

変分法および重回帰分析法による多次元方向の温度伝導率の算定

羽 根 義

§. 1 はじめに

非定常熱伝導解析に用いられる有限要素法や、有限差分法などの手法はある程度確立されているが、その解析に用いられる材料の熱定数（温度伝導率）は、温度、水分、空気の対流、あるいは熱方向による伝熱特性の違いの影響によって大きく異なるといわれ、測定法によっては、その温度伝導率が大きく異なることもあって、その測定法が確立されているとはいえないのが現状のようである。

また、これらの温度伝導率測定法（装置）には、レーザー光やクセノン光、あるいはヒーターを用いたレーザー（クセノン）フラッシュ法、周期的加熱法、定速昇温度法などがあるが、レーザー、ヒーター等の熱源を埋設することができないこともあり、実構造物等での温度伝導率の測定は一般には困難である。

さらに、これらの測定法はいずれも、熱伝導方程式の偏微分方程式を連続系として解かれた厳密解に当てはめられたものであるが、この厳密解はもっとも単純な場合しか得ることができず、したがって従来の測定法は次のような欠点を持っている。

- 1) 限定された試験片しか用いることができず、また精度良く成型された小試験片が必要であり、実構造物等においての温度伝導率の測定は難しい。
- 2) 小試験片に精度の良い境界温度条件（例えば、正弦温度波、定速昇温度波など）をレーザー光やヒーター等により与える必要があり、また複雑な境界条件のもとでは温度伝導率の測定は難しい。
- 3) 多次元方向の厳密解が一般には求められないため、多次元方向の温度伝導率の測定は困難である。

したがって、試験片を作製して計測を行なう時点で、水分や空気の影響を受けて性状が変化しやすいものや、局部的に熱を与えて性状が変化してしまうもの、あるいは熱的異方性を有するもの等の測定は困難であった。

筆者は、熱伝導方程式を変分法を用いて離散化し、さ

らに重回帰分析法を用いることによって従来の測定法の欠点を低減し、単に数点の温度（1次元の場合は3点の温度、2、3次元の場合は各々5点、7点の温度）を定時ごとに計測することによって、簡単に精度良く温度伝導率が算定できると考えた。

この算定法の数値実験による検討の結果、良好な成果が得られたので報告する。

§ 2. 算定法の概要

<使用記号>

- a_x, a_y, a_z : 温度伝導率 (m²/hr)
- a_{xz}, a_{xy}, a_{yz} : 仮定した温度伝導率 (m²/hr)
- a_{ex}, a_{ey}, a_{ez} : 算定された温度伝導率 (m²/hr)
- C_p : 比熱 (kcal/kg°C)
- F_x, F_y, F_z : フーリエ数, $F_x = a_x \frac{dt}{(dx)^2} \cdot F_y$
 $= a_y \frac{dt}{(dy)^2} \cdot F_z = a_z \frac{dt}{(dz)^2} (-)$
- h : 熱伝達率 (kcal/m²h°C)
- N : サンプリング数
- T : 時間 (hr)
- $x_1, 2, \dots, n$: 独立変数
- Y : 従属変数
- $\alpha_1, 2, \dots, n, \beta$: 係数
- γ : 比重量 (kg/m³)
- λ_x, y, z : 熱伝導率 (kcal/mh°C)
- dt : 微小時間 (hr)
- dx, dy, dz : 空間の距離 (m)
- ϵ_x, y, z : 離散化誤差および回帰誤差
 $(a_{xz}, y, z - a_{ex}, y, z) / a_{ex}, y, z \times 100(\%)$
- $\bar{\epsilon}_x, y, z$: ϵ_x, y, z の平均値(%)
- σ : ϵ_x, y, z の標準偏差(%)
- $t\phi_p, \phi_{x1}, \dots, \phi_p, x, \dots$: 温度(°C)
- $x_1, x_2, l, \dots, p, o, e, \dots$: 空間を示すサフィックス
- t : 次時刻を示すサフィックス

