U.D.C. 622.691/.692 : 621.642.37 : 624.953 : 536.48

清水建設研究所報
第32号昭和55年4月

LNG 地下式貯槽設計のための潜熱を考慮した F. E. M. による熱伝導解析

櫨田吉造
(土木開発部)

宮永　誠
(土木開発部)

§ 1.　はじめに

極低温の液化天然ガス（−162℃）を貯蔵する LNG 地下式貯槽の設計にあたって，軀体およびその周辺地盤の温度分布を求めることは，軀体の熱応力や軀体に働く凍結作用を解析するために不可欠なものとなっている．また，凍土の成長を抑制するためにヒーター設備を設ける場合，ヒーティングパイプから貯槽内に流入する熱量を知ることも重要である．

解析にあたり，以前は貯槽を球形[1]あるいは半球形[2]にモデル化して温度分布を求めていたが，本来円筒形である地下式貯槽には現実的にかけ離れた面があり，幾何学的に近似したモデル化ができる有限差分法[3]や有限要素法[4]が用いられるようになった．

この論文では，有限差分法よりさらに幾何学的に近似したモデル化のできる有限要素法を用いて熱伝導解析を行なっている．要素としては最も単純な三角形3節点要素を用い，時間積分の方法としては2次の Runge-Kutta 法と Crank-Nicholson 法の2法を使っている．従来，この時間積分法は慣用的にそれを用いることが多かったが，ここでは精度と安定性について検討し，比較している．また，土の潜熱を考慮して凍土の形成過程を計算する問題に対しては，内田ら[4]の提案した方法があるが，本論文では，潜熱量を熱容量で割り温度のみの次元を持つ量とし，熱量を計算することなく直接温度で判定し計算を効率良くしている．本論文の最後では，実際に現在稼動中の LNG 地下式貯槽より得られた実測値に対し数値解析値を比較している．

§ 2.　有限要素方程式の誘導

軸対称場（r，z 座標系）における熱伝導方程式は微小要素での熱量のつりあいを考えることで導かれる[5]．

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_r r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z r\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right\}+Q \qquad \cdots\cdots(1)$$

ここに，c：比熱(kcal/kg℃)，ρ：密度(kg/m^3)
λ_r：r 方向熱伝導率 (kcal/mh℃)
λ_z：z 方向熱伝導率（　〃　）
Q：内部発熱 (kcal/m^{3}h)

式(1)の左辺は微小要素内に蓄積される熱量を表わし，右辺の第1項および第2項の和は周辺からの流入熱量を表わす．また，第3項は微小要素内で発生する熱量を表わす．ともに単位時間当りである．

次に，自然境界条件式は境界表面での熱量のつりあいを考えることで導かれる．

$$\lambda_n\frac{\partial\theta}{\partial n}=\alpha_s(\theta_s-\theta)+q_s \qquad \cdots\cdots(2)$$

ここに，n：境界表面における外向法線ベクトル
α_s：　〃　熱伝達率(kcal/m^{2}h℃)
θ_s：外部流体温度(℃)
q_s：表面発熱 (kcal/m^{2}h)

式(2)の左辺は境界表面を通して物体内に流入する熱量を表わし，右辺の第1項と第2項はそれぞれ境界外の流体からの流入熱量と境界表面での発熱量を表わす．

一方，式(1)を式(2)の条件のもとに解くことは次の汎関数の極値を求めることと等価である[6]．

$$\pi=\iint_a\left[\frac{1}{2}\left\{\lambda_r\left(\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)^2+\lambda_z\left(\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)^2\right\}-Q\theta+c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}\theta\right]rdrdz$$
$$+\int_l\left\{\frac{1}{2}\alpha_s\theta^2-(\alpha_s\theta_s+q_s)\theta\right\}rds \qquad \cdots\cdots(3)$$

したがって，式(3)に有限要素法を適用する．

ここで，温度は形状関数と節点温度との積和：

$$\theta=\Phi_\alpha\theta_\alpha \qquad \cdots\cdots(4)$$

で表わされるものとする．なお，式(4)には総和規約を用いており，$\Phi_\alpha\theta_\alpha\equiv\Phi_1\theta_1+\Phi_2\theta_2+\cdots\cdots$を意味する．式(4)を式(3)に代入する．

$$\pi=\iint_a\left[\frac{1}{2}\{\lambda_r\Phi_{\alpha,r}\Phi_{\beta,r}+\lambda_z\Phi_{\alpha,z}\Phi_{\beta,z}\}\theta_\alpha\theta_\beta\right.$$
$$\left.-Q\Phi_\alpha\theta_\alpha+c\rho\Phi_\alpha\Phi_\beta\theta_\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial t}\right]rdrdz$$

$$+\int_l\left[\frac{1}{2}\alpha_s\Phi_\alpha\Phi_\beta\theta_\alpha\theta_\beta-(\alpha_s\theta_s+q_s)\Phi_\alpha\theta_\alpha\right]rds \qquad \cdots(5)$$

ここで，カンマは偏微分を意味する．つまり，$,r\equiv\partial/\partial r$ となる．

式(5)を時間項，2次項，1次項に整理する．

$$\begin{aligned}\pi=&\iint_a c\rho\Phi_\alpha\Phi_\beta rdrdz\,\theta_\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial t}\\&+\frac{1}{2}\left[\iint_a\{\lambda_r\Phi_{\alpha,r}\Phi_{\beta,r}+\lambda_z\Phi_{\alpha,z}\Phi_{\beta,z}\}rdrdz\right.\\&\left.+\int_l\alpha_s\Phi_\alpha\Phi_\beta rds\right]\theta_\alpha\theta_\beta-\left[\iint_a Q\Phi_\alpha rdrdz\right.\\&\left.+\int_l(\alpha_s\theta_s+q_s)\Phi_\alpha rds\right]\theta_\alpha\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(6)$$

