

多次元圧密の有限要素法解析(その1)

西崎 晶士
(土木設計部)
出羽 克之
(土木設計部)
斉藤 一郎
(土木設計部)
芳賀 健彦
(土木設計部)

§ 1. まえがき

現在、有限要素法による多次元圧密の研究は、すでに土の応力～ひずみ関係の非線形性、あるいは透水係数の非線形性などを考慮した高度な内容に至っている。

一方、設計実務においては、軟弱地盤の沈下問題に対し Terzaghi の1次元圧密理論が適用されているのが普通である。この Terzaghi 理論による沈下計算法は、設計法として確立されており、実用的精度で十分満足すべき結果が得られる場合が多い。しかし近年、近接工事の増加により、沈下のみではなく側方変形も含めた地盤挙動の評価が重視されてきている。このような地盤の多次元的変形問題は、Terzaghi の1次元圧密理論のみでは解析できず、実務上でも多次元圧密理論の適用が必要になる場合がある。したがって、有限要素法による多次元圧密解析は、実務的な面における実用性についての検討をすべき時にきていると思われる。

このような観点から、まず第1報として有限要素圧密解析用のいくつかの要素タイプについて精度比較を行なった。これらの要素は、Biot の多次元圧密理論に基づき Sandhu らが定式化した有限要素解析法に用いられるものである。精度比較は、解析解の得られている1次元および2次元圧密問題を数値計算して比較検討した。

§ 2. 3次元圧密理論と有限要素定式化

2.1 Biot の3次元圧密理論

3次元圧密理論を構成するためには、次に示す条件が必要である。

- ①釣り合い条件式、②粒子骨格の応力～ひずみ関係、③ひずみの適合条件式、④ダルシーの法則、⑤連続条件式

①において物理化学的粒子間力および慣性効果を無視し、⑤において間げき流体の非圧縮性を仮定すれば、上

の条件はそれぞれ次に示す方程式により表わすことができる。

$$\sigma_{ij, j} + \delta_{ij} p_{, j} + \rho F_i = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} e_{kl} \quad \dots\dots(2)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i, j} + u_{j, i}) \quad \dots\dots(3)$$

$$q_i = k_{ij}(p_{, j} + \rho_2 F_j) \quad \dots\dots(4)$$

$$q_{i, j} = -e_{ij} = -\dot{u}_{i, j} \quad \dots\dots(5)$$

ここで、 σ_{ij} は有効応力テンソル、 p は間げき水圧、 ρ は土の湿潤密度、 F_i は単位質量当りの物体力ベクトル、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ、 C_{ijkl} は弾性係数テンソル、 e_{ij} はひずみテンソル、 u_i は土粒子の変位ベクトル、 q_i は流量ベクトル、 k_{ij} は透水係数テンソル、 ρ_2 は間げき流体の密度であり、変数記号上のドット(・)は時間に関する微分を表わす。

式(4)を式(5)に代入し、初期変位を零と仮定し、積分形表示をすると次のようになる。

$$q * \{k_{ij}(p_{, j} + \rho_2 F_j)\}, i + u_{i, i} = 0 \quad \dots\dots(6)$$

ここで、記号*は次のようなたたみこみ積分を表わし、

$$V * W = \int_0^t v(r, \tau) \times w(r, t - \tau) d\tau \quad \dots\dots(7)$$

r と t はそれぞれ位置ベクトルと時間であり、 $\theta = 1$ である。

境界条件としては、次のものが考えられる。

$$\hat{T}_i = (\sigma_{ij} + \delta_{ij} p) n_j \quad (S_1 \text{ 上で}) \quad \dots\dots(8)$$

$$\hat{Q} = q_i n_i \quad (S_2 \text{ 上で}) \quad \dots\dots(9)$$

ここで、 \hat{T}_i は境界面 S_1 上で規定される応力、 n_i は境界面外向法線の方向余弦、 \hat{Q} は境界面 S_2 上に垂直方向の流量である。

