

無限弾性体内の円孔近傍の応力に及ぼす反射波の影響

—せん断波が入射した場合—

竹 脇 尚 信

§ 1. はじめに

ロックオイルタンクや地下発電所などの地下空洞の耐震性を検討するとき、円筒型地下タンクの耐震設計などで用いられる応答変位法的な考え方を準用すると便利である。つまり、地震波を単純な調和波形とみなしてその振幅と波長を与え、空洞近傍の応力は静的手法によって解析し、その地震時安全性を評価するわけである。

この方法は静的解析に基づいているので解析結果に対する判断が容易であり、設計という観点からは便利かつ有効であると考えられる。しかし、1つの問題点は、地震波の波長が空洞のディメンジョンにくらべて短かいときに現れる反射波の影響が無視されることである。そこで、ロックオイルタンクや地下発電所などのための地下空洞は、地表面下かなりの深さに建設されると考えられるのでこれを無限弾性体内の円孔とみなし、その弾性体がせん断ひずみを静的に受けた場合（静的応力）と動的に受けた場合（動的応力）の応力を計算し、両者を比較することにより円孔近傍の応力に及ぼす反射波の影響を検討することにした。

静的応力は、調和波形をしたせん断ひずみが作用したのとして、応力関数を用いて解析した。一方、動的応力は、岡本、加藤、伯野¹⁾あるいは C. C. Mow, L. J. Mente²⁾らの理論に基づいて、進行する調和形のせん断ひずみが与えられたのとして解析した。そして、数値解析および静的応力と動的応力の比較検討は、円孔周上の円周方向の垂直応力について行なった。このとき、解析領域は等方等質弾性体で、かつ平面ひずみの状態にあるものと仮定した。

§ 2. 静的応力の算定法

2.1 解析手順

この章では、円孔を有する無限弾性体が静的なせん断

ひずみを受けたときの応力分布（静的応力）の算定法について述べるが、応力算定のための定式化は次のような手順で行なう。

まず始めに、円孔の存在しない無限領域を考えて、そこへ図-1に示すような調和波形をしたせん断ひずみが静的に作用したのとして応力を計算する。この段階を Step-1 と呼ぶ。

次に、図-2に示すような半径 r_0 の円孔を有する無限領域を考えて、その円孔周上のみ外力が作用する場合の応力を計算する。ただし、このときの外力としては、Step-1 での $r=r_0$ に沿った σ_r と $\tau_{r\theta}$ で、かつ符号を変えたものを取る。この段階を Step-2 と呼ぶ。

最後に、Step-1 での応力と Step-2 での応力を加え合わせる。

2.2 入力ひずみによる応力 (Step-1)

2.2.1 入力ひずみ

図-1のように座標軸を定めて、 x 軸および y 軸方向の垂直ひずみを、おのおの ε_x , ε_y 、せん断ひずみを γ_{xy} とするとき、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = ae^{i\beta x} \end{aligned} \quad \dots(1)$$

が与えられともとする。ただし、 a は入力ひずみの振

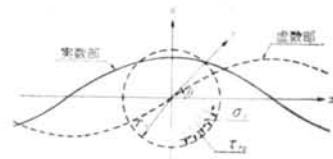


図-1 入力ひずみの分布形

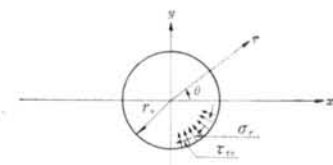


図-2 円孔上での応力の解放

幅, β は実数で波長に関するパラメータ, i は虚数単位である.

解析領域は等方等質弾性体で, かつ平面ひずみの状態にあると仮定すれば, 式(1)の条件のもとで発生する応力は,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \mu a e^{i\beta x} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

となる. ただし, σ_x および σ_y はおのおの x 軸および y 軸方向の垂直応力, τ_{xy} はせん断応力, μ はせん断弾性係数である.

式(2)に含まれる $e^{i\beta x}$ を級数に展開し³⁾, さらに実数部と虚数部を分けて書くと, 式(2)は次のよう変形される.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x = \sigma_y = 0 \\ \tau_{xy} = \mu a \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m (-1)^m J_{2m}(\eta) \cos 2m\theta + i\mu a \sum_{m=0}^{\infty} 2(-1)^m J_{2m+1}(\eta) \cos(2m+1)\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

ただし, $J_m(\eta)$ は m 次の第1種ベッセル関数で, ε_m と η は次式で定義されるものである.

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & (m=0) \\ 2 & (m \geq 1) \end{cases} \dots\dots(4)$$

$$\eta = \beta r \dots\dots(5)$$

2.2.2 実数部応力

入力ひずみを複素数で与えたので, これに対応する応力もまた複素タイプとなった. しかし, これから後の解析では実数タイプで扱う方が便利であり, かつ極座標を用いるので, 入力ひずみの実数部に対応する応力を実数部応力, 虚数部に対応する応力を虚数部応力と呼ぶことにして, おのおのを極座標へ変換する.