式(6)を，新たな記号を用いて簡単な形に書き直すと次のようになる．

$$\pi=C_{\alpha\beta}\,\theta_\alpha\frac{\partial\theta_\beta}{\partial t}+\frac{1}{2}K_{\alpha\beta}\,\theta_\alpha\theta_\beta-D_\alpha\theta_\alpha \qquad \cdots\cdots(7)$$

ここに，

$$C_{\alpha\beta}\equiv\iint_a c\rho\Phi_\alpha\Phi_\beta rdrdz \qquad \cdots\cdots(8)$$

$$K_{\alpha\beta}\equiv\iint_a\{\lambda_r\Phi_{\alpha,r}\Phi_{\beta,r}+\lambda_z\Phi_{\alpha,z}\Phi_{\beta,z}\}rdrdz+\int_l\alpha_s\Phi_\alpha\Phi_\beta rds \qquad \cdots\cdots(9)$$

$$D_\alpha\equiv\iint_a Q\Phi_\alpha rdrdz+\int_l(\alpha_s\theta_s+q_s)\Phi_\alpha rds \qquad \cdots\cdots(10)$$

ここで，式(7)の π が極値をとるための条件は次式が成り立つことである．

$$C_{\alpha\beta}\frac{\partial\theta_\beta}{\partial t}+K_{\alpha\beta}\theta_\beta-D_\alpha=0 \qquad \cdots\cdots(11)$$

これで，連続関数としての温度 θ を節点値としての温度 θ_α に離散化したことになる．

式(11)をマトリックス表示で書くと次のようになる．

$$[C]\left\{\frac{\partial\theta}{\partial t}\right\}+[K]\{\theta\}-\{D\}=\{0\} \qquad \cdots\cdots(12)$$

式(11)における時間に関する項については§4.において述べる．いま，時間に関する項がない場合，つまり定常温度分布を求める場合は，

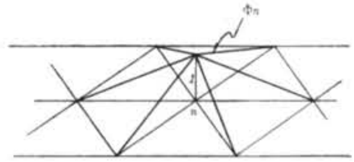
$$K_{\alpha\beta}\,\theta_\beta-D_\alpha=0 \qquad \cdots\cdots(13)$$

という連立方程式を解けば良いことになる．

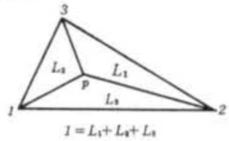
§ 3.　形状関数

ここでは，図—1に示すような1次の関数を形状関数として選ぶ．

Φ_n は節点 n において値1を持ち，他節点で値0となる1次の関数である．



図—1　形状関数



図—2　面積座標

ここで，一つの要素のみに着目して形状関数を考える．図—2は一つの要素をさらに三つの部分に分け，それぞれの面積を L_1，L_2，L_3 と定義している．この L_1，L_2，L_3 を座標として任意点 p を表わすと，点 p が節点1の位置に来たとき（$L_1=1$，$L_2=L_3=0$）となり，節点2あるいは節点3の位置にきたときそれぞれ（$L_2=1$，$L_1=L_3=0$），（$L_3=1$，$L_1=L_2=0$）となる．このことは，一つの要素を定義域としたときの形状関数 Φ^e_α にほかならない．つまり，

$$\Phi_1{}^e=L_1,\ \Phi_2{}^e=L_2,\ \Phi_3{}^e=L_3 \qquad \cdots\cdots(14)$$

となる．

次に，面積座標で表わした形状関数を用いるために式(8)，式(9)，式(10)を（r，z）座標系から（L_1，L_2，L_3）座標系へ変換する．

まず，座標 r，z は座標関数 $\Psi_a{}^e$ と節点座標 r_a，z_a との積で表わせるものとする．

$$r=\Psi^e_a\,r_a \qquad \cdots\cdots(15)$$

$$z=\Psi^e_a\,z_a \qquad \cdots\cdots(16)$$

一方，（r，z）座標系の組とこれに対応する（L_1，L_2，L_3）座標系の組を考えるとき，例えば r に関する微分の項は，

$$\frac{\partial\Phi^e_\alpha}{\partial r}=\frac{\partial\Phi^e_\alpha}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial r}+\frac{\partial\Phi^e_\alpha}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial r}+\frac{\partial\Phi^e_\alpha}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial r} \qquad \cdots\cdots(17)$$

となり，同様に z に関する微分は，

$$\frac{\partial\Phi^e_\alpha}{\partial z}=\frac{\partial\Phi^e_\alpha}{\partial L_1}\frac{\partial L_1}{\partial z}+\frac{\partial\Phi^e_\alpha}{\partial L_2}\frac{\partial L_2}{\partial z}+\frac{\partial\Phi^e_\alpha}{\partial L_3}\frac{\partial L_3}{\partial z} \qquad \cdots\cdots(18)$$

となる．また，（r，z）座標系と（L_1，L_2，L_3）座標系との間には次のような関係がある．

$$\begin{Bmatrix}1\\r\\z\end{Bmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1\\\dfrac{\partial r}{\partial L_1}&\dfrac{\partial r}{\partial L_2}&\dfrac{\partial r}{\partial L_3}\\\dfrac{\partial z}{\partial L_1}&\dfrac{\partial z}{\partial L_2}&\dfrac{\partial z}{\partial L_3}\end{pmatrix}\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{Bmatrix}=[J]\begin{Bmatrix}L_1\\L_2\\L_3\end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(19)$$