熱伝導方程式:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\lambda_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\lambda_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - C_p \gamma \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots(1)$$

の1次元の場合、次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(a_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots(2)$$

ただし、 a_x は温度伝導率を示し、 $a_x = \lambda_x / C_p \gamma$ で、 λ_x , C_p , γ は、各々 x 軸方向の熱伝導率、比熱、比重を示す。

式(2)は変分法により、解 ϕ は次の積分:

$$\Pi(\phi) = \sum_i \int_{R_i} \left\{ \frac{1}{2} a_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \phi \right\} dx \quad \dots\dots(3)$$

を最小にすることに相当する。ただし、 $\Pi(\phi)$ は汎関数を示す。

ここで、 $\Pi_i(\phi)$ を部分領域 R_i からの $\Pi(\phi)$ への寄与とする (図-1)。

$$\Pi_i(\phi) = \int_{R_i} \left\{ \frac{1}{2} a_x \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \phi \right\} \quad \dots\dots(4)$$

$\partial \phi / \partial x$, が ϕ_{x_1} から ϕ_p までの線分上で一定値 $(\phi_p - \phi_{x_1}) / \Delta x_1$ をとると仮定し、 ϕ は $(\phi_{x_1} + \phi_p) / 2$ と仮定すると式(4)から、

$$\Pi_i(\phi) = \frac{1}{2} a_x \Delta x_1 \left(\frac{\phi_p - \phi_{x_1}}{\Delta x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) (\phi_{x_1} + \phi_p) \Delta x_1 \quad \dots\dots(5)$$

が得られる。ただし、 $\partial \phi / \partial t$ は変分に不感とする。

$\Pi_i(\phi)$ の ϕ_p に関する偏導関数をとると、

$$\frac{\partial \Pi_i(\phi)}{\partial \phi_p} = \frac{a_x}{\Delta x_1} (\phi_p - \phi_{x_1}) + \frac{\Delta x_1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \dots\dots(6)$$

となり、同様に R_2 の領域において次式が得られる。

$$\frac{\partial \Pi_2(\phi)}{\partial \phi_p} = \frac{a_x}{\Delta x_2} (\phi_p - \phi_{x_2}) + \frac{\Delta x_2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \dots\dots(7)$$

式(6)と式(7)を加え、その和を零に等しいと置くと、

$$a_x \left(\frac{\phi_p - \phi_{x_1}}{\Delta x_1} + \frac{\phi_p - \phi_{x_2}}{\Delta x_2} \right) + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots\dots(8)$$

が得られる。

ここで、 $\partial \phi / \partial t$ に対して Crank-Nicolson 法を用いて離散化すると、

$$\begin{aligned} \phi_p = & \left\{ \frac{A_x}{\Delta x_1} (\phi_{x_1} + \phi_{x_2}) + \frac{A_x}{\Delta x_2} (\phi_{x_1} + \phi_{x_2}) \right. \\ & \left. + \left(1 - \frac{A_x}{\Delta x_1} - \frac{A_x}{\Delta x_2} \right) \phi_p \right\} / \left(1 + \frac{A_x}{\Delta x_1} + \frac{A_x}{\Delta x_2} \right) \quad \dots\dots(9) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $\phi_p, \phi_{x_1}, \phi_{x_2}$ は Δt 時間後の各点の温度を示し、 $A_x = a_x \Delta t / (\Delta x_1 + \Delta x_2)$ である。

式(9)は、 $\Delta x_1 = \Delta x_2 \equiv \Delta x$ とおくと、

$$\phi_p = \frac{F_x}{2(1+F_x)} (\phi_{x_1} + \phi_{x_2} + \phi_{x_1} + \phi_{x_2}) + \frac{1-F_x}{1+F_x} \phi_p \quad \dots\dots(10)$$

