

原位置での多次元方向温度伝導率の同定法 (その1)

羽 根 義

§ 1. はじめに

従来の温度伝導率の測定法(以下、同定法という)は、熱伝導方程式で記述される分布定数システムの連続系厳密式に基づくもので、(1)成型された試験片が必要であること、(2)試験片に与えられる初期温度分布が一様であることが必要なこと、(3)試験片に与えられる境界条件が限定されていること、(4)多次元方向の温度伝導率の同定法が得られていないこと、などの制約条件があった。

したがって、原位置における熱水分特性、異方性熱特性、形状、あるいはその温度場に与えられる条件などを考慮した同定法は得られていないのが現状である。

本研究は、原位置での温度伝導率の同定法の確立を目

的としているが、これらの同定法には連続系厳密式に基づく同定法は困難であると考えられ、したがって前報告論文^{1)~3)}に示されるように、離散化近似式を用いた同定法の導入が必要となる。

しかし、一般に離散化近似式は連続系厳密式の必要十分条件を満たさず、温度伝導率の同定法に離散化近似式を用いる場合、その適用条件(適用範囲、適用精度等)を明確にする必要がある。

本論文では、スプライン関数法、差分法、数値補間法、ニュートン・コーツ積分法による同定式を導びき、その適用条件、およびこれらの同定式のうち温度伝導率の同定法として適している同定式を検討する。

§ 2. 温度伝導率の同定式の概要

2.1 スプライン関数法による同定式 (SF 33) の概要⁴⁾

$$1 \text{次元熱伝導方程式系} : a \frac{\partial^2 \phi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi(x, t)}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots(1)$$

の温度伝導率 a の同定に用いる入力温度データを、 $\phi(x_i, t_j)$ ($i=0, 1, \dots, M, j=0, 1, \dots, N$) とし、

$$\phi(x, t) \simeq \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \phi(x_i, t_j) c_i(x) c_j(t) \quad \dots\dots(2)$$

と近似する。ここで、 $c_i(x)$ 、 $c_j(t)$ は3次のカーディナルスプラインであり、

$$\begin{aligned} c_i(x_k) &= \delta_{ik} & (i, k=0, 1, \dots, M) \\ c_i(t_m) &= \delta_{jm} & (j, m=0, 1, \dots, N) \end{aligned} \quad \dots\dots(3)$$

で、 δ_{ik} 、 δ_{jm} はクロネッカーデルタを示す。

式(2)を式(1)に代入し、区間 $[x_0, x_2] \times [t_0, t_2]$ において積分し、シンプソンの公式を用いると、

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N a \phi(x_i, t_j) \{c_i''(x_0) + 4c_i''(x_1) + c_i''(x_2)\} \{c_j(t_0) + 4c_j(t_1) + c_j(t_2)\} \\ & - \sum_{i=0}^M \sum_{j=0}^N \phi(x_i, t_j) \{c_i(x_0) + c_i(x_1) + c_i(x_2)\} \{c_j'(t_0) + 4c_j'(t_1) + c_j'(t_2)\} = 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(4)$$

と変形される。

ここで、3次のスプラインの性質より、

$$\begin{aligned} \{c_i''(x_0) + 4c_i''(x_1) + c_i''(x_2)\} / 6 &= \{c_i(x_0) - 2c_i(x_1) + c_i(x_2)\} / (\Delta x)^2 \\ \{c_j'(t_0) + 4c_j'(t_1) + c_j'(t_2)\} / 6 &= \{c_j(t_2) - c_j(t_0)\} / (2 \Delta t) \end{aligned} \quad \dots\dots(5)$$

が得られるから、式(5)を式(4)に代入して、

$$F_0 = \text{SF 33} = \{\phi(x_0, t_2) + 4\phi(x_1, t_2) + \phi(x_2, t_2) - \phi(x_0, t_0) - 4\phi(x_1, t_0) - \phi(x_2, t_0)\} \div 2 \{\phi(x_0, t_2)$$

$$\begin{aligned}
 & -2\phi(x_1, t_2) + \phi(x_2, t_2) + 4\phi(x_0, t_1) - 8\phi(x_1, t_1) + 4\phi(x_2, t_1) + \phi(x_0, t_0) - 2\phi(x_1, t_0) + \phi(x_2, t_0) \\
 \equiv & \begin{Bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{matrix} / 2 \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} t_2 \\ t_1 \\ t_0 \end{matrix} \quad \dots\dots(6) \\
 & \begin{matrix} x_0 & x_1 & x_2 & & x_0 & x_1 & x_2 \end{matrix}
 \end{aligned}$$