したがって，$(L_1,\ L_2,\ L_3)$ 座標系は $(r,\ z)$ 座標系によって次のように表わされる．

$$\begin{Bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} = [J]^{-1} \begin{Bmatrix} 1 \\ r \\ z \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(20)$$

ここで，逆マトリックス $[J]^{-1}$ を求めておく．まず，マトリックス $[J]$ の中に式(15)，式(16)を代入する．

$$[\,J\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ R_1 & R_2 & R_3 \\ Z_1 & Z_2 & Z_3 \end{bmatrix} \qquad \cdots\cdots(21)$$

ここに，

$$\left.\begin{array}{l} R_1 \equiv \Psi^e_{\alpha, L_1} r_\alpha,\quad R_2 \equiv \Psi^e_{\alpha, L_2} r_\alpha,\quad R_3 \equiv \Psi^e_{\alpha, L_3} r_\alpha \\ Z_1 \equiv \Psi^e_{\alpha, L_1} z_\alpha,\quad Z_2 \equiv \Psi^e_{\alpha, L_2} z_\alpha,\quad Z_3 \equiv \Psi^e_{\alpha, L_3} z_\alpha \end{array}\right\} \cdots(22)$$

よって，逆マトリックス $[J]^{-1}$ は次のように書き表わされる．

$$[J]^{-1} = \frac{adj[J]}{|J|} \qquad \cdots\cdots(23)$$

ここに，

$$adj[J] = \begin{Bmatrix} R_2Z_3 - R_3Z_2 & Z_2 - Z_3 & R_3 - R_2 \\ R_3Z_1 - R_1Z_3 & Z_3 - Z_1 & R_1 - R_3 \\ R_1Z_2 - R_2Z_1 & Z_1 - Z_2 & R_2 - R_1 \end{Bmatrix} \qquad \cdots\cdots(24)$$

$$|J| = R_2Z_3 + R_3Z_1 + R_1Z_2 - R_2Z_1 - R_1Z_3 - R_3Z_2 \qquad \cdots(25)$$

結局，形状関数 Φ^e_α の r に関する微分は式(17)，式(20)，式(23)～式(25)により次のように書き表わされる．

$$\frac{\partial \Phi^e_\alpha}{\partial r} = \left\{ (Z_2 - Z_3)\frac{\partial \Phi^e_\alpha}{\partial L_1} + (Z_3 - Z_1)\frac{\partial \Phi^e_\alpha}{\partial L_2} + (Z_1 - Z_2)\frac{\partial \Phi^e_\alpha}{\partial L_3} \right\} \frac{1}{|J|} \qquad \cdots\cdots(26)$$

同様に，形状関数 Φ^e_α の z に関する微分は式(18)，式(20)，式(23)～式(25)より次のように書き表わされる．

$$\frac{\partial \Phi^e_\alpha}{\partial z} = \left\{ (R_3 - R_2)\frac{\partial \Phi^e_\alpha}{\partial L_1} + (R_1 - R_3)\frac{\partial \Phi^e_\alpha}{\partial L_2} + (R_2 - R_1)\frac{\partial \Phi^e_\alpha}{\partial L_3} \right\} \frac{1}{|J|} \qquad \cdots\cdots(27)$$

続いて，辺要素 dS についても $(r,\ z)$ 座標系から $(L_1,\ L_2,\ L_3)$ 座標系への変換を行なう．

$L_1=0$ の辺については，

$$dS = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial L_2} & \dfrac{\partial z}{\partial L_3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\partial r}{\partial L_2} & \dfrac{\partial r}{\partial L_3} \end{vmatrix}^2}\, dL_2 dL_3 \qquad \cdots\cdots(28)$$

$L_2=0$ の辺については，

$$dS = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial L_1} & \dfrac{\partial z}{\partial L_3} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\partial r}{\partial L_1} & \dfrac{\partial r}{\partial L_3} \end{vmatrix}^2}\, dL_1 dL_3 \qquad \cdots\cdots(29)$$

$L_3=0$ の辺については，

$$dS = \sqrt{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\partial z}{\partial L_1} & \dfrac{\partial z}{\partial L_2} \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \dfrac{\partial r}{\partial L_1} & \dfrac{\partial r}{\partial L_2} \end{vmatrix}^2}\, dL_1 dL_2 \qquad \cdots\cdots(30)$$

となる[7]．

一方，面要素 $drdz$ は，

$$drdz = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dfrac{\partial r}{\partial L_1} & \dfrac{\partial r}{\partial L_2} & \dfrac{\partial r}{\partial L_3} \\ \dfrac{\partial z}{\partial L_1} & \dfrac{\partial z}{\partial L_2} & \dfrac{\partial z}{\partial L_3} \end{vmatrix} dL_1 dL_2 dL_3 \qquad \cdots\cdots(31)$$

となる[7]．

ここで，式(28)～式(30)は式(15)，式(16)，式(22)を用いることによって次のように書き表わされる．

$L_1=0$ の辺：

$$dS = \sqrt{(Z_3 - Z_2)^2 + (R_3 - R_2)^2}\, dL_2 dL_3 \qquad \cdots\cdots(32)$$

$L_2=0$ の辺：

$$dS = \sqrt{(Z_3 - Z_1)^2 + (R_3 - R_1)^2}\, dL_1 dL_3 \qquad \cdots\cdots(33)$$

$L_3=0$ の辺：

$$dS = \sqrt{(Z_2 - Z_1)^2 + (R_2 - R_1)^2}\, dL_1 dL_2 \qquad \cdots\cdots(34)$$