2.2 変分原理と有限要素定式化

2.2.1 変分原理

前節で示した3次元圧密の基礎方程式は、変分原理によれば次に示す汎関数を変数 u と p に関して最小化する問題と等価になる。

$$\begin{aligned} \Omega = & \int_V [\sigma_{ij} \epsilon_{ij} + 2p^* u_{i,i} - g^* p_{,i} k_{ij} p_{,j} - 2\rho F_i^* u_i \\ & - 2g^* p_{,i} k_{ij} \rho_2 F_j] dV - 2 \int_{S_1} [\widehat{T}_i^* u_i] dS \\ & + 2 \int_{S_2} [g^* \widehat{Q}^* p] dS \end{aligned} \quad \dots\dots(10)$$

2.2.2 有限要素定式化

式(10)に基づき有限要素定式化を行なうには、まず対象とする空間領域を有限個の要素に分割し、有限個の節点変数値と対応する形状関数により未知変数の分布を仮定する必要があり、そのためにまず要素内の変位と間げき水圧をそれぞれ次のように表わす。

$$\{u^m\} = [N_u^m] \{u_e\} \quad \dots\dots(11)$$

$$p^m = [N_p^m] \{p_e\} \quad \dots\dots(12)$$

ここで、 $\{u^m\}$ 、 p^m はそれぞれ要素内の任意の点における変位ベクトルおよび間げき水圧、 $[N_u^m]$ は変位の形状関数、 $[N_p^m]$ は間げき圧の形状関数、 $\{u_e\}$ および $\{p_e\}$ はそれぞれ要素の節点変位値ベクトル、節点間げき水圧値のベクトルである。

式(11)と式(12)を式(10)に代入すれば、次のような空間的に離散化された汎関数が得られる。

$$\begin{aligned} \Omega = & \{u\}^T [K] \{u\} + 2 \{u\}^T [C] \{p\} \\ & - g^* \{p\}^T [H] \{p\} - 2 \{u\}^T \{p\} + 2g^* \{u\}^T \{Q\} \end{aligned} \quad \dots\dots(13)$$

ここで、 $\{u\}$ および $\{p\}$ は対象領域内の全節点の変位ベクトルと間げき水圧ベクトルであり、

$$\left. \begin{aligned} [K] = & \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_e^m]^T [D_e^m] [B_e^m] dV \\ [C] = & \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_d^m]^T [N_p^m] dV \\ [H] = & \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_q^m]^T [k^m] [B_q^m] dV \\ \{p\} = & \sum_{m=1}^M \int_{S_{im}} [N_u^m]^T [N_u^m] \{\widehat{T}^m\} dS \\ & + \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [N_u^m]^T \{\rho^m F^m\} dV \\ \{Q\} = & \sum_{m=1}^M \int_{S_{2m}} [N_p^m]^T [N_p^m] \{\widehat{Q}^m\} dS \\ & - \sum_{m=1}^M \int_{V_m} [B_q^m]^T [k] \{\rho_2^m F^m\} dV \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(14)$$

ここで、 $[D_e^m]$ は弾性係数マトリックス、 $[k^m]$ は透水係数マトリックスであり、 $[B_e^m]$ 、 $[B_d^m]$ 、 $[B_q^m]$ はそれぞれ次式に示すような係数マトリックスで、 $[N_u^m]$ 、 $[N_p^m]$ を適当に微分して得られる。

$$\left. \begin{aligned} \{e^m\} &= [B_e^m] \{u_e\} \\ e_{vol}^m &= [B_d^m] \{u_e\} \\ \{p, i^m\} &= [B_q^m] \{p_e\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(15)$$

ここで、 $\{e^m\}$ はひずみベクトル、 e_{vol}^m は体積ひずみ、 $\{p, i^m\}$ は圧力勾配ベクトルである。

式(15)に示す離散化された汎関数の節点変数ベクトル $\{u\}$ と $\{p\}$ に関する変分をとり、0 と等値することにより次のマトリックス方程式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} [K] \{u\} + [C] \{p\} &= \{P\} \\ [C]^T \{u\} - g^* [H] \{p\} &= -g^* \{Q\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(16)$$