が得られる。ここで、 F_0 はフーリエ数で $F_0 = a\Delta t / (\Delta t)^2$ を示し、 $\{ \}$ は、 $\sum_{i=0}^2 \sum_{j=0}^2 \alpha_{ij} \phi(x_i, t_j)$ (α_{ij} は係数) を表示するものとする(以下、同様)。

2.2 差分法による同定式(FD 32)の概要⁴⁾

Crank-Nicolson 法を用いた差分法による同定式は、次式で示される。

$$F_0 = \text{FD 32} \equiv 2 \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix} / \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(7)$$

2.3 数値補間法による同定式(ISF 33)の概要⁹⁾

式(6)を Δx 移動して、次式を得る。

$$F_0 = \text{SF 53} \equiv \begin{Bmatrix} 1 & 6 & 10 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -6 & -10 & -6 & -1 \end{Bmatrix} / 2 \begin{Bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -8 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(8)$$

また、端条件に P-スプラインを用いた場合、数値補間すること、

$$\begin{aligned}
 \phi(x_1, t) &= \frac{1}{8} \{ 3\phi(x_0, t) + 6\phi(x_2, t) - \phi(x_4, t) \} \\
 \phi(x_3, t) &= \frac{1}{8} \{ -\phi(x_0, t) + 6\phi(x_2, t) + 3\phi(x_4, t) \}
 \end{aligned} \quad \dots\dots(9)$$

が得られる。式(9)を式(7)に代入し、 $2\Delta x \equiv \Delta X$ とすると、

$$F_0 = \text{ISF 33} \equiv \begin{Bmatrix} 5 & 38 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -38 & -5 \end{Bmatrix} / 16 \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(10)$$

が得られる。

2.4 ニュートン・コーツ積分法による同定式(NC 54)の概要⁵⁾

シンプソンの公式より、ある y の関係 $f(y)$ の近似積分は、

$$\int_{y_0}^{y_2} f(y) dy \approx \frac{\Delta y}{3} \{ f(y_0) + 4f(y_1) + f(y_2) \} \quad \dots\dots(11)$$

で示される。式(11)を式(6)に代入すると次の積分方程式が得られる。

$$F_0 = \frac{\frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_2} \{ \phi(x, t_2) - \phi(x, t_0) \} dx}{\frac{2}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_2} \{ \phi(x_0, t) - 2\phi(x_1, t) + \phi(x_2, t) \} dt} \quad \dots\dots(12)$$

一方、ニュートン・コーツ積分法の公式より、式(11)と同様に、ある y の関係 $f(y)$ の近似積分は、

$$\int_{y_0}^{y_2} f(y) dy \approx \frac{3\Delta y}{8} \{ f(y_0) + 3f(y_1) + 3f(y_2) + f(y_3) \} \quad \dots\dots(13)$$

で示される。式(13)を式(12)に代入すると、

$$F_0 = \text{NC 54} \equiv \begin{Bmatrix} \Delta t \\ \Delta t \\ \Delta t \\ \Delta t \\ -1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \end{Bmatrix} / \begin{Bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{matrix} \Delta t \\ \Delta t \\ \Delta t \\ \Delta t \\ \Delta t \\ \Delta t \\ \Delta t \end{matrix} \quad \dots\dots(14)$$

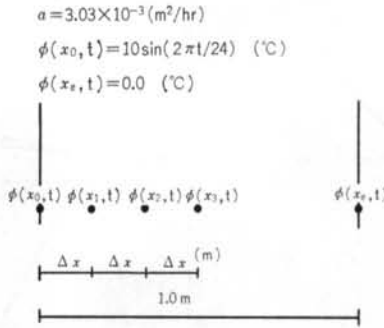


図-1 仮定したモデル

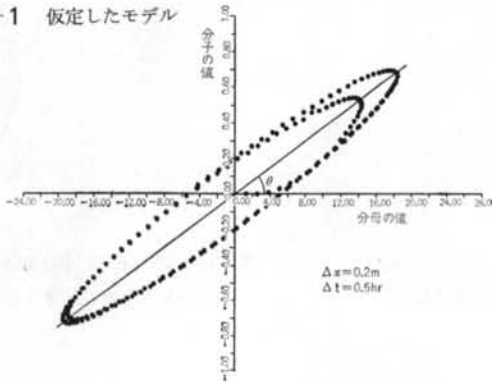


図-2 差分法による固定式 (FD 32) の分母, 分子の値と傾き θ

が得られる。

§ 3. 数値実験結果

温度伝導率の同定領域および精度等を比較検討するために、仮定したモデル(図-1)の厳密解の温度 (10^{-4} まで採用) を入力温度データとして数値実験を行なった。