また，式(31)も式(19)より次のように書ける．

$$drdz = |J|\, dL_1 dL_2 dL_3 \qquad \cdots\cdots(35)$$

以上で，$(r,\ z)$ 座標系から $(L_1,\ L_2,\ L_3)$ 座標系へ変換されたことになる．

次に，式(15)あるいは式(16)で定義した座標関数 Ψ^e_α として形状関数 Φ^e_α と同じものを用いることにする（アイソパラメトリック要素）．つまり，

$$\Psi^e_1 = L_1,\quad \Psi^e_2 = L_2,\quad \Psi^e_3 = L_3 \qquad \cdots\cdots(36)$$

と書くことができる．したがって，式(22)は次のように簡単に書き表わされる．

$$\left.\begin{array}{l} R_1 = r_1,\quad R_2 = r_2,\quad R_3 = r_3 \\ Z_1 = z_1,\quad Z_2 = z_2,\quad Z_3 = z_3 \end{array}\right\} \cdots\cdots(37)$$

最後に，式(14)と式(37)を式(26)，式(27)および式(32)～式(35)に代入し，さらに式(8)～式(10)にそれを用いると，積分公式[6]

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\iint L_1^l L_2^m L_3^n\, dL_1 dL_2 = \frac{l!\,m!\,n!}{(M+2)!},\quad M = l+m+n \\ \displaystyle\int L_1^m L_2^n\, dL_1 = \frac{m!\,n!}{(M+1)!},\quad M = m+n \end{array}\right\} \cdots(38)$$

を使うことによって，各係数マトリックス，$C^e_{\alpha\beta}$，$K^e_{\alpha\beta}$，D^e_α は陽に求まる．

また，解析領域全体における係数マトリックス $C_{\alpha\beta}$, $K_{\alpha\beta}$, D_α は各要素ごとの係数マトリックス $C^e_{\alpha\beta}$, $K^e_{\alpha\beta}$, D^e_α を重ね合わせることによって求められる．

§ 4. 時間積分

§ 2. で，空間軸方向の離散化が行なわれたわけであるが，ここでは残る時間微分の項に対して，2次の Runge-Kutta 法[8]と Crank-Nicholson 法[9]を適用して解いていく．

4.1 時間積分スキーム

4.1.1 2次の Runge-Kutta 法

$$\left.\begin{array}{ll} ① & \dot{\theta}^m_\alpha=-C^{-1}_{\alpha\beta}K_{\beta\gamma}\theta^m_\gamma+C^{-1}_{\alpha\beta}D^m_\beta \\ ② & \theta^{m+1/2}_\alpha=\theta^m_\alpha+\dot{\theta}^m_\alpha\Delta t/2 \\ ③ & \dot{\theta}^{m+1/2}_\alpha=-C^{-1}_{\alpha\beta}K_{\beta\gamma}\theta^{m+1/2}_\gamma+C^{-1}_{\alpha\beta}D^{m+1/2}_\beta \\ ④ & \theta^{m+1}_\alpha=\theta^m_\alpha+\dot{\theta}^{m+1/2}_\alpha\Delta t \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(39)$$

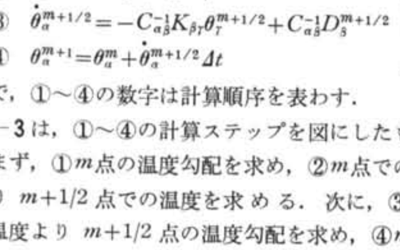
ここで，①～④の数字は計算順序を表わす．

図—3 は，①～④の計算ステップを図にしたものである．まず，①m点の温度勾配を求め，②m点での温度勾配より $m+1/2$ 点での温度を求める．次に，③$m+1/2$ 点の温度より $m+1/2$ 点の温度勾配を求め，④m点での温度と $m+1/2$ 点での温度勾配より $m+1$ 点の温度を求める．

一方，計算時間短縮のために係数マトリックス $C_{\alpha\beta}$ は § 3. で求めたものは使わずに次に示すものを用いる．

$$\overline{C}_{\alpha\beta}=\begin{cases}\iiint_a c\rho\Phi_\alpha r dr dz & (\alpha=\beta) \\ 0 & (\alpha\neq\beta)\end{cases} \quad \cdots\cdots(40)$$

これによって，式(39)中の $C^{-1}_{\alpha\beta}$ の計算が非常に簡単になる．



図—3 2次の Runge-Kutta 法

4.1.2 Crank-Nicholson 法

$$\theta^{m+1}_\alpha=\theta^m_\alpha+\{\omega\dot{\theta}^m_\alpha+(1-\omega)\dot{\theta}^{m+1}_\alpha\}\Delta t \quad \cdots\cdots(41)$$

ここで，$\omega=1$：前進差分，$\omega=1/2$：中央差分，$\omega=0$：後退差分を意味する．

式(41)に式(11)を代入し，整理すると次式が求められる．

$$[C_{\alpha\beta}+(1-\omega)\Delta t\,K_{\alpha\beta}]\theta^{m+1}_\beta=[C_{\alpha\beta}-\omega\Delta t\,K_{\alpha\beta}]\theta^m_\beta+[\omega\Delta t\,D^m_\alpha+(1-\omega)\Delta t\,D^{m+1}_\alpha] \quad \cdots\cdots(42)$$

式(42)によって $m+1$ 点での温度を求める．

4.2 精度

ここでは，**4.1** で紹介した2つの時間積分スキームの精度について考える．

4.2.1 2次の Runge-Kutta 法

2次の Runge-Kutta 法の一般的なスキームを以下に示す．

$$\left.\begin{array}{l} ①\dot{f}_k=\varphi(t_k,\ f_k) \\ ②f_{k+1/2}=f_k+\dot{f}_k\cdot\tau/2 \\ ③\dot{f}_{k+1/2}=\varphi(t_k+\tau/2,\ f_{k+1/2}) \\ ④f_{k+1}=f_k+\dot{f}_{k+1/2}\cdot\tau \end{array}\right\} \quad \cdots\cdots(43)$$