が得られる。ここで、 F_x はフーリエ数で $F_x = a_x \Delta t / (\Delta x)^2$ の無次元数である。

2次元の場合、1次元と同様に次式が導き出される。

$$\phi_p = \frac{F_x}{2(1+F_x+F_y)} (\phi_{x_1} + \phi_{x_2} + \phi_{x_1} + \phi_{x_2})$$

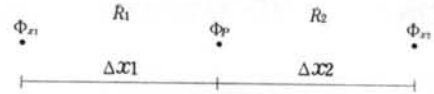


図-1 変分的決定のための領域と節点の指定(1次元の場合)

$$\begin{aligned} & + \frac{F_x}{2(1+F_x+F_y)} (\phi_{y_1} + \phi_{y_2} + \phi_{y_1} + \phi_{y_2}) \\ & + \frac{1-F_x-F_y}{1+F_x+F_y} \phi_p \quad \dots\dots(11) \end{aligned}$$

3次元の場合、次式が得られる。

$$\begin{aligned} \phi_p = & \frac{F_x}{2(1+F_x+F_y+F_z)} (\phi_{x_1} + \phi_{x_2} + \phi_{x_1} + \phi_{x_2}) \\ & + \frac{F_y}{2(1+F_x+F_y+F_z)} (\phi_{y_1} + \phi_{y_2} + \phi_{y_1} + \phi_{y_2}) \\ & + \frac{F_z}{2(1+F_x+F_y+F_z)} (\phi_{z_1} + \phi_{z_2} + \phi_{z_1} + \phi_{z_2}) \\ & + \frac{1-F_x-F_y-F_z}{1+F_x+F_y+F_z} \phi_p \quad \dots\dots(12) \end{aligned}$$

となる。ここで、 F_y, F_z は F_x と同様に $F_y = a_y \Delta t / (\Delta y)^2$, $F_z = a_z \Delta t / (\Delta z)^2$ を示す。

一方、重回帰分析法の回帰式は、

$$Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots\dots + \alpha_n X_n + \beta \quad \dots\dots(13)$$

とし、式(10)を用いる場合、 ϕ_p を Y に、 $(\phi_{x_1} + \phi_{x_2} + \phi_{x_1} + \phi_{x_2})$ を X_1 に、 ϕ_p を X_2 にデータとしてインプットする。

その結果得られた回帰式(13)の係数より、 $\alpha_1 = F_x / 2(1+F_x)$, $\alpha_2 = (1-F_x) / (1+F_x)$ であるから、これらの式を変形して、

$$F_x = \frac{2\alpha_1}{1-2\alpha_1}, \frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2} \quad \dots\dots(14)$$

が得られる。したがって、 $F_x = a_x \Delta t / (\Delta x)^2$ より、

$$a_x = \frac{2\alpha_1}{1-2\alpha_1} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t}, \frac{1-\alpha_2}{1+\alpha_2} \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} \quad \dots\dots(15)$$

の2つの温度伝導率が算定される。

同様に2次元の場合、

$$\begin{aligned} F_x = & \frac{2\alpha_1}{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}, \frac{4\alpha_1}{1+\alpha_3}, \frac{1-4\alpha_2-\alpha_3}{1+\alpha_3} \\ F_y = & \frac{2\alpha_2}{1-2(\alpha_1+\alpha_2)}, \frac{4\alpha_2}{1+\alpha_3}, \frac{1-4\alpha_1-\alpha_3}{1+\alpha_3} \quad \dots\dots(16) \end{aligned}$$

3次元の場合、

$$\begin{aligned} F_x = & \frac{2\alpha_1}{1-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}, \frac{4\alpha_1}{1+\alpha_4}, \frac{1-4\alpha_2-4\alpha_3-\alpha_4}{1+\alpha_4} \\ F_y = & \frac{2\alpha_2}{1-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}, \frac{4\alpha_2}{1+\alpha_4}, \frac{1-4\alpha_3-4\alpha_1-\alpha_4}{1+\alpha_4} \\ F_z = & \frac{2\alpha_3}{1-2(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3)}, \frac{4\alpha_3}{1+\alpha_4}, \frac{1-4\alpha_1-4\alpha_2-\alpha_4}{1+\alpha_4} \quad \dots\dots(17) \end{aligned}$$