時間方向のサンプリング区間を $0 \sim 60$ hr とし、最小時間刻み Δt を 0.25 hr とした。

個々に同定されたフーリエ数 ($F_0 = a\Delta t / (\Delta x)^2$) は、図-2 に示されるように、あるばらつきを持っているため同定されるフーリエ数 F_0 を、同定式の分子、分母の値の分散、共分散 V_{11} , V_{22} , V_{12} を用いて主成分分析法⁸⁾ により求めた。

すなわち、 $\tan 2\theta = 2V_{12} / (V_{11} - V_{22})$ で、 $\tan \theta = F_0 = a\Delta t / (\Delta x)^2$ となる。

また、同定誤差 ε を、 $\varepsilon = (F_s - F_0) / F_s \times 100.0(\%)$ とした。

ここで、 F_s は理論フーリエ数、 F_0 は同定されたフーリエ数である。また、寄与率は、分散、共分散行列によるものである。

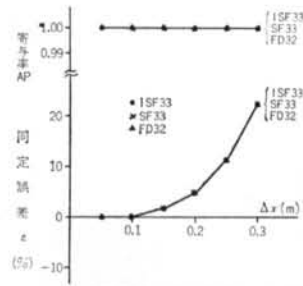


図-3 ISF 33, SF 33, FD 32 の空間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta t = 0.5$ hr)

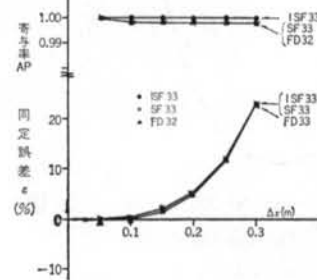


図-4 ISF 33, SF 33, FD 32 の空間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta t = 2.0$ hr)

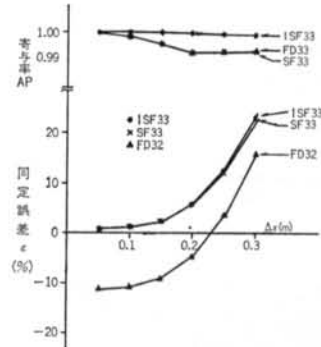


図-5 ISF 33, SF 33, FD 32 の空間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta t = 4.0$ hr)

3.1 差分法, スプライン関数法, 数値補間法による同定式 (FD 32, SF 33, ISF 33) の同定領域の比較結果

図-3 ~ 図-6 に、時間刻み $\Delta t = 0.5, 2.0, 4.0, 8.0$ hr での空間刻み Δx と、同定誤差 $\varepsilon(\%)$ 、および寄与率 $AP(-)$ との関係を示す。

また、図-7 ~ 図-9 に空間刻み $\Delta x = 0.1, 0.2, 0.3$ m での時間刻み Δt と、同定誤差 $\varepsilon(\%)$ 、および寄与率 $AP(-)$ との関係を示す。

(1) 図-3 ~ 図-9 より、時間刻み $\Delta t = 2.0$ hr 以内、空

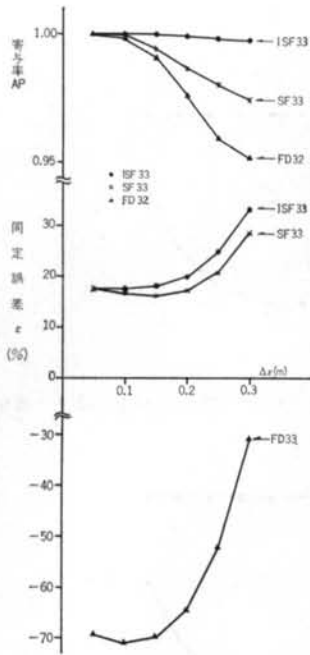


図-6 ISF 33, SF 33, FD 32 の空間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta t=8.0\text{hr}$)

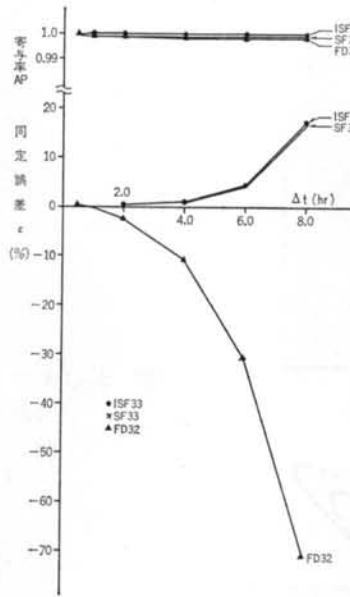


図-7 ISF 33, SF 33, FD 32 の時間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta x=0.1\text{m}$)