②のステップを④のステップに代入すると，

$$f_{k+1}=f_k+\dot{f}_k\tau+\frac{\ddot{f}_k}{2}\tau^2 \quad \cdots\cdots(44)$$

となる．一方，f_{k+1} の Taylor 展開を示すと，

$$f_{k+1}=f_k+\dot{f}_k\tau+\frac{\ddot{f}_k}{2}\tau^2+\frac{\dddot{f}_k}{6}\tau^3+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(45)$$

となる．式(45)で示される f_{k+1} は正解と考えられるので，式(45)と式(44)の差：

$$O(\tau^3)=\frac{\dddot{f}_k}{6}\tau^3+\frac{\ddddot{f}_k}{24}\tau^4+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(46)$$

は，このスキームの誤差となる．これによって，このスキームが2次のオーダーの精度を持つことがわかる．い い換えると，Δt の間の解が3次曲線以上の高次の曲線となるとき，このスキームは誤差を持つ．

4.2.2 Crank-Nicholson 法

Crank-Nicholson 法の一般的なスキームを以下に示す．

$$f_{k+1}=f_k+\{\omega\dot{f}_k+(1-\omega)\dot{f}_{k+1}\}\tau \quad \cdots\cdots(47)$$

次に，f_{k+1} の Taylor 展開を示すと，

$$f_{k+1}=f_k+\dot{f}_k\tau+\frac{\ddot{f}_k}{2}\tau^2+\frac{\dddot{f}_k}{6}\tau^3+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(48)$$

となり，式(48)を式(47)に代入し整理すると，

$$f_{k+1}=f_k+\dot{f}_k\tau+(1-\omega)\ddot{f}_k\tau^2+\frac{(1-\omega)}{2}\dddot{f}_k\tau^3+\cdots\cdots \quad \cdots\cdots(49)$$

となる．これによって，前進差分（$\omega=1$）および後退差分（$\omega=0$）のとき，このスキームは1次のオーダーの精度を持ち，中央差分（$\omega=1/2$）のとき，2次のオーダー

の精度を持つことがわかる．

4.3 安定性[9)]

今度は Neumann の安定条件に従って，初期値に関する安定性を調べる．

簡単のため一次元問題として考える．一次元の熱伝導方程式は次のように書くことができる．

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=\kappa\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\qquad\left[\kappa=\frac{\lambda}{c\rho}\right]\qquad\cdots\cdots(50)$$

一方，式(50)に対応した汎関数は，

$$\pi=\int_l\left[\frac{1}{2}\kappa\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial\theta}{\partial t}\theta\right]dx\qquad\cdots\cdots(51)$$

となり，式(51)に有限要素法を適用すると最終的に次式が求まる．

$$C^e_{\alpha\beta}\frac{\partial\theta_\beta}{\partial t}+K^e_{\alpha\beta}\theta_\beta=0\qquad\cdots\cdots(52)$$

ここに，

$$C^e_{\alpha\beta}=\frac{x_2-x_1}{6}\begin{bmatrix}2&1\\1&2\end{bmatrix},\quad K^e_{\alpha\beta}=\frac{\kappa}{x_2-x_1}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}\qquad\cdots\cdots(53)$$

4.3.1 2次の Runge-Kutta 法

4.1.1 で示したように係数マトリックス $C^e_{\alpha\beta}$ は対角化されたものを用いる．したがって，一次元の場合次のように書くことができる．

$$\overline{C}^e_{\alpha\beta}=\frac{x_2-x_1}{2}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad\cdots\cdots(54)$$

これによって，節点 i における離散方程式の一般形は，

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=\frac{\kappa}{(\Delta x)^2}(\theta_{i-1}-2\theta_i+\theta_{i+1})\qquad\cdots\cdots(55)$$

と書ける．ただし，メッシュは等間隔に分割し，その長さを Δx とする．

次に，式(39)のスキームに従って書き表わすと次のようになる．

$$\theta_i^{m+1}=\theta_i^m+\frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2}(\theta_{i-1}^m-2\theta_i^m+\theta_{i+1}^m)+\frac{1}{2}\left\{\frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2}\right\}^2(\theta_{i-2}^m-4\theta_{i-1}^m+6\theta_i^m-4\theta_{i+1}^m+\theta_{i+2}^m)\qquad\cdots\cdots(56)$$

ここで，正確な初期値に対する式(56)の厳密解を $\theta(x,\ t)$ とし，誤差を含んだ初期値に対する同じ方程式の厳密解を $\theta(x,\ t)+\delta(x,\ t)$ とする．このとき，θ と $\theta+\delta$ も式(56)を満たすことから δ に関して同様の方程式が求められる．

$$\delta_i^{m+1}=\delta_i^m+\frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2}(\delta_{i-1}^m-2\delta_i^m+\delta_{i+1}^m)+\frac{1}{2}\left\{\frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2}\right\}^2(\delta_{i-2}^m-4\delta_{i-1}^m+6\delta_i^m-4\delta_{i+1}^m+\delta_{i+2}^m)\qquad\cdots\cdots(57)$$