図-1を参照すれば, $x-y$ 座標での応力と $r-\theta$ 座標での応力との間には,

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ \tau_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

の関係があるから, 式(3)の実数部を取り出してこれらの式に代入すれば次のようになる.

$$\sigma_r^{(r)} = \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \{J_{2(m-1)}(\eta) - J_{2(m+1)}(\eta)\} \sin 2m\theta \dots\dots(7)$$

$$\sigma_\theta^{(r)} = -\sigma_r^{(r)} \dots\dots(8)$$

$$\tau_{r\theta}^{(r)} = \mu a \left[-J_2(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \{J_{2(m-1)}(\eta) + J_{2(m+1)}(\eta)\} \cos 2m\theta \right] \dots\dots(9)$$

ただし, $\sigma_r^{(r)}$ などの上付き添字(r)は実数部応力であることを示し, σ_r と σ_θ は r 方向および θ 方向の垂直応力, $\tau_{r\theta}$ はせん断応力である.

2.2.3 虚数部応力

実数部応力の場合と同様に, 式(3)の虚数部を取り出して式(6)に代入すれば, 極座標での虚数部応力は次のようになる.

$$\sigma_r^{(i)} = \mu a \left[\{J_1(\eta) + J_3(\eta)\} \sin \theta + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \{J_{2m-1}(\eta) - J_{2m+3}(\eta)\} \sin(2m+1)\theta \right] \dots\dots(10)$$

$$\sigma_\theta^{(i)} = -\sigma_r^{(i)} \dots\dots(11)$$

$$\tau_{r\theta}^{(i)} = \mu a \left[\{J_1(\eta) - J_3(\eta)\} \cos \theta + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \{J_{2m-1}(\eta) + J_{2m+3}(\eta)\} \cos(2m+1)\theta \right] \dots\dots(12)$$

このときの上付き添字(i)は虚数部応力を示している.

2.3 円孔を有する無限弾性体で円孔周上のみ外力が作用する場合の応力 (Step-2)

2.3.1 応力の一般形

図-2に示すように, 無限の広がりをもつ等方等質弾性体内に半径 r_0 の円孔が存在し, その円周上のみ外力が作用するものとする. そうすれば, その弾性体内の応力分布を決定するための応力関数は, $r=\infty$ での応力は0および変位は1価でなければならないので, 次のような形になる⁴⁾.

$$\phi = r_0^2 \left[A_0' \theta + A_0 \log r + A_1 R_0^{-1} \{\theta \sin \theta - 0.5(1-\lambda_0) \log r \cdot \cos \theta \} \right]$$

$$+B_1 R_0^{-1} \{ \theta \cos \theta + 0.5(1-\lambda_0) \log r \cdot \sin \theta \} + R_0 (C_1 \cos \theta + D_1 \sin \theta) \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{ R_0^{n-2} (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + R_0^n (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \} \quad \dots\dots (13)$$

ここに、 A_0 などは境界条件から決定される未定係数で、 λ_0 は側圧係数と呼ばれ、ポアソン比 ν を用いて、
 $\lambda_0 = \nu / (1 - \nu)$ (14)

で定義され、

$$R_0 = r_0 / r \quad \dots\dots (15)$$

である。

応力と応力関数の間には、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} \\ \tau_{r\theta} &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r \partial \theta} \end{aligned} \right\} \dots\dots (16)$$

の関係があるから、式(13)を代入すれば応力は次のようになる。

$$\sigma_r = A_0 R_0^2 + 0.5(3 + \lambda_0) R_0 (A_1 \cos \theta - B_1 \sin \theta) - 2 R_0^3 (C_1 \cos \theta + D_1 \sin \theta) \\ - \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n+2)(n-1) R_0^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + n(n+1) R_0^{n+2} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \} \quad \dots\dots (17)$$

$$\sigma_\theta = -A_0 R_0^2 - 0.5(1 - \lambda_0) R_0 (A_1 \cos \theta - B_1 \sin \theta) + 2 R_0^3 (C_1 \cos \theta + D_1 \sin \theta) \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{ (n-2)(n-1) R_0^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) + n(n+1) R_0^{n+2} (C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta) \} \quad \dots\dots (18)$$

$$\tau_{r\theta} = A_0' R_0^2 - 0.5(1 - \lambda_0) R_0 (A_1 \sin \theta + B_1 \cos \theta) - 2 R_0^3 (C_1 \sin \theta - D_1 \cos \theta) \\ + \sum_{n=2}^{\infty} \{ n(n-1) R_0^n (-A_n \sin n\theta + B_n \cos n\theta) + n(n+1) R_0^{n+2} (-C_n \sin n\theta + D_n \cos n\theta) \} \quad \dots\dots (19)$$