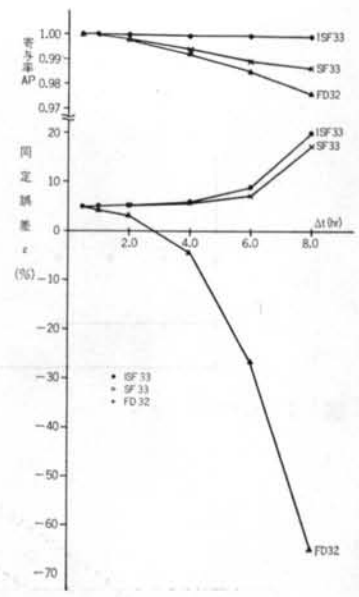


図-8 ISF 33, SF 33, FD 32 の時間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta x=0.2\text{m}$)

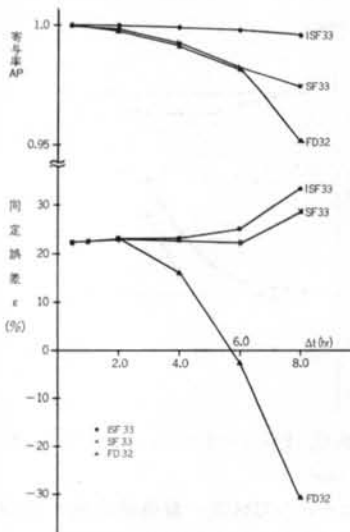


図-9 ISF 33, SF 33, FD 32 の時間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta x=0.3\text{m}$)

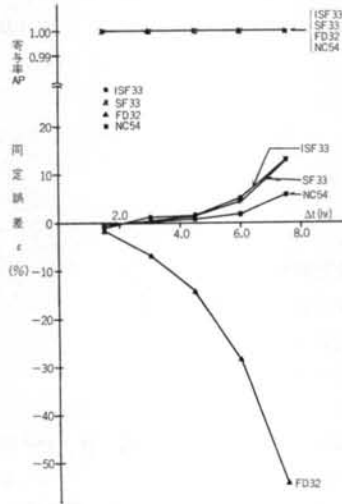


図-10 NC 54, ISF 33, SF 33, FD 32 の時間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta x=0.03\text{m}$)

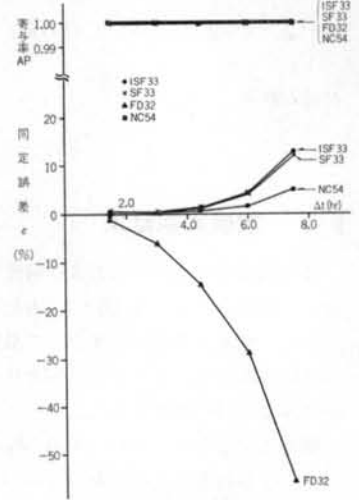


図-11 NC 54, ISF 33, SF 33, FD 32 の時間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta x=0.09\text{m}$)

間刻み $\Delta x=0.15\text{m}$ 以内で差分法による同定式 (FD 32) の同定誤差が $\pm 2.5\%$ 以内、スプライン法、および数値補間法による同定式 (SF 33, ISF 33) の同定誤差が $\pm 1.5\%$ 以内の精度で同定されることが分かった。

(2) また、時間刻み Δt が大きくなるに従い、同定誤差

が大きくなる傾向があり、差分法による同定式 (FD 32) の同定誤差が特に増大する傾向がみられる。

(3) スプライン関数法による同定式 (SF 33) と、数値補間法による同定式 (ISF 33) の同定誤差は、おおよそ同程度であることが分かる。

(4)寄与率 $AP(-)$ は主成分方向まわりのばらつきを示していると考えられるが、ISF 33 が時間、空間刻みの大きいところでの低下が一番小さく、次に SF 33, FD 32 の順となっている。

3.2 ニュートン・コーツ積分法による同定式 (NC 54) と他の同定式 (FD 32, SF 33, ISF 33) の同定領域の比較結果

図-10~図-12 に空間刻み $\Delta x=0.03, 0.09, 0.15$ m での時間刻み Δt と、同定誤差 $\epsilon(\%)$ 、および寄与率 $AP(-)$ との関係を示す。