2.2.3 時間領域における離散化

式(16)中の $\{u\}$ と $\{p\}$ は時間の関数であり、式(16)₂ は2つのたみこみ積分を含んでいる。このたみこみ積分の中の各項は、次のように書くことができる。

$$g^* f(t) = \int_0^t f(\tau) g(t-\tau) d\tau = \int_0^t f(\tau) a\tau \quad \dots\dots(17)$$

そして、積分は時間間隔 t_{n-1} から $t_n (= t_{n-1} + \Delta t)$ で、次のように近似することができる。

$$\int_{t_{n-1}}^{t_n} f(\tau) d\tau = \alpha \Delta t f(t_n) + (1-\alpha) \Delta t f(t_{n-1}) \quad \dots\dots(18)$$

上式を式(16)₂ に代入すれば、次のようになる。

$$\begin{aligned} [C]^T \{u(t_n)\} - \alpha \Delta t [H] \{p(t_n)\} &= [C]^T \{u(t_{n-1})\} \\ &+ (1-\alpha) \Delta t [H] \{p(t_{n-1})\} - \alpha \Delta t \{Q(t_n)\} \\ &- (1-\alpha) \Delta t \{Q(t_{n-1})\} \end{aligned} \quad \dots\dots(19)$$

2.3 時間積分に関する一考察

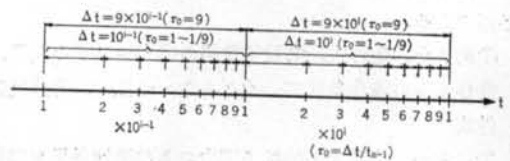
式(18)に示す時間積分の近似式中における係数 α の値は $f(t)$ の時間間隔内における変化の仕方により適当な値を選ぶことができるが、Hwang²⁾らは、圧密現象が遅延型の進行傾向をもつことに着目し、時間区間内での変数変化に対数型の内挿補間を用いることを提案している。すなわち、無次元化した時間を用いて、 t_{n-1} と t_n の間の $f(t)$ の時間変化を次のように表わした。

$$\tau = \frac{t - t_{n-1}}{t_n - t_{n-1}}, \quad \tau_0 = \frac{\Delta t}{t_n - t_{n-1}} \quad \dots\dots(20)$$

$$f(\tau) = f(t_{n-1}) + [f(t_n) - f(t_{n-1})] \frac{t_n(1+\tau)}{t_n(1+\tau_0)} \quad \dots\dots(21)$$

上式を積分すると、次のような α が得られる：

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\tau_0} - \frac{1}{t_n(1+\tau_0)} \quad \dots\dots(22)$$



図一 時間分割の例

この α の値は、正の Δt の値に対し常に0.5以上で、かつ $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \alpha = \frac{1}{2}$ であることから、この α を用いた積分近似は常に安定した解をもたらすといわれている。

そこで、この対数型補間係数 α を式(9)に適用した場合の実用性について、若干の考察を行なう。

対数型補間係数は、式(2)で示されるように時間 τ_0 の関数となっているために、次に示す全体剛性マトリックス中の係数が、 Δt を一定にとった場合でも計算ステップごとに変化することになり、その都度全体剛性マトリックスの修正を要し、計算時間増大の要因となる。ただし、非線形解析を行なう場合には、各時間ステップにおける剛性マトリックスの修正が常に必要なため問題とはならない。

$$\begin{bmatrix} [K] & [C] \\ [C]^T & -\alpha \Delta t [H] \end{bmatrix} \dots \dots (13)$$