2.3.2 実数部応力

式(17)~(19)は円孔を有する無限領域の、その円周に沿って任意の外力が作用するときの応力分布を表わす式であるが、これらの式には未定係数が含まれているので、これらの係数を2.1で述べた方法によって決定する。このとき、Step—1の実数部および虚数部応力の $r=r_0$ での値を外力として用いて定まる応力を、それぞれ実数部応力および虚数部応力と呼ぶことにする。

式(7)と式(9)に $r=r_0$ を代入すれば、

$${}_0\sigma_r^{(r)} = \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \{ J_{2(m-1)}(\eta_0) - J_{2(m+1)}(\eta_0) \} \sin 2m\theta \quad \dots\dots (20)$$

$${}_0\tau_{r\theta}^{(r)} = \mu a \left[-J_2(\eta_0) + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} \{ J_{2(m-1)}(\eta_0) + J_{2(m+1)}(\eta_0) \} \cos 2m\theta \right] \quad \dots\dots (21)$$

となる。ここに、 ${}_0\sigma_r^{(r)}$ などの意味は以下のとおりである。

$${}_0\sigma_r^{(r)} = [\sigma_r^{(r)}]_{r=r_0}$$

$${}_0\tau_{r\theta}^{(r)} = [\tau_{r\theta}]_{r=r_0}$$

$$\eta_0 = \beta r_0$$

同様に式(17)と式(19)にも $r=r_0$ を代入し、式(20)と式(21)におのおの対応する項のみを取り出せば次のようになる。

$${}_0\sigma_r = - \sum_{m=1}^{\infty} \{ 2(m+1)(2m-1)B_{2m} + 2m(2m+1)D_{2m} \} \sin 2m\theta \quad \dots\dots (22)$$

$${}_0\tau_{r\theta} = A_0' + \sum_{m=1}^{\infty} \{ 2m(2m-1)B_{2m} + 2m(2m+1)D_{2m} \} \cos 2m\theta \quad \dots\dots (23)$$

式(20)と式(21)の符号をかえたものが式(22)と式(23)におのおの等しいと置くと、式(22)と式(23)に含まれる未定係数は、

$$A_0' = \mu a J_2(\eta_0)$$

$$B_{2m} = \mu a \frac{(-1)^{m-1}}{2^{m-1}} J_{2(m-1)}(\eta_0)$$

$$D_{2m} = -\mu a \frac{(-1)^{m-1}}{2^m(2m+1)} \{ (2m+1)J_{2(m-1)}(\eta_0) + J_{2(m+1)}(\eta_0) \} \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

と決定される。したがって、これらの係数を式(17)~(19)に代入すれば、実数部応力は以下ようになる。

$$\sigma_r^{(r)} = \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} R_0^{2m} \{ -2(m+1) + (2m+1)R_0^2 \} J_{2(m-1)}(\eta_0) + R_0^2 J_{2(m+1)}(\eta_0) \} \sin 2m\theta \quad \dots\dots(24)$$

$$\sigma_\theta^{(r)} = \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} R_0^{2m} \{ 2(m-1) - (2m+1)R_0^2 \} J_{2(m-1)}(\eta_0) - R_0^2 J_{2(m+1)}(\eta_0) \} \sin 2m\theta \quad \dots\dots(25)$$

$$\tau_{r\theta}^{(r)} = \mu a R_0^2 J_2(\eta_0) + \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} R_0^{2m} \{ 2m - (2m+1)R_0^2 \} J_{2(m-1)}(\eta_0) - R_0^2 J_{2(m+1)}(\eta_0) \} \cos 2m\theta \quad \dots\dots(26)$$

2.3.3 虚数部応力

実数部応力の場合と同様な方法により、式(17)~(19)に含まれる未定係数を決定すれば、

$$B_1 = \mu a J_1(\eta_0)$$

$$D_1 = -0.25 \mu a \{ (1 + \lambda_0) J_1(\eta_0) - 2 J_3(\eta_0) \}$$

$$B_{2m+1} = \mu a \frac{(-1)^{m-1}}{2^m} J_{2m-1}(\eta_0)$$

$$D_{2m+1} = -\mu a \frac{(-1)^{m-1}}{2(m+1)(2m+1)} \{ 2(m+1)J_{2m-1}(\eta_0) + J_{2m+3}(\eta_0) \} \quad (m=1, 2, 3, \dots)$$