(1)図-10~図-12より、ニュートン・コーツ積分法による同定式 (NC 54) の同定誤差が、特に時間、空間刻みの大きい領域で小さいことが認められた。

(2)また、寄与率 $AP(-)$ は NC 54 の方が、数値補間法による同定式 (ISF 33) より時間刻みの大きい領域で低下が大きい結果となっている。

§ 4. 考察

数値実験結果から、これらの離散化近似式を用いて、時間刻み、空間刻みの小さな領域で精度良く同定できることが分かった。

したがって、原位置での温度伝導率の同定法として、これらの離散化近似式による同定が可能であると考察される。

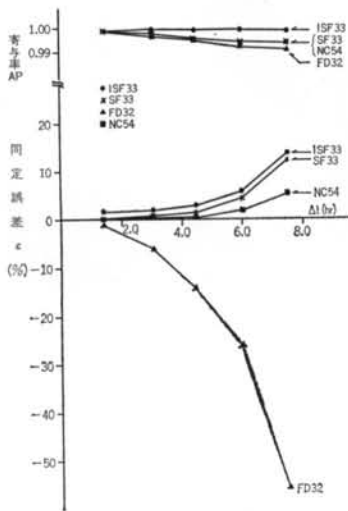


図-12 NC 54, ISF 33, SF 33, FD 32 の時間方向の固定誤差と寄与率 ($\Delta x=0.15$ m)

また、温度伝導率の同定法として、時間、空間刻みの広い同定領域に適用できるということは、原位置での温度センサを設置する位置の自由度が増すことであり、広い同定領域に適用できる同定式を得ることが本研究の目的のひとつである。

したがって、数値実験結果から、時間刻み、空間刻みの広い領域に適用できる温度伝導率の同定法としてニュートン・コーツ積分法による同定式を用いることが適しており、また精度の点からは数値補間法による同定式が適していることが分かった。

数値実験に用いた上記の同定式のうち、ニュートン・コーツ積分法、スプライン関数法、差分法による同定式の適用範囲は近似次数の違いによるものと考えられる。

また、数値補間法による同定式は、空間方向に5点の温度サンプル点を用いる同定式 (SF 53) が基本となっているが、この SF 53 は SF 33 に比べ、 $\Delta x/2$ の空間刻みに相当している。

数値実験より、空間刻みが小さな領域で良い精度が得られており、この理由により数値補間法による同定式の方が良い精度が得られたものと考察される。

一方、ニュートン・コーツ積分法による同定式は、空間方向に5点の温度サンプル点が必要とされ、他の同定式、例えば数値補間法による同定式が3点の温度サンプル点で良いのに比較して、不利な条件であると考えられる。

§ 5. 結論

原位置での温度伝導率の同定法として、離散化近似式による同定が可能であることが数値実験より得られた。

また、ニュートン・コーツ積分法による同定式は、空間方向に5点の温度サンプル点が必要とされるが、広い領域に適用できるので温度伝導率の同定式として適している。

また、空間方向に3点の温度サンプル点を用いる同定式として、数値補間法による同定式が、スプライン関数法、差分法による同定式より温度伝導率の同定に用いる同定式として適している。

§ 6. 今後の課題

本研究では、いくつかの1次元方向温度伝導率の同定式について検討を行なった。

今後の課題として、多次元方向温度伝導率の同定式の確立、および実際の温度伝導率の同定精度等の検討があげられる。

謝辞 この研究に当たり、ご指導をいただいた片山教授（東工大）、および数値実験に協力していただいた河野君、三嶋君、加藤嬢に謝意を表します。

<参考文献>

- 1) 羽根：“重回帰分析法による温度伝導率の算定” 日本建築学会秋季大会（近畿）（昭和55年9月）
- 2) T. Hane “A Method for the Multidimensional Thermal Diffusivity Measurement by Means of the Variational Approximate Method and Multiple Linear Regression Analysis” Proceedings of 1st Japan Symposium on Thermophysical Properties (1980)
- 3) 羽根：“変分法および重回帰分析法による多次元方向の温度伝導率の算定” 清水建設研究所報 第34号（1981）
- 4) 羽根：“実構造体に於ける多次元方向温度伝導率のシステム同定（その1）” 日本建築学会論文報告集（投稿中）
- 5) 羽根：“同上（その2）”（投稿中）
- 6) 羽根：“同上（その3）”（投稿中）
- 7) 羽根：“同上（その4）”（投稿中）
- 8) 奥野他：“多変量解析法” 日科技連