また、実際の計算には図-1に示すような時間分割法を一般的に用いるが、この場合 $\tau_0=1 \sim 1/9$ および $\tau_0=9$ に対し、それぞれ $\alpha=0.557 \sim 0.509$ および $\alpha=0.677$ となる。すなわち、 α はおおよそ $1/2 \sim 2/3$ の値となるが、時間ステップ間のこの程度の α の変化は、 $1/2 \leq \alpha \leq 2/3$ の一定の値を全時間ステップに対して用いた場合に比較して、解の安定度あるいは精度に大きな影響は及ぼさない。

したがって、中央差分に相当する $\alpha=1/2$ 、あるいは $\alpha=2/3$ などの一定の値を用いても実用的には十分であると思われる。

§ 3. 要素の検討

従来、地盤問題を有限要素法により解析する場合、使用する土質定数の精度、あるいは複雑な地層のモデル化における単純化などにより、使用要素そのものの解析的な精度が問題にされることはほとんどなく、もっぱら単純な三角形または四辺形の1次要素が用いられてきた。しかしながら、多次元圧密問題を有限要素法により解く場合は、問題の性質上、すなわち多次元圧密問題が土の釣り合い方程式と間げき流体の連続条件式などから構成される変位と間げき圧の複合場の問題であることから、最近種々の高次要素が使用され始めている。そこで、ここでは現在多次元圧密の有限要素解析に使用されているいくつかの要素について、その精度を比較検討する。

3.1 種々の圧密解析用要素

これまででは要素内の変数場を定義する形状関数につい

	三 角 形	四 辺 形
1次	$N_i = \zeta_i (i=1,2,3)$	$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta)$ ($i=1,2,3,4$)
2次	$N_i = \zeta_i (2\zeta_i - 1)$ ($i=1,2,3$) $N_4 = 4\zeta_1 \zeta_2$ $N_5 = 4\zeta_1 \zeta_3$ $N_6 = 4\zeta_2 \zeta_3$	$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_i \xi) (1 + \eta_i \eta) \times (\xi_i \xi + \eta_i \eta - 1)$ ($i=1,2,3,4$) $N_5 = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta \eta)$ ($i=5,7$) $N_6 = \frac{1}{2} (1 + \xi \xi) (1 - \eta^2)$ ($i=6,8$)
節点番号と局所座標系		

表-1 形状関数

要素の種類	0-1	1-1	1-2	2-2
間げき圧の形状関数の次数	0	1	1	2
変位の形状関数の次数	1	1	2	2
□ 間げき圧値が指定される点				
○ 変位値が指定される点				

(注)要素幾何形状の形状関数次数はすべて1次とする

表-2 要素の種類

ては具体的に示さなかったが、有限要素定式化の過程で分かるように、変位場と間げき水圧場の形状関数は必ずしも同一の形状関数を用いる必要はなく、それぞれ別に定めることができる。したがって、ここでは要素内の変位場および間げき水圧場を定義する形状関数と、それぞれの形状関数の組合わせで生じるいくつかの圧密解析用の要素について検討する。

三角形要素および四辺形要素について、要素内の1次変化および2次変化の変数場を定義するためには、表-1に示すような面積座標系および局所座標系を用いた形状関数が一般に用いられている。この表中の形状関数を変位場および間げき水圧場のそれぞれに適用することにより生じる圧密解析用の要素を、表-2に示す。この表では、変位場と間げき水圧場の2つの形状関数の組合わせのみによって要素の分類を行なっているが、要素剛性マトリックスを計算する際に必要な要素形状を定義する形状関数も、変位場および間げき水圧場の形状関数とは独立に選ぶことができるために、要素形状の形状関数を含んだ組合わせを考えるとさらに分類が可能である。しかしながら、実務上の地盤問題では曲線境界を扱うことはほとんどないため、形状の形状関数としては直線境界

に対する1次のものだけを留意すれば実用的には十分であると考えられる。したがって、今回の要素検討では表中の3つの要素、すなわち(1-1)要素、(1-2)要素および(2-2)要素に対して1次の要素形状の形状関数を用いたものを対象とした。