となるから、虚数部応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(i)} &= \mu a [-0.5 R_0 \{ (3 + \lambda_0) - (1 + \lambda_0) R_0^2 \} J_1(\eta_0) - R_0^3 J_3(\eta_0)] \sin \theta \\ &+ \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} R_0^{2m+1} [-\{ (2m+3) - 2(m+1)R_0^2 \} J_{2m-1}(\eta_0) + R_0^2 J_{2m+3}(\eta_0)] \sin(2m+1)\theta \quad \dots\dots(27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(i)} &= \mu a [0.5 R_0 \{ (1 - \lambda_0) - (1 + \lambda_0) R_0^2 \} J_1(\eta_0) + R_0^3 J_3(\eta_0)] \sin \theta \\ &+ \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} R_0^{2m+1} [\{ (2m-1) - 2(m+1)R_0^2 \} J_{2m-1}(\eta_0) - R_0^2 J_{2m+3}(\eta_0)] \sin(2m+1)\theta \quad \dots\dots(28) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(i)} &= \mu a [-0.5 R_0 \{ (1 - \lambda_0) + (1 + \lambda_0) R_0^2 \} J_1(\eta_0) + R_0^3 J_3(\eta_0)] \cos \theta \\ &+ \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} R_0^{2m+1} [\{ (2m+1) - 2(m+1)R_0^2 \} J_{2m-1}(\eta_0) - R_0^2 J_{2m+3}(\eta_0)] \cos(2m+1)\theta \quad \dots\dots(29) \end{aligned}$$

2.4 円孔を有する無限弾性体でのせん断ひずみが与えられた場合の応力分布

2.2で求めた応力に2.3での結果を加え合わせれば表記の解は求まるが、このときの円周上での境界条件は $\sigma_r = \tau_{r\theta} = 0$ であるので、円孔内部は空の状態を想定していることになる。

2.4.1 実数部応力

式(7)~(9)と式(24)~(26)をおのおの加え合わせれば、式(1)の実数部で表わされるひずみが作用したときの応力は次のようになる。

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(r)} &= \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [J_{2(m-1)}(\eta) - R_0^{2m} \{ 2(m+1) - (2m+1)R_0^2 \} J_{2(m-1)}(\eta_0) \\ &- J_{2(m+1)}(\eta) + R_0^{2m+2} J_{2(m+1)}(\eta_0)] \sin 2m\theta \quad \dots\dots(30) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(r)} &= \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [-J_{2(m-1)}(\eta) + R_0^{2m} \{ 2(m-1) - (2m+1)R_0^2 \} J_{2(m-1)}(\eta_0) \\ &+ J_{2(m+1)}(\eta) - R_0^{2m+2} J_{2(m+1)}(\eta_0)] \sin 2m\theta \quad \dots\dots(31) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(r)} &= \mu a \{ -J_2(\eta) + R_0^2 J_2(\eta_0) \} + \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [J_{2(m-1)}(\eta) + R_0^{2m} \{ 2m - (2m+1)R_0^2 \} J_{2(m-1)}(\eta_0) \\ &+ J_{2(m+1)}(\eta) - R_0^{2m+2} J_{2(m+1)}(\eta_0)] \cos 2m\theta \quad \dots\dots(32) \end{aligned}$$

2.4.2 虚数部応力

実数部応力の場合と同様に、式(10)~(12)と式(27)~(29)を用いれば次のような結果を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_r^{(i)} = & \mu a [J_1(\gamma) - 0.5 R_0 \{(3 + \lambda_0) - (1 + \lambda_0) R_0^2\} J_1(\gamma_0) + J_3(\gamma) - R_0^3 J_3(\gamma_0)] \sin \theta \\ & + \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [J_{2m-1}(\gamma) - R_0^{2m+1} \{(2m+3) - 2(m+1) R_0^2\} J_{2m-1}(\gamma_0) \\ & - J_{2m+3}(\gamma) + R_0^{2m+3} J_{2m+3}(\gamma_0)] \sin(2m+1)\theta \end{aligned} \quad \dots\dots 33$$

$$\begin{aligned} \sigma_\theta^{(i)} = & \mu a [-J_1(\gamma) + 0.5 R_0 \{(1 - \lambda_0) - (1 + \lambda_0) R_0^2\} J_1(\gamma_0) - J_3(\gamma) + R_0^3 J_3(\gamma_0)] \sin \theta \\ & + \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [-J_{2m-1}(\gamma) + R_0^{2m+1} \{(2m-1) - 2(m+1) R_0^2\} J_{2m-1}(\gamma_0) \\ & + J_{2m+3}(\gamma) - R_0^{2m+3} J_{2m+3}(\gamma_0)] \sin(2m+1)\theta \end{aligned} \quad \dots\dots 34$$

$$\begin{aligned} \tau_{r\theta}^{(i)} = & \mu a [J_1(\gamma) - 0.5 R_0 \{(1 - \lambda_0) + (1 + \lambda_0) R_0^2\} J_1(\gamma_0) - J_3(\gamma) + R_0^3 J_3(\gamma_0)] \cos \theta \\ & + \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} [J_{2m-1}(\gamma) + R_0^{2m+1} \{(2m+1) - 2(m+1) R_0^2\} J_{2m-1}(\gamma_0) \\ & + J_{2m+3}(\gamma) - R_0^{2m+3} J_{2m+3}(\gamma_0)] \cos(2m+1)\theta \end{aligned} \quad \dots\dots 35$$

