均圧密度は L, C_h の小さい下層に支配される訳であるから、単一地盤の圧密度曲線から大きく遅れてくると考えられる。

図-5の模式図にて説明した方法、すなわち図-5(d)の上層と下層の各層内平均圧密度を求めて、その層厚加重平均値を図-5(a)に示す2層地盤の圧密度に対する近似と考える方法で、Case 12～Case 39の各種の2層地盤圧密度曲線と近似曲線とを対比したものが図-10である。異質性が特に大きい場合を除けば、単一地盤解の組合せによる近似曲線は工学的に許容できる誤差範囲にあることが認められよう。

図-11に、近似圧密度曲線の差分による圧密度曲線に対する最大誤差を、異質の程度あるいは上層の相対層厚をパラメータとして示した。この図によると、上・下層の C_h, k_h に400倍の違いがあると最大誤差は15%に達するが、現実に存在する2層地盤の異質の程度が10倍であることを考慮すれば、数%の誤差内にあるといえる。

図-12は、2層地盤内の間隙水圧の分布と、2つの單

一地盤計算から図-5(d)のようにして作った近似分布と比べたものである。特に異質性が100倍程度の大きさになると、上層あるいは下層の無次元水圧が0.5の近辺で水圧の差が大きいが、異質性がこれより小さければ、両層内とも圧密の初期から終期に至るまで分布形に差が少ないとわかる。ただし、層境界においては単一地盤の分布形を組合せた近似分布形に不連続がみられるのは自明である。

§ 4. 結 論

ドレンの脱水抵抗に関する主たるパラメータ L を0.52とする等方性2層地盤の数値解析の結果、以下の傾向を認めた。

- ①上層より下層の C_h が大きい場合に、上層の内部で間隙水流の鉛直成分が零となる位置が存在し、この位置より下に、下層に向う流れがある。
- ②上・下層の厚さが同程度であるならば、各層内部における間隙水圧のアイソクローンは互いに他方の土質定数の影響を受けることが少ない。

③多層地盤の圧密度曲線と、各層の土質定数を層厚を重みとして平均した値を持つ单一地盤の圧密度曲線とは、各層間の異質性が小さいときは比較的良い一致を示すが、異質性が大きくなると曲線の型が全く異なり、单一地盤の圧密度曲線が多層地盤の圧密度曲線の近似とはならない。

④多層地盤の各層ごとに、その土質定数を持ち厚さが全層厚に等しい地盤を仮定して半径方向平均過剰間隙水圧分布を求めた後に、各分布形から実際に各層が存在する位置での分布形だけを抜き出して多層地盤の水圧分布に近似すると、異質性が小さい場合は良い近似となる。また、この近似分布形から求めた平均圧密度を縦軸に、各層の C_h の層厚加重平均 \bar{C}_h に関する時間係数を横軸にとれば、異質性の大きい多層地盤に対しても十分良い近似圧密度曲線となる。

§ 5. おわりに

本論文は、実際の地盤改良の現場において多層地盤に打設されたドレンに遭遇して取り組まれた。

設計や動態観測データの分析に際して、本研究のような数値解析も1つの方法として利用できよう。計算例がごく限られた場合にとどまつたが、さらに異方性をも考慮した計算を行ない、单一地盤解析解に関する筆者の利用方法の妥当性を検証することによって多層地盤の扱いも比較的容易になろう。

次報で、実際の工事現場のデータと、本数値解析による地盤改良効果の分析結果を報告する予定である。

記号の説明

c_h	水平方向圧密係数 ($c_h^{(1)}$, $c_h^{(\ell)}$ は第1層, 第 ℓ 層の水平方向圧密係数, \bar{c}_h は各層 c_h の層厚加重平均値)
c_v	鉛直方向圧密係数 ($c_v^{(\ell)}$ は第 ℓ 層の鉛直方向圧密係数)
D_l	第 ℓ 層の下端深度
d	換算円直径
d_w	ドレン直径
H	多層地盤の全層厚 (ドレンの長さ)
k_h	水平方向透水係数 ($k_h^{(1)}$, $k_h^{(\ell)}$ は第1層, 第 ℓ 層の水平方向透水係数, \bar{k}_h は各層 k_h の層厚加重平均値)
k_v	鉛直方向透水係数 ($k_v^{(\ell)}$ は第 ℓ 層の鉛直方向透水係数)
L	ドレンの脱水抵抗を支配する主たるパラメータ ($L = \frac{32}{\pi^2} \frac{k_h^{(1)}}{k_v} \left(\frac{H}{d_w} \right)^2$, L は $k_h^{(1)}$ に各層の $k_h^{(\ell)}$ を使い H は常に全層厚として求めた各層 L の層厚加重平均値)
ℓ	層の番号
M	ドレン端から隣り合うドレン中間までの半径方向分割数
N	全層厚 H の鉛直方向分割数
n	多層地盤の全層数
r_e	換算円半径
r_w	ドレン半径
r	半径方向座標
t	実際の圧密時間
T	時間係数 ($T = \frac{c_h^{(1)}}{d_w^2} \cdot t$)
u	過剰間隙水圧 (u は第 ℓ 層の u)
$u_{i,j}^k$	格子点 (i, j) , $T=k$ における無次元過剰間隙水圧
U_z	半径方向に平均された圧密度
U	半径・鉛直両方向に平均された空間内平均圧密度
z	鉛直方向座標
α	層境界を挟む格子点から層境界までの距離の格子点間隔に対する比
β	各層 $c_h^{(\ell)}$ の $c_h^{(1)}$ に対する比
γ	各層 $c_v^{(\ell)}$ の $c_v^{(1)}$ に対する比
δ	各層 $k_h^{(\ell)}$ の $k_h^{(1)}$ に対する比
ϵ	各層 $k_v^{(\ell)}$ の $k_v^{(1)}$ に対する比
ζ	鉛直方向の無次元座標
η	半径方向の無次元座標
λ	謂ゆるバロン指数 ($\lambda = d_e/d_w$)
μ	ドレンの細長比 ($\mu = H/d_w$)
ϕ	無次元過剰間隙水圧
φ	スカラーポテンシャル

<参考文献>

- 1) H. Gray: "Simultaneous Consolidation of Contiguous layers of Unlike Compatible Soils" Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 110 (1945) pp. 1327~1356
- 2) M. B. Abbott: "One-dimensional Consolidation of Multi-layered Soils" Geotechnique, Vol. 10, No. 4 (1960) pp. 151~165
- 3) R. A. Barron: "Consolidation of Fine Grained Soils by Drain Wells" Trans. Am. Soc. Civ. Engrs., Vol. 113, No. 2346 (1948) pp. 718~742
- 4) H. Aboshi, H. Yoshikuni & T. Uchibayashi: "Stability of Soft Clay Foundations Underneath Embankment, Consolidated by Means of Card-board Drains" Soils and Foundations, Vol. 9, No. 2 (1969) pp. 1~4
- 5) H. Aboshi & H. Yoshikuni: "A Study on the Consolidation Process Affected by Well Resistance in the Vertical Drain Method" Soil and Foundation, Vol. 7, No. 4 (1967) pp. 38~58
- 6) H. Yoshikuni & H. Nakanodo: "Consolidation of Soils by Vertical Drain wells with Finite Permeability" Soils and Foundations, Vol. 14, No. 2 (1974) pp. 35~46
- 7) 吉国洋: "間隙水圧を中心とした圧密論の再構成" 土木学会論文報告集 第212号 (1973) pp. 41~50