この表の(0-1)要素は参考のためにあげたもので、Christian⁹⁾らがSandhuらとは別のアプローチによる圧密解析で用いた要素である。これは要素内で一定の間げき圧を仮定したものであるため、圧力勾配の計算は1つの要素のみでは不可能で、隣接要素の間げき圧値との関係を用いざるを得ない。このことに、Christianらが圧密問題を解く際に連成問題として一貫した有限要素解析を行わずに、体積ひずみを媒介変数として釣り合い条件式と連続条件式を別々に解かざるを得なかった1つの理由があると解釈できる。

また、(1-2)要素は間げき水圧の形状関数より高次の形状関数を変位場に適用することにより、変位の微分で得られる有効応力の場と間げき水圧の場を同次数で表わすことができるという理由でSandhu¹⁾らが提案したものである。

(2-2)要素は、一般には要素形状の形状関数にも2次のものを用いたアイソパラメトリック要素として用いられることが多いが、ここでは前述の理由により、1次の要素形状の形状関数を用いているためにサブパラメトリック要素となっている。

次に、解析解が得られている1次元および2次元圧密問題に対し、上述の3つの要素を用いて数値計算を行なうが、要素剛性マトリクス計算の際の数値積分はいずれの要素についても Gauss の3点積分を適用した。

なお、以後解析モデル名に添えた数字は、表-2で示した要素タイプを表わすものとする。

3.2 均一地盤の1次元圧密

図-2に示すモデルにより、片面排水の1次元圧密問題を解析した結果を、等時曲線として図-3に示した。

ここで、2要素モデル(B)の解析結果について比較すると、時間係数が小さい時点($T_v \leq 0.2$)においては、(2-2)要素の近似度が(1-1)要素および(1-2)要素に比べ良好であるが、時間経過とともに(1-2)要素の近似度がよくなっている。また、深さ方向に同一未知節点数をもつ1要素モデル(A)₂₋₂と2要素モデル(B)₁₋₁の結果は、ほぼ同程度の近似度を示している。

3.3 2層地盤の1次元圧密

次に、土性値が著しく異なる地盤に対する適用性を検

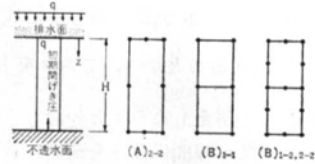


図-2 均一地盤の1次元圧密の有限要素分割

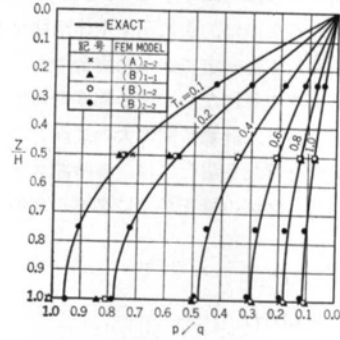


図-3 1次元圧密の等時曲線

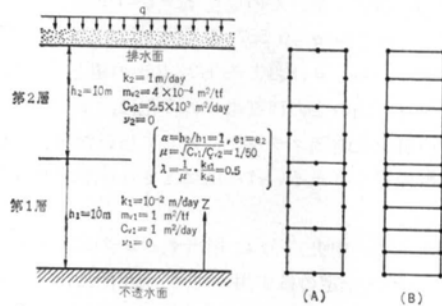


図-4 2層地盤の1次元圧密

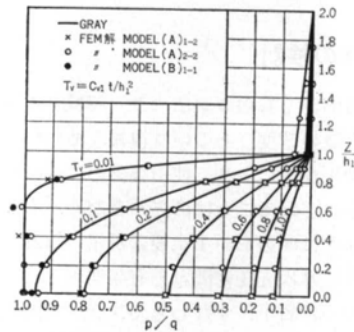


図-5 2層地盤の等時曲線

討するため、図-4に示すような2層地盤の1次元圧密を解析した。この地層モデルは、上層が細砂層、下層がシルト質粘土層にほぼ相当するものとして想定したものである。2層地盤の1次元圧密の解析にはGray⁴⁾の級数解があり、今回最初の32項までを用いて解析解を計算した。