いま，$t=0$ で入る誤差を Fourier 級数展開する．

$$\delta(x,\ 0)=\sum_k A_k e^{i\beta_k x}\qquad\cdots\cdots(58)$$

式(57)は定数係数線形斉次方程式なので重ね合わせの原理が使え，したがって単項 $e^{i\beta x}$ について考えることにする．

一般に，$t=t_m$ においては，$z^m e^{i\beta x}$ の形をしている．はじめの誤差が m とともに成長しないためには，$|z|\leqq 1$ であることが必要，かつ十分である．よって，$z^m e^{i\beta x}$ を式(57)に代入すると次のようになる．

$$z=1+\eta(e^{-i\xi}-2+e^{i\xi})+\frac{\eta^2}{2}(e^{-2i\xi}-4e^{-i\xi}+6-4e^{i\xi}+e^{2i\xi})\quad\left[\eta=\frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2},\quad\xi=\beta\Delta x\right]\qquad\cdots(59)$$

ここで，

$$e^{\pm ia\xi}=\cos a\xi\pm i\sin a\xi\qquad\cdots\cdots(60)$$

より，式(59)は，

$$z=1+2\eta(\cos\xi-1)+2\eta^2(\cos\xi-1)^2\qquad\cdots\cdots(61)$$

となり，$|z|\leqq 1$ が成り立つためには，

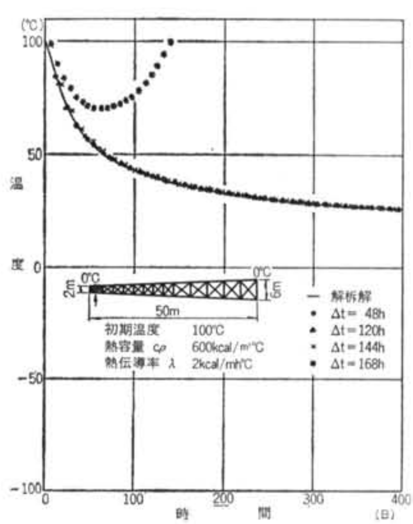
$$-1\leqq 1+2\eta(\cos\xi-1)+2\eta^2(\cos\xi-1)^2\leqq 1\qquad\cdots(62)$$

となることが必要である．

式(62)は，さらに簡単な形にすることができ，最終的には，

$$\eta\leqq\frac{1}{2}\qquad\cdots\cdots(63)$$

という不等式が導かれる．したがって，この条件が満た



図―4 2次の Runge-Kutta 法

されるような場合には一般に誤差は成長しない．

実際に数値計算を行なった結果を**図—4**に示す．最小メッシュ幅 $\Delta x=1.0$，温度伝導率 $\kappa=1/300$ のとき，式(63)より安定条件は，

$$\Delta t \leqq 150 \qquad \cdots\cdots(64)$$

となり，数値解析の結果がこれを実証している．

4.3.2 Crank-Nicholson 法

ここでも，簡単のため係数マトリックス $C^e_{\alpha\beta}$ は対角化されたものを考える．したがって，節点 i における離散方程式の一般形は，

$$\frac{\partial\theta_i}{\partial t}=\frac{\kappa}{(\Delta x)^2}(\theta_{i-1}-2\theta_i+\theta_{i+1}) \qquad \cdots\cdots(65)$$

と書ける．次に，式(41)のスキームに従って書き表わすと次のようになる．

$$\theta_i^{m+1}=\theta_i^m+\left\{\omega\frac{\kappa}{(\Delta x)^2}(\theta_{i-1}^{m+1}-2\,\theta_i^{m+1}+\theta_{i+1}^{m+1})\right.$$
$$\left.+(1-\omega)\frac{\kappa}{(\Delta x)^2}(\theta_{i-1}^m-2\,\theta_i^m+\theta_{i+1}^m)\right\}\Delta t \qquad \cdots(66)$$

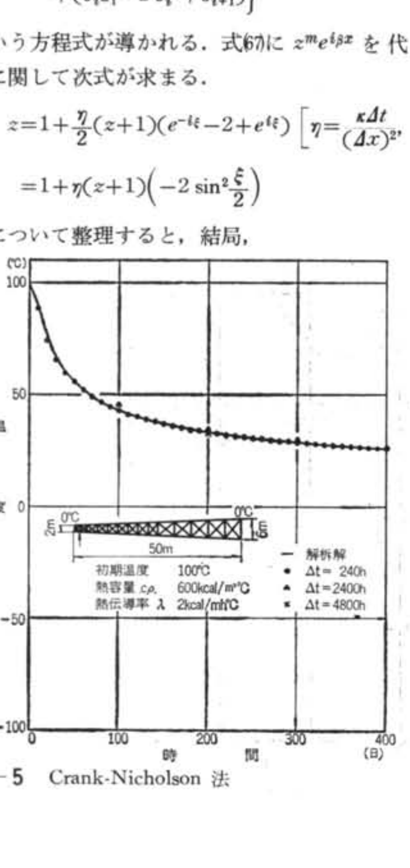
いま，$\omega=1/2$ のときのみを考える．前項と同様に考えることによって，誤差 δ に関しては，

$$\delta_i^{m+1}=\delta_i^m+\frac{1}{2}\left\{\frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2}\right\}\left\{(\delta_{i-1}^{m+1}-2\,\delta_i^{m+1}+\delta_{i+1}^{m+1})\right.$$
$$\left.+(\delta_{i-1}^m-2\,\delta_i^m+\delta_{i+1}^m)\right\} \qquad \cdots\cdots(67)$$

という方程式が導かれる．式(67)に $z^m e^{i\beta x}$ を代入すると z に関して次式が求まる．

$$z=1+\frac{\eta}{2}(z+1)(e^{-i\xi}-2+e^{i\xi})\left[\eta=\frac{\kappa\Delta t}{(\Delta x)^2},\ \xi=\beta\Delta x\right]$$
$$=1+\eta(z+1)\left(-2\sin^2\frac{\xi}{2}\right) \qquad \cdots\cdots(68)$$

z について整理すると，結局，



図—5 Crank-Nicholson 法

$$z=\frac{1-2\,\eta\sin^2\dfrac{\xi}{2}}{1+2\,\eta\sin^2\dfrac{\xi}{2}} \qquad \cdots\cdots(69)$$