2.4.3 円周上での円周方向の垂直応力

式33および式34に $r=r_0$ を代入すれば、円周上での円周方向の垂直応力は次のようになる。

A. 実数部応力：

$$\sigma_\theta^{(r)} = -4 \mu a \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2(m-1)}(\gamma_0) \sin 2m\theta \quad \dots\dots 36$$

B. 虚数部応力：

$$\sigma_\theta^{(i)} = -\mu a \left[(1 + \lambda_0) J_1(\gamma_0) \sin \theta + 4 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m-1} J_{2m-1}(\gamma_0) \sin(2m+1)\theta \right] \quad \dots\dots 37$$

これらの式を見ると、入力ひずみの波長が非常に長い場合には、実数部応力および虚数部応力の最大値はそれぞれ $-4\mu a$ および 0 に近づくこと、実数部応力はポアソン比に関係しないが、虚数部応力はポアソン比の関数であることなどが分かる。

§ 3. 動的応力の算定法

この章では、円孔を有する無限弾性体をせん断ひずみ波が伝播するときの応力分布（動的応力）の算定法について述べるが、これと同様な解析は文献1)あるいは2)などで行なわれているので、簡単な説明にとどめることにする。

図-3に示すように、 y 軸方向へは一様な分布のせん断ひずみ波（入射S波）が x 軸の正の方向へ伝播するものとして、

$$\begin{aligned} \varepsilon_x = \varepsilon_y = 0 \\ \gamma_{xy} = a e^{i(\beta x - \omega t)} \end{aligned} \quad \dots\dots 38$$

とおく。ここに、 a は入射波の振幅、 ω は円振動数、 β は波数で、せん断波速度を V_s とするとき、

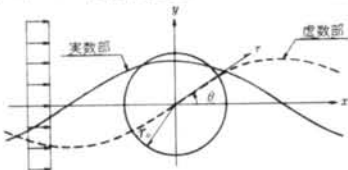


図-3 入射波

$$\beta = \omega / V_s \quad \dots\dots 39$$

である。

§ 2. の場合と同様に、解析領域は等方質弾性体で、かつ平面ひずみの状態にあると仮定して、 $x-y$ 座標での応力を計算しその結果を極座標へ変換すれば、 $r-\theta$ 座標での入射波による応力は求められる。

式38で示される入射波が円孔に達すると、円孔周上で2種類の反射波、反射S波および反射P波が発生して無限遠方へ去って行く。これらの反射波は、スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャルを用いて、

$$\begin{aligned} \phi_s = 0 \\ \phi_p = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} A_m H_m(\beta r) \cos m\theta \end{aligned} \quad \dots\dots 40$$

および、

$$\begin{aligned} \phi_p = e^{-i\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} B_m H_m(\alpha r) \sin m\theta \\ \phi_s = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots 41$$

と表わせる。ここに、添字の s と p はそれぞれ反射S波と反射P波のポテンシャルであることを意味しており、 A_m と B_m はいずれも未定係数、 H_m は m 次の第1種ハンケル関数、そして α はP波の波数で、P波の速度を

V_p とするとき次式で定義されるものである.

$$\alpha = \omega / V_p \quad \dots\dots(42)$$

したがって、これらのポテンシャルを、

$$\left. \begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \end{aligned} \right\} \dots\dots(43)$$

の関係式に代入すれば変位が計算でき、さらに変位とひずみの関係式および構成式を用いれば、反射S波と反射P波による応力を求めることができる。

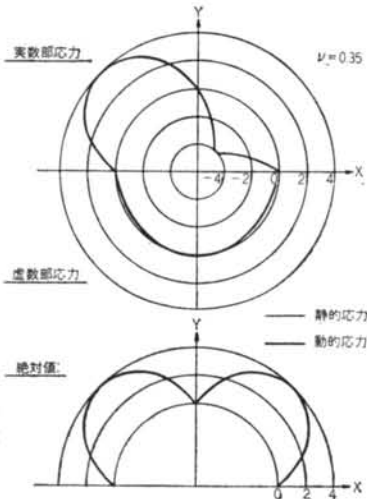
このようにして入射波と反射波による応力がそれぞれ求まると、これらの応力を加え合わせることによって所期の目的は達成できる。しかし、反射波による応力の算定式には未定係数が含まれているので、これらの値を境