が得られ、 F_x, F_y, F_z より、 a_x, a_y, a_z の温度伝導率が算定される。

§ 3. 実測による温度伝導率の算定法

実測により温度伝導率を算定するためには、次のステップに従って行なう。

[第1ステップ]

目的に応じた試験体形状、境界条件のもとで、文献等による一般値を用いて数値実験を行なう。

[第2ステップ]

数値実験により、測定温度点の距離 Δx , Δy , Δz , 測定時間間隔 Δt , サンプリング数 N を決定する。

[第3ステップ]

Δx , Δy , Δz , Δt , N を用いて温度を実測する。

[第4ステップ]

重回帰分析を行ない、その回帰式より温度伝導率の算定を行なう。

[第5ステップ]

算定された温度伝導率の精度を確認するために、算定された温度伝導率を用いて再度数値実験を行なう。

§ 4. 数値実験結果および考察

この算定法の精度を評価するために、数値実験を行なった。この数値実験では、実測による温度の誤差をなくするために、温度伝導率を仮定して解かれた温度を用いた。

1次元の場合、仮定したモデルの厳密解の温度を用い、2, 3次元の場合、一般に厳密解は得られないので、有限差分法による温度を用い全て 10^{-3} の桁までの温度を採用している。2, 3次元の有限差分法の時間刻みは0.01時間である。

仮定したモデルの条件は図-2~図-4に示す。数値実験結果を表-1, および図-5~図-13に示す。

図-5~図-13は、 $F_{x,y,z}$ と $\varepsilon_{x,y,z}$ で表現した。 $F_{x,y,z}$ はフーリエ数で、 $\varepsilon_{x,y,z}$ は離散化誤差および回帰誤差を示す。

実測する場合、§3. の Δx , Δy , Δz , Δt , N を決定するとき、この図-5~図-13を用いればよい。

[1次元の場合]

表-1のNo.1に示されるように、 $F_x=0.6\sim 40.0$ の範囲内で、 $\varepsilon_x=\pm 1.0\%$, $F_x=0.36\sim 70.0$ で $\varepsilon_x=\pm 1.5\%$ の十分な結果が得られた(図-5)。

また、No.2に示されるように、試験体表面より $x_t=0.5\text{m}$ 入った位置で $F_x=0.36\sim 10.0$ の範囲内で $\varepsilon_x=1.0\%$ が得られた。この場合、 ϕ_p の平均温度と標準偏差は

$0.17\pm 0.22^\circ\text{C}$ であった。

これらの数値実験から、試験体の表面および内面でも単に温度が計測できれば、温度伝導率の算定は可能であり、上記のような小さな温度差でも算定できると考察される。

No.3のサンプリング時間間隔 Δt が0.1時間の場合、 $F_x=0.15\sim 0.4$ の狭い範囲で $\varepsilon=1.0\%$ が得られた。この場合、 $\Delta t=0.1$ 時間内での各点の温度変化が小さいため、 F_x の範囲が狭くなったものと考えられる。

No.4とNo.5に示すように、サンプリング数を変化させて算定の精度を検討したが、これらの温度が厳密解の温度であるため、この誤差は離散化誤差および回帰誤差に関するものであり、実測による測定誤差は含まれないので、この傾向は明らかではなかった。しかし、実測により温度伝導率を算定する場合、測定誤差の影響を小さくするために、なるべく多くサンプリングすることが望ましい。ここで、回帰式の β 項はNo.4とNo.5の場合、 10^{-3} 程度であった。

[2次元の場合]