となり，常に $|z|\leqq 1$ を満足する．よって安定である．

図—5は，実際に数値計算を行なった結果である．明らかに安定である．

§ 5. 潜熱計算

LNG 地下式貯槽周辺地盤の熱伝導問題のように，地盤の凍結を伴う場合，その熱的現象を表わすために潜熱の存在を考慮する必要がある．

まず，式(1)を考えてみよう．右辺の第1項および第2項の和は，単位時間に外部より微小要素中に流入する熱量 q を表わす．つまり，

$$q=\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial}{\partial r}\left(\lambda_r r\frac{\partial\theta}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_z r\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)\right\} \qquad \cdots\cdots(70)$$

と書くことができる．普通，この熱量 q によって微小要素中の温度の上昇が見られるわけであるが，今まさに凍結しようという地盤内においては凍結潜熱 L (kcal/m³) の存在を考慮することによって，単位時間での熱平衡式を次のように考える．

① $q<0$，$q+L<0$ のとき：

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=q+L,\ L\leftarrow 0 \qquad \cdots\cdots(71)$$

② $q<0$，$q+L\geqq 0$ のとき：

$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=0,\ L\leftarrow q+L \qquad \cdots\cdots(72)$$

式(71)は，流出熱量より凍結潜熱量 L の方が小さい場合，その差の熱量によって温度が降下することを表わしており，このとき凍結潜熱量 L は0となる．また，式(72)は流出熱量より凍結潜熱量 L の方が大きい場合，温度降下がない代わりに潜熱量は流出熱量の分だけ小さくなることを表わしている．

また，一度凍結した土が融解するような場合にも同じような方法が考えられる．つまり，熱平衡式は，

③ $q>0$，$q+L\leqq L_{\max}$ のとき：

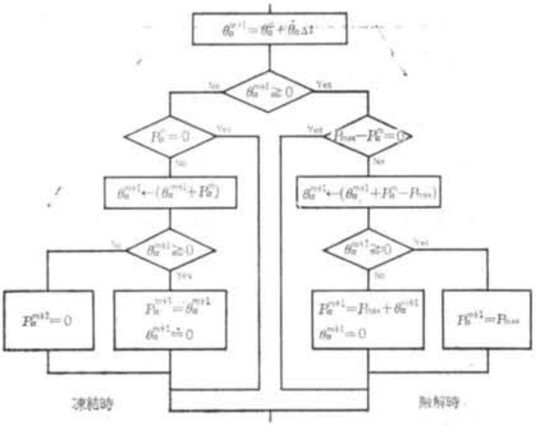
$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=0,\ L\leftarrow q+L \qquad \cdots\cdots(73)$$

④ $q>0$，$q+L>L_{\max}$ のとき：

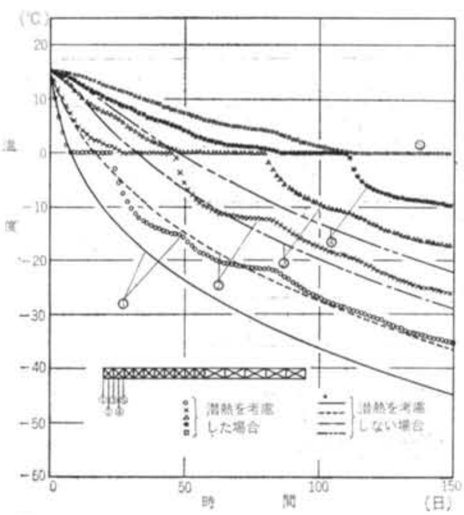
$$c\rho\frac{\partial\theta}{\partial t}=q+L-L_{\max},\ L\leftarrow L_{\max} \qquad \cdots\cdots(74)$$

$L_{\max}$：許容潜熱量 (kcal/m³)

と書くことができる．式(73)は，流入熱量より融解潜熱量



図―6　潜熱計算フロー



図―7　潜熱計算結果

$(L_{max}-L)$ の方が大きい場合，温度上昇は生じない代わりに潜熱量は流入熱量の分だけ大きくなることを表わしており，式(74)は流入熱量より融解潜熱量$(L_{max}-L)$の方が小さい場合，温度はその差の熱量によって上昇し，そのとき潜熱量は許容値 L_{max} に達することを表わしている．

次に，上記に示した潜熱についての考え方を実際に適用する場合を考える．まず，潜熱Lを **2.3** と同じように離散化し，対角化された係数 $\overline{C}_{\alpha\beta}$ で割ったもの を考える．この値は温度(℃)の次元を持つ．

$$P_\alpha=\frac{\iint_\alpha L\Phi_\alpha rdrdz}{\overline{C}_{\alpha\beta}} \qquad \cdots\cdots(75)$$

P_α を前もって求めることによって， 計算は通常の熱計算フローに**図―6**の潜熱計算フローを付け加えるだけで済む．左側は凍結時，右側は融解時を表わす．

式(71)～式(74)に示した潜熱についての考え方と，**図―6**に示す実際の計算に用いられる方法との違いは，前者が微小要素について考えているのに対し，後者は有限要素について考えている点である．

図―7は，この潜熱の考え方に沿って実際に数値計算を行なった結果である．図中，潜熱を考慮した方が考慮しないときより温度降下が遅いのはごく自然な結果といえる．また，潜熱を考慮したとき温度が0℃に留まるのは，このとき節点に離散化された潜熱ポテンシャル P_α が放出されているからで，計算上現われる現象である．