有限要素解析結果は、図-5および図-6に等時曲線

および平均圧密度曲線として表わした。図-5によればモデル(A)では均一地盤の場合と同様に、時間係数が小さいとき ($T_0 \leq 0.2$) に (2-2) 要素の近似度が (1-2) 要素に比較してすぐれているが、時間経過に伴う (1-2) 要素の解析解への接近は均一地盤の解のようにならず、(2-2) 要素と同程度の近似度にとどまっている。また、モデル(A)₂₋₂ とモデル(B)₁₋₁ を比較すれば、若干(A)₂₋₂ のほうが近似度がよい。

図-6 は各層の平均圧密度を表わしたものであるが、モデル(A)₂₋₂ とモデル(B)₁₋₁ の結果はほとんど一致したために、まとめて示した。いずれのケースでもきわめて近似度がよいが、これは平均圧密度が過剰開げき圧の深さに関する積分の項で表わされるために、開げき圧の値よりも誤差が緩和されるためである。

3.4 帯状荷重を受ける半無限地盤の2次元圧密⁵⁾

最後に、2次元圧密問題における比較検討のために、帯状荷重を受ける半無限地盤の圧密を解析した。解析モデルは図-7に示すが、モデル(B)はモデル(A)を各要素の辺中点でさらに分割したものである。各解析モデルの解析規模、および計算に要した時間を表-3に示したが、これは多次元圧密の有限要素解析の実用性の観点からは計算時間も無視できないファクターであるからである。

解析結果は、図-8に地表面下 $z/a=0.5$ における開げき圧の経時変化を示した。

この図によれば、同一要素数の分割の場合、すなわちモデル(A)の3ケースを比較すれば、(2-2) 要素の場合が解析に対する近似度がよい。また、(1-2) 要素は同一次数の開げき圧場の仮定をしている (1-1) 要素に比較し、圧密初期における近似度はすぐれているが、時間係数 $\tau=10^{-1}$ 付近では逆に (1-1) 要素の方が厳密解に近い。また、(1-1) 要素を用いる場合でも、要素分割を密にしたモデル(B)₁₋₁ では、モデル(A)₁₋₁ の場合に見られた圧密初期における近似度の悪さは改善されて、モデル(A)₂₋₂ とほぼ同程度の解析結果が得られている。

3.5 要素に関する結論

以上の数値解析結果をまとめると、次のようになる。

- (1) 要素分割数が同じ場合、(2-2) 要素が精度的に最も優秀な解を与え、(1-1) 要素の場合が最も劣る。
- (2) (1-2) 要素は、(2-2) 要素よりも精度的に劣る。
- (3) 総節点数が同一規模の場合は、(1-1) 要素を用いた場合と(2-2) 要素を用いた場合は、ほぼ同程度の精

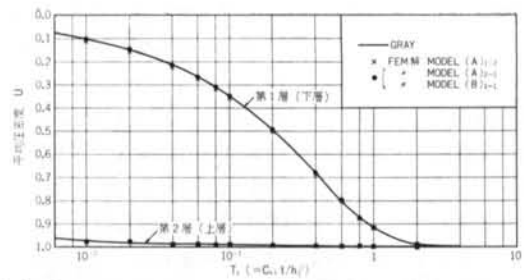


図-6 2層地盤の平均圧密度と時間係数の関係

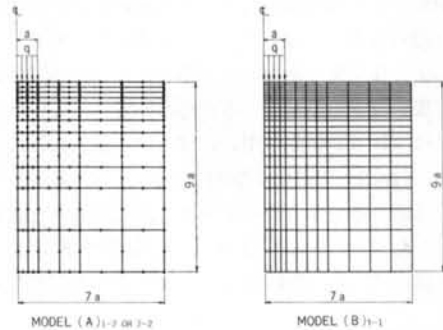


図-7 半無限地盤上の帯状荷重の解析モデル

Model	開げき圧場 次数	変位場 次数	節点数		要素数	計算時間* (秒)
			変位	開げき圧		
(A) ₁₋₁	1	1	91	91	72	8.63
(A) ₁₋₂	1	2	253	91	72	20.82
(A) ₂₋₂	2	2	253	253	72	31.47
(B) ₁₋₁	1	1	325	325	288	38.73