図-3に示されるNo.7の点に対し、 $F_x\sim 0.36$, $F_y\sim 1.0$ の範囲内で、 $\varepsilon_{x,y}=\pm 1.0\%$ の結果が得られた(表-1のNo.6, および図-8)。

同様に、No.13, 19の点に対し各々 $F_x=0.05\sim 0.4$, $F_y=0.1\sim 1.5$, $F_z=0.03\sim 0.32$, $F_y\sim 1.2$ の範囲内で $\varepsilon_{x,y}=1.0\%$ の結果が得られた(表-1のNo.7, No.8, および図-9, 図-10)。ここで、回帰式の β 項はNo.9~No.11の場合、 $10^{-4}\sim 10^{-5}$ 程度であった。

[3次元の場合]

図-4に示されるPの点に対し、 $F_x\sim 0.16$, $F_y\sim 0.4$, $F_z\sim 0.45$ の範囲内で $\varepsilon_{x,y,z}=1.0\%$ の結果が得られた(表-1のNo.12~No.14, および図-11~図-13)。 β 項は、No.15~No.17の場合、 $10^{-3}\sim 10^{-4}$ 程度であった。

上記の β 項は、回帰式における温度の誤差と考えられるが、明確にはその傾向は分からなかった。

2, 3次元の数値実験から、この算定法を用いることによって、多次元方向の温度伝導率が算定できると考察される。

さらに、この数値実験モデルに示されるように、この算定法は熱伝導方程式を重回帰分析法の回帰式に変換されているために、試験体の形状、境界条件の選択には自由度があり、各点の温度間に単に適度な相関関係があれば、温度伝導率が算定できるものと考えられる。

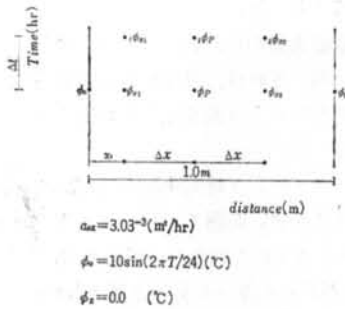


図-2 仮定条件 (1次元の場合)

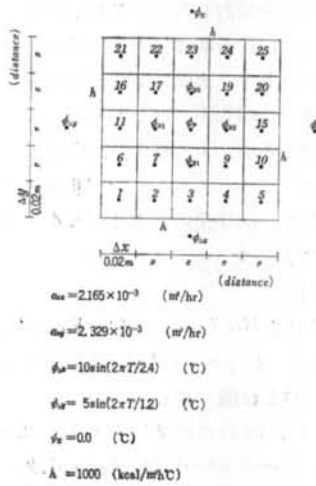


図-3 仮定条件 (2次元の場合)

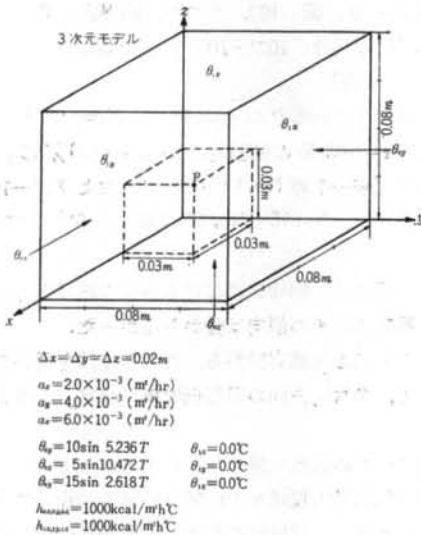


図-4 仮定条件 (3次元の場合)

§ 5. 結論およびまとめ

これらの数値実験より、境界条件および Δx , Δy , Δz ,

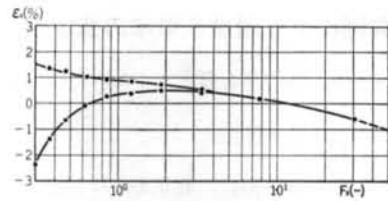


図-5 数値実験結果 (1次元, 表面)