界条件から決定しなければならないが、静的応力の場合と同様に円孔内部は空であると仮定すれば、円孔周上での入射波と反射波による合応力の σ_r と $\tau_{r\theta}$ は 0 という条件を使えばよい。

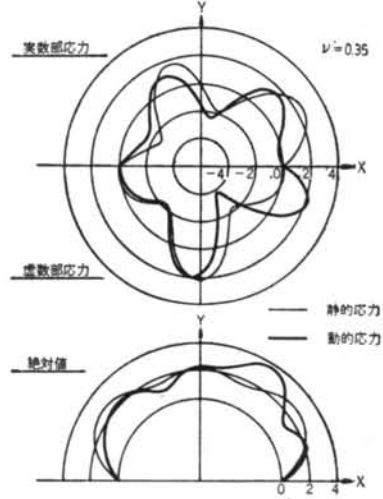
§ 4. 数値解析および静的応力と動的応力の比較検討

4.1 解析方針

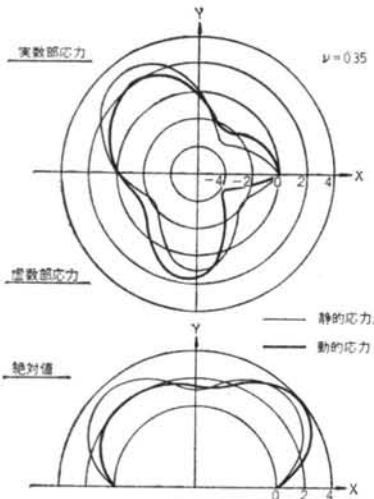
一般的にいえば、静的応力も動的応力も位置 (r, θ) 、物性値 (μ, ν) 、円孔半径 (r_0) および入力条件 (a, β) の関数であるが、円孔周上の円周方向の垂直応力 $\sigma_{\theta\theta}$ のみ



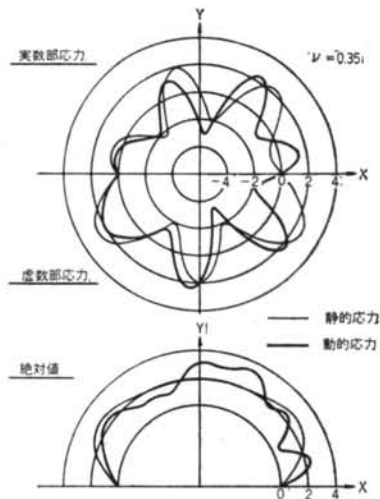
図一4 $\beta^*=0.1$ のときの σ^* の分布形



図一6 $\beta^*=3.0$ のときの σ^* の分布形



図一5 $\beta^*=1.0$ のときの σ^* の分布形



図一7 $\beta^*=5.0$ のときの σ^* の分布形

着目し、さらに、

$$\beta^* = r_0 \beta \quad \dots\dots(44)$$

$$\sigma^* = \sigma_0 / \mu a \quad \dots\dots(45)$$

で定義される無次元量 (β^* を無次元化波数、 σ^* を無次元化応力と呼ぶ) を導入すれば、 σ^* は θ 、 β^* および ν の3変数の関数となる。そこで、この章の解析では、静的応力と動的応力の比較という観点から、

- (1) $\nu=0.35$ で β^* が 0.1, 1.0, 3.0 および 5.0 のときの σ^* と θ の関係
- (2) $\nu=0.35$ のときの $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 間の σ^* の最大値と β^* の関係
- (3) ν が 0.25, 0.35 および 0.45 のときの静的最大応力に対する動的最大応力の比と β^* の関係
- (4) 入力ひずみに対する円周上での円周方向の垂直ひずみの比と σ^* の関係

について調べることにする。

4.2 σ^* の円周方向への分布形

ポアソン比 ν を 0.35 とし、無次元化波数 β^* を 0.1, 1.0, 3.0 および 5.0 と変化させたとき、無次元化応力 σ^* の円周方向への分布形がどのように変わるかを図-4 から図-7 に示した。これらの図では引張応力が正で示されており、図の配置は上から実数部応力、虚数部応力、そして絶対値の順になっている。ここに絶対値とは、応力も入力ひずみと同様に複素数と見なしたとき、その複素応力の絶対値という意味である。また、これらの図は静的応力と動的応力の重ね書きになっており、前者は細線で後者は太線で示されている。ただし、この場合の動的応力は、式(8)で表わされるせん断ひずみ波が図-3 に示したような状態で作用した瞬間の応力である。