(*: IBM-3033による)

表-3 解析モデルと計算時間

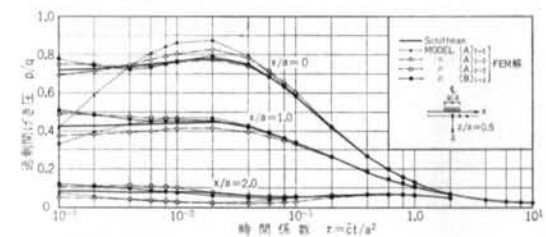


図-8 開げき圧の経時変化

度の解が得られる。

これらのうち、(1), (3)についてはある程度予測された結果であるが、(2)については(1-2)要素が変位形状関数の導関数と開げき水圧形状関数の次数を同一にすべきだとして Sandhu らにより提案され、一部に追従した使用が見られるのに対し、少なくとも精度的にはそれを支持すべき結果とはならなかった。

以上の結果から、(2-2)要素が少ない要素分割数で

高精度の解が得られるという意味で優れているといえるが、実際の地盤問題に対する適用の場合は、要素分割の節約というメリットを生かせない場合がある。それは、地層構成が複雑な地盤で、地層境界の制約を受け、要素分割を任意に大きくすることができない場合である。そのような場合には、むしろ(1-1)要素を用いた細分化した要素分割により、材料特性の空間的变化に対する近似度をよくしたほうがよいことも考えられる。したがって、実際の地盤を有限要素法により圧密解析を行なう場合、対象とする現場状況により要素の使い分けをすればよいと思われる。すなわち、粗い要素分割でもモデル化できるような均質な地盤を扱う場合には(2-2)要素を用い、要素分割を密にせざるを得ない地層構成の地盤に対しては(1-1)要素を用いればよいと思われる。

なお、(1-2)要素は精度的に(1-1)要素よりも優れているが、必要な入力データは(2-2)要素と同じである。したがって、(2-2)要素でも解析できる入力データを用いて、精度を犠牲にした解析をする実用的意

味は、表-3に示すような計算時間の節約に限られると思われる。

§ 4. あとがき

今回の報告では、数値実験により有限要素圧密解析用の要素タイプの検討を行なった。これらの結果は、現場問題に有限要素圧密解析を適用する場合、要素タイプの選択に際し1つの資料として利用できるものと思われる。

今後は、土質調査と実測データが完備した現場問題を対象とし、有限要素圧密解析の実務問題への適用法を検討して行くつもりである。

最後に、本報告について終始有益なご助言を賜った早稲田大学森麟教授、東京都土木技術研究所杉本隆男氏および当社研究所尾上篤生氏に謝意を表する次第である。

<参考文献>

- 1) R. S. Sandhu & E. L. Wilson: "Finite Element Analysis of Seepage in Elastic Media" J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 95, No. EM 3 (1969)
- 2) C. T. Hwang, Norbert R. Morgenstern & D. T. Murray: "On Solutions of Plane Strain Consolidation Problems by Finite Element Methods" Can. Geotech. J., Vol. 8, No. 1 (1971)
- 3) J. T. Christian & J. W. Boehmer: "Plane Strain Consolidation by Finite Elements" J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 96, No. SM 4 (1970)
- 4) 最上武雄編: "土質力学" 技報堂 (1969)
- 5) R. L. Schiffman, A. T. Chen & J. C. Jordan: "An Analysis of Consolidation Theories" J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol. 95, No. SM 1 (1969)