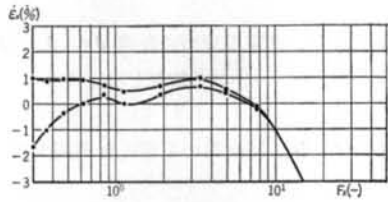


図-6 数値実験結果 (1次元, $x_1 = 0.5 \text{ m}$)

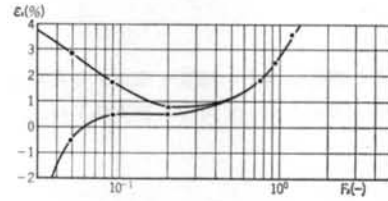


図-7 数値実験結果 (1次元, $\Delta t = 0.1 \text{ hr}$)

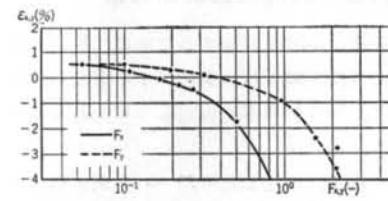


図-8 数値実験結果 (2次元, No. 7の点)

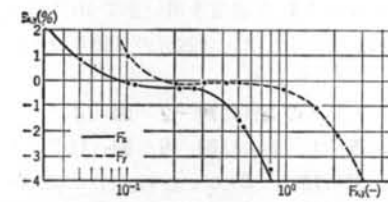


図-9 数値実験結果 (2次元, No. 13の点)

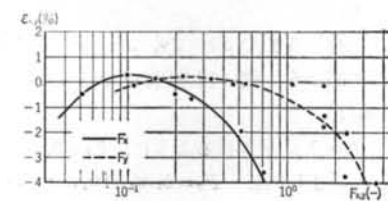


図-10 数値実験結果 (2次元, No. 19の点)

N を条件として精度良く、多次元方向の温度伝導率が算定できることが分かった。したがって、実測による温度伝導率の算定も可能であると考えられる。

No.	Dimension	$\Delta x(m)$	Output $\Delta t(hr)$	$x_1(m)$	N	$\varepsilon_{x, y, z} \pm \sigma(\%)$	参照図
1	1	0.01~0.14	1.0	0.0	100		図-5
2	1	0.01~0.04	1.0	0.5	100	—	図-6
3	1	0.004~0.13	0.1	0.0	100		図-7
4	1	0.03	1.0	0.0	10	$\varepsilon_x: 0.05 \pm 0.18$	
5	1	0.03	1.0	0.0	5	$\varepsilon_x: 0.74 \pm 0.41$	
6	2	0.02(= Δy)	0.01~0.3	$\phi_p = \phi_7$	14~422		図-8
7	2	0.02(= Δy)	0.01~0.13	$\phi_p = \phi_{13}$	14~422	—	図-9
8	2	0.02	0.01~0.13	$\phi_p = \phi_{19}$	14~422		図-10
9	2	0.02	0.01~0.05	$\phi_p = \phi_7$	84~442	$\varepsilon_x: -0.082 \pm 0.353$ $\varepsilon_y: 0.071 \pm 0.337$	
10	2	0.02	0.01~0.05	$\phi_p = \phi_{13}$	84~442	$\varepsilon_x: -0.132 \pm 0.446$ $\varepsilon_y: -1.671 \times 10^{-3} \pm 0.425$	
11	2	0.02	0.01~0.05	$\phi_p = \phi_{19}$	84~442	$\varepsilon_x: -0.171 \pm 0.366$ $\varepsilon_y: -0.017 \pm 0.241$	
12	3	0.02	0.01~0.11	ϕ_p	89~99	—	図-11
13	3	0.02(Δy)	0.01~0.11	ϕ_p	89~99	—	図-12
14	3	0.02(Δz)	0.01~0.07	ϕ_p	93~99	—	図-13
15	3	0.02	0.01~0.33	ϕ_p	97~99	$\varepsilon_x: -0.196 \pm 0.293$	
16	3	0.02(Δy)	0.01~0.03	ϕ_p	97~99	$\varepsilon_y: 2.667 \times 10^{-3} \pm 0.204$	
17	3	0.02(Δz)	0.01~0.03	ϕ_p	97~99	$\varepsilon_z: -0.404 \pm 0.382$	