§ 6.　実測値との比較

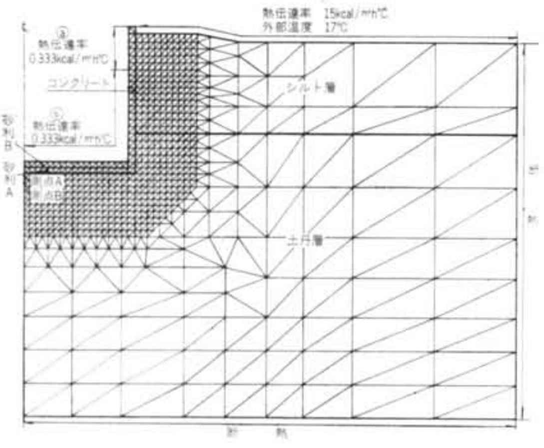
ここで用いられる実測値は，東京瓦斯株式会社根岸工場で現在稼動中の LNG 地下式貯槽より得られたものである．

熱定数は**表―1**に示すものを用い，解析モデルおよび境界条件は**図―8**に示すとおりである．

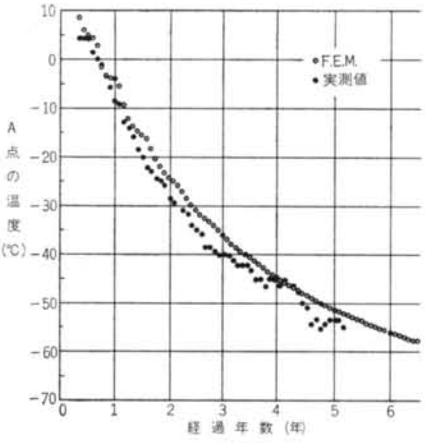
実測値との比較は，**図―8**のA点，B点での温度変化で比較する．結果は**図―9，10**に示すとおりである．実

熱定数		密　度 ρ(kg/m³)	比　熱 c(kcal/kg℃)	熱容量 $c\rho$(kcal/m³℃)	熱伝導率 λ(kcal/mh℃)	潜　熱 L(kcal/m³)
コンクリート		—	—	504.0	2.0	—
シルト	未	1710	0.474	810.5	1.14	—
	凍	1430	0.396	566.3	1.96	41,828
土　丹	未	1910	0.401	765.9	1.28	—
	凍	1830	0.311	569.1	2.17	26,078
砂利A	未	2020	0.370	747.4	1.34	—
	凍	1973	0.270	532.7	2.30	31,765
砂　利　B		—	—	357.0	0.74	—
インシュレーション		—	—	—	0.0333	—

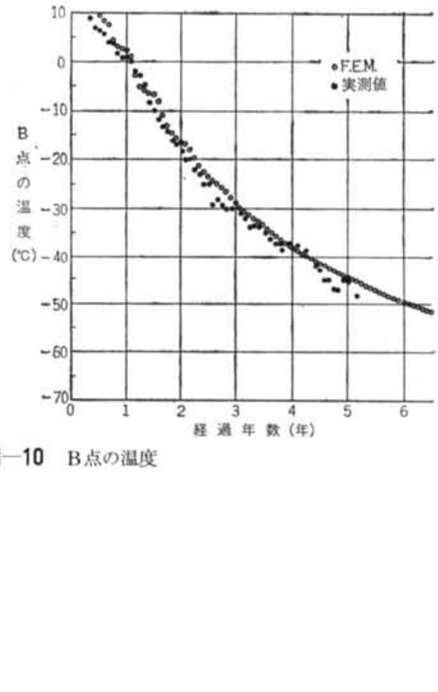
表―1　熱定数



図—8 解析モデルと境界条件



図—9 A点の温度



図—10 B点の温度

際の地盤の複雑さを考えるならば，いずれの結果も非常に良好なものといえる．

§ 7. 結論

時間積分の方法として，２次の Runge-Kutta 法と Crank-Nicholson 法について検討したが，安定性の面では後者の方法が優れていると考えられる．また，実測値と比較した結果，潜熱を考慮した計算は実用上十分なものであることが判明した．

謝辞 最後に，本解析にあたり少なからず助言を賜わった中央大学理工学部土木工学科の川原睦人助教授と，今回の報告書に貴重な資料を提供していただいた東京瓦斯株式会社に深く感謝の意を表します．

<参考文献>

1) 高志勤，住吉正光："液化低温ガス貯蔵用地下タンク周囲の地盤の凍結について(Ⅰ)" 冷凍 第44巻504号

2) 高志勤："液化低温ガス貯蔵用地下タンク周囲の地盤の凍結について(Ⅱ)" 冷凍 第47巻536号

3) 柳沢一郎，由川博康："処罰法と差分法の併用による低温地下タンクの凍結領域の数値解析" 土木学会論文報告集 第272号 (1978年4月) pp. 93～102

4) 内田博，高瀬啓元，平野隆久："曲面体要素による潜熱を含めた非定常熱伝導解析法" 土と基礎 (1977年7月) pp. 47～52

5) 川下研介："熱伝導論(複刻版)" 生産技術センター(1975)

6) 藤野勉："熱伝導と熱応力(コンピュータによる構造工学講座・Ⅱ-4Ⓑ)" 培風館 (昭和47年)

7) D.C. Leigh (村上澄男訳)："非線形連続体力学" 共立出版 (昭和50年)

8) 戸川隼人："微分方程式の数値計算" オーム社 (昭和48年)

9) 土木学会編："土木工学における数値解析／基礎編" サイエンス社 (昭和49年)

10) O.C.ツィエンキーヴィッツ (吉識雅夫，山田嘉昭監訳)："マトリックス有限要素法" 培風館 (昭和50年)