この解析結果から以下のようなことが分かる。

- (1) β^* が非常に小さいとき、つまり入力ひずみの波長が円孔の半径にくらべて非常に長いとき、静的応力と動的応力はほとんど一致し、反射波の影響は無視できる。
- (2) β^* が大きくなるにつれて、静的応力も動的応力も極値を取る断面がふえて σ^* の分布形は複雑になってくるが、 β^* の大小にかかわらず静的応力の場合、実数部応力は ν 軸に関して逆対称、虚数部応力と絶対値は対称である。一方、動的応力の場合、 β^* が小さい間は静的応力と同じ分布形を示すものの、 β^* が大きくなるにつれて分布形の対称性あるいは逆対称性は反射波の影響でくずれてくる。

4.3 σ^* の最大値

円周上での σ^* の最大値 (実数部応力と虚数部応力に

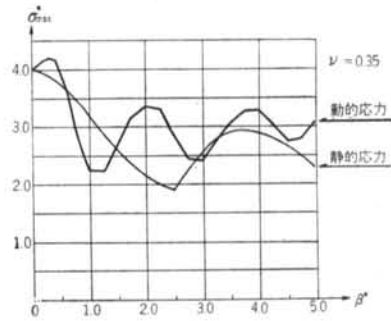


図-8 実数部応力の円周上での最大値

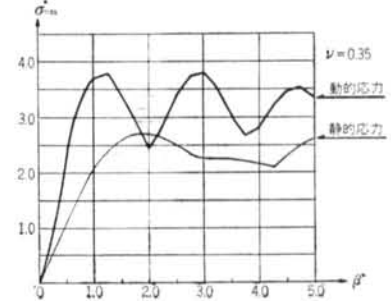


図-9 虚数部応力の円周上での最大値

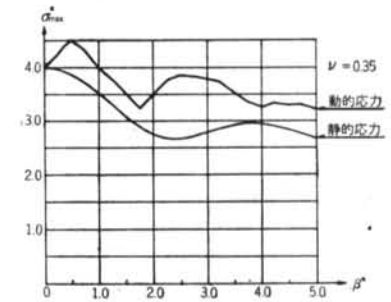


図-10 絶対値の円周上での最大値

についてはその絶対値) と β^* の関係を図-8 から図-10 に示した。このときのポアソン比は 0.35 である。これらの図から次のようなことが分かる。

- (1) 実数部応力の場合、静的応力は $\beta^*=0$ で 4.0 の最大値を取るが、動的応力は $\beta^*=0.3$ で最大となり、その値は 4.2 である。そして、 β^* が 1.0 と 3.0 付近以外は動的応力の方が静的応力より大きい。
- (2) 虚数部応力の場合、静的応力の最大値は $\beta^*=2.0$ に生じて 2.7 であるが、動的応力は β^* が 1.25 と 3.0 でほぼ同程度の 3.8 の最大値を取る。そして、 β^* が 2.0 付近のごくわずかの範囲を除いて動的応力の方が大きい。
- (3) 絶対値の場合、 β^* のすべての領域で動的応力の方が静的応力より大きく、静的応力は $\beta^*=0$ で最も大きく 4.0 となるが、動的応力は $\beta^*=0.5$ で 4.5 の最大値を取る。

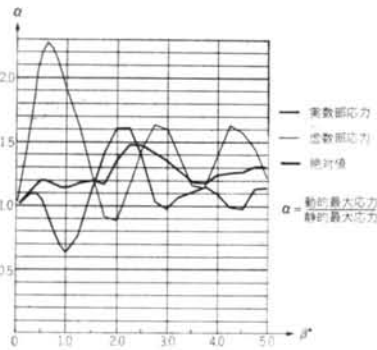


図-11 静的最大応力と動的最大応力の比 ($\nu=0.25$)

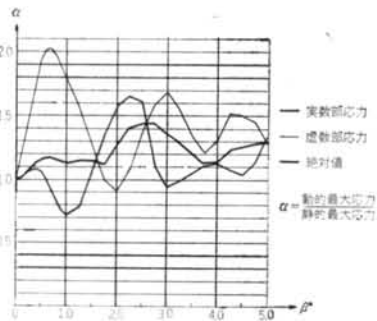


図-12 静的最大応力と動的最大応力の比 ($\nu=0.35$)

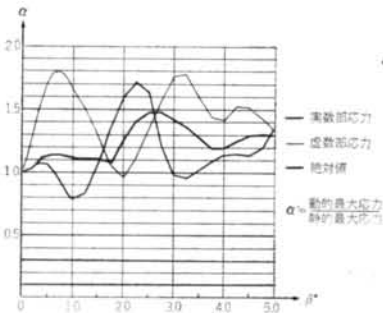


図-13 静的最大応力と動的最大応力の比 ($\nu=0.45$)