表-1 数値実験結果

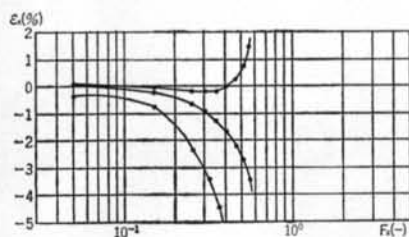


図-11 数値実験結果(3次元, x 軸方向)

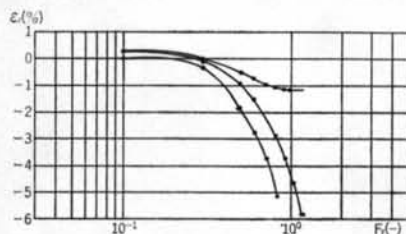


図-12 数値実験結果(3次元, y 軸方向)

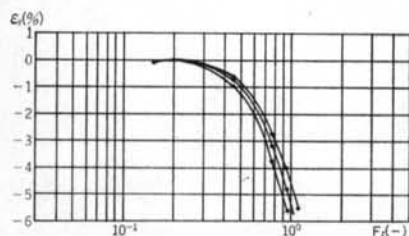


図-13 数値実験結果(3次元, z 軸方向)

また、この算定法は熱伝導方程式を変分法を用いて離散化し、さらに重回帰分析法に変換しており、単に各点の相関関係で表現しているために次の利点を持っていると考えられる。

- (1) 試験体形状、境界条件の選択には自由度があり、単に数点の温度を定時ごとに実測するだけで試験体表面、内部、あるいは実構造物や地盤等の多次元方向の温度伝導率が算定できること。
- (2) 高次の離散式を用いることにより、算定精度を上げることができること。
- (3) 有意水準等を評価することによって、その算定値の信頼性を評価できること。
- (4) 温度伝導率が温度や含水状態、空気等により変化しても連続して算定ができること。
- (5) 測定点間の距離が異なっても、その回帰式は容易に得られること(式(9)参照)。

§ 6. 今後の課題

この算定法を用いた実測による結果を、次回に報告したいと考えている。また、この理論を押し進めて、温度の測定点を少なくした算定法についての検討、および“§3. 実測による温度伝導率の算定法”についてのステ

ップの簡略化の検討,そして複層壁等についての総合した温度伝導率の算定法についての検討等を行なってゆきたいと考えている。

謝辞 数値実験に協力をいただいた当社原子力部の須原

氏,および河野君に謝意を表します。なお,数値実験に用いた有限差分法には原子力部のプログラム TEMDA を,重回帰分析には計算センターのプログラム ALYS を使用した。

<参考文献>

- 1) G. D. Smith: "偏微分方程式の解法" サイエンス社
- 2) G. E. Forsythe & W. R. Wasow: "Finite Difference Method for Partial Equations" Wiley
- 3) 川下: "熱伝導論" オーム社
- 4) 片山, 齊藤: 機械学会論文集 34巻268号
- 5) 戸川: "微分方程式の数値計算" オーム社
- 6) 大崎, 菊地, 緒方: "統計技術" 同文書院
- 7) 羽根: "重回帰分析による温度伝導率の算定 (その1: 温度伝導率の算定法および数値実験による検討)" 昭和55年度日本建築学会秋季大会
- 8) T. Hane: "A Method for the Multidimensional Thermal Diffusivity Measurement by Means of the Variational Approximate Method and Multiple Linear Regression" 1st Japan Symposium on Thermophysical Properties (1980)