4.4 静的最大応力に対する動的最大応力の比

前節で静的応力と動的応力について、 β^* と円周上での σ^* の最大値(σ^*_{max})の関係を求めたので、この結果を用いて、 β^* ごとの静的最大応力に対する動的最大応力の比(α)を計算した。結果を図-11から図-13に示す。ただし、ここではポアソン比が0.35の場合のほか、比較のために0.25と0.45についても計算した。これらの図から以下のようなことが分かる。

(1)実数部応力に関する α はポアソン比に関係なく β^* が2.25のとき最大となり、その値は $\nu=0.25$ のとき1.61、 $\nu=0.35$ のとき1.65、 $\nu=0.45$ のとき1.71で、ポアソン比が大きくなるほど α の最大値は大きくなる。

(2)虚数部応力の場合も α が最大となる β^* の値はポアソン比にほとんど関係なく0.6付近であり、 α の最大値はポアソン比が0.25、0.35および0.45に対しておのおの2.28、2.02および1.80で、実数部応力の場合とは逆にポアソン比が大きくなるほど α の最大値は小さくなる。

(3)絶対値に関する α の最大値も、ポアソン比にほとんど関係なく $\beta^*=2.5$ 付近に生じ、 α の最大値自体もあまりポアソン比の影響を受けず、ほぼ1.48程度である。

4.5 ひずみの増幅率

円周上での円周方向の垂直ひずみ ε_θ の入力ひずみの振幅 a に対する比、

$$\varepsilon = \varepsilon_\theta / a \quad \dots\dots 46$$

をひずみの増幅率と呼ぶことにして、 ε と σ^* の関係を調べてみる。

等方等質弾性体の場合の応力-ひずみ関係式は、

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= (\lambda + 2\mu)\varepsilon_r + \lambda\varepsilon_\theta \\ \sigma_\theta &= \lambda\varepsilon_r + (\lambda + 2\mu)\varepsilon_\theta \end{aligned} \right\} \dots\dots 47$$

である。しかるに円周上では σ_r は0であるから、この条件を式47の第1式に代入すれば、 ε_r と ε_θ の間には次の関係が成立する。

$$\varepsilon_r = -\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_\theta$$

この式を式47の第2式に代入すれば、

$$\sigma_\theta = \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu}\varepsilon_\theta$$

となるので、この式の両辺を μa で割って式45と式46を用いれば、

$$\sigma^* = 4 \cdot \frac{\lambda + \mu}{\lambda + 2\mu} \varepsilon \quad \dots\dots 48$$

を得る。ここで、 λ と μ を E と ν で表わして式48に代入すれば、 ε と σ^* は次のような関係にあることが分かる。

$$\varepsilon = \frac{1-\nu}{2} \sigma^* \quad \dots\dots 49$$

β^* が0の場合、 σ^* の最大値はポアソン比に関係なく静的応力も動的応力も4.0であるので、入力ひずみの波長が円孔半径にくらべて非常に長いときのひずみの増幅率は、次式で表わされることになる。

$$1.0(\nu=0.0) \leq \varepsilon \leq 2.0(\nu=0.5) \quad \dots\dots 50$$

§ 5. おわりに

ロックオイルタンクや地下発電所などの地下空洞の耐震設計を静的解析で行なうと、空洞境界での反射波の影響が無視される。そこで、これらの空洞を理想化して無

限弾性体内の円孔とみなし、円孔周上での円周方向の垂直応力に及ぼす反射波の影響を検討した。その結果、入射波の波数やその分布形状、あるいはポアソン比によって反射波の影響度は異なるものの、動的応力が静的応力の2倍以上になる場合もあり、設計上注意する必要があることが分かった。ただし、この解析では地下空洞を無限領域内の円孔とかなり理想化したので、地表面の影響や空洞形状の実物との違いなどは今後の検討課題として

残されている。

今回の解析はせん断波を対象にしたものであるので、疎密波の場合や覆工を有する空洞についても今後検討したいと思っている。

謝辞 本研究にあたり、山原主席研究員をはじめとする軟弱地盤設計開発プロジェクトのメンバーの方々に有益な助言や協力をいただいた。末筆ながらここに謝意を表します。

〈参考文献〉

- 1) 岡本, 加藤, 伯野: “地中構造物に働く地震力に関する研究” 土木学会論文報告集 Vol.92 (昭和38年4月) pp.37~51
- 2) C. C. Mow & L. J. Mente: “Dynamic Stresses and Displacements Around Cylindrical Discontinuities Due to Plane Harmonic Shear Waves” Journal of Applied Mechanics (Dec. 1963) pp.598~604
- 3) 寺沢寛一: “自然科学者のための数学概論—応用編” 岩波書店 (1972年10月) p.529
- 4) Timoshenko & Goodier: “Theory of Elasticity” McGraw-Hill pp.116~120

