

固体内弾性波の数値実験（その1）

齊藤 鉄夫
藤盛 紀明

§ 1. はじめに

鋼構造物の信頼性を規定する大きな要素に、その接合部の健全性があげられる。鋼構造物の接合法としては溶接が多く用いられ、その健全性の確認は超音波探傷試験による場合がほとんどである。特に、RC構造物の鉄筋圧接部や建築鉄骨溶接部の検査に超音波探傷法は急速に普及しつつある。

超音波探傷の理論には、大別して音波理論と弾性波理論とがある。前者は空気中または水中の音波の理論を固体中の弾性波にも拡張して適用するものであり、現在までの理論の主流となっている。この音波理論は、現象を大まかに説明したり、また縦波と横波が混在しない場合の現象を説明するには十分有力である。弾性波理論は、本来超音波が固体内の弾性波であるので、超音波を弾性波として扱おうとするものである。鋼中の超音波の挙動を音波理論で説明しようとしても説明できないこともあり、音波理論の適用限界も明らかでない。特に、現象の細部を詳細に説明し、現象の生起の原因の解明を音波理論で試みようとするのが困難なことが多い。このような場合には弾性波理論が必要となる。しかし、固体中では縦波・横波の2種類の波が存在するため、理論的解明が困難で未解決の問題も多い。また、音波理論であれ弾性波理論であれ、その解析には連続平面波が用いられることが多い。しかし、実際の現象はある限定された広がりを持つパルス状の弾性波の挙動であるので、理論が実際の現象を説明できない場合もある。

本研究は、上記のような状況を踏まえて、固体内弾性波の挙動を弾性論の立場で、またパルス波の挙動として解明しようとするものである。その手段として、差分法による数値計算（シミュレーション）手法を用いる。本研究によって得られる成果として、以下の事柄が考えられる。

- ①従来の音波理論で説明することのできなかった現象の説明が可能となる（例：クラック先端による反射

やモード変換、クラック表面の表面波など）。

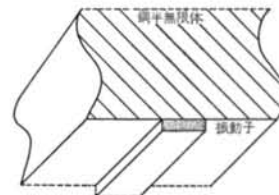
- ②種々の反射波の、生成メカニズムを知ることができる。
③反射パターンの全体像を見ることができるので、新しい探傷技術開発のシーズとなりうる。
④計算結果をアニメーション化することにより、超音波の輻射、反射、回折の様子を、時間軸、空間軸を拡大してみることができる。これは、超音波の概念を把握させるための超音波探傷技術者教育に役立たせることができる。
⑤各点の各時刻における物理量を容易に知ることができる。通常の実験や解析では、これは非常に困難である。

以上が、本研究の超音波探傷研究における位置付け、意義である。

研究の第一ステップとして、半無限体の鋼の表面に垂直応力を加えて超音波を発生させたときの縦波、横波、表面波の生成、および剛体リボンによる反射の問題について数値実験を行ない、計算結果を映画化した。本報では、本計算結果と映画観察の結果から得られた種々の波の生成原因、また従来の音波理論では説明できなかった現象の解明等を紹介する。

§ 2. 基礎方程式と差分近似

図一1に示すように、上方に広がる鋼の半無限体の表面（下面）に一定幅、無限長の帯状音源が存在し、その



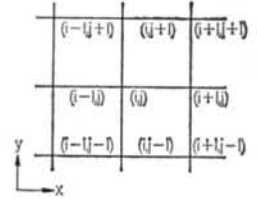
図一1 上方に広がる半無限体の表面にある帯状振動子

帯状音源から鋼表面に対し垂直応力が正弦波状に周期的に負荷されるとき、各時刻における鋼中各点の変位を求めたい。

均質、かつ等方的な弾性体内の運動方程式は、変位ベクトルを \mathbf{u} とすると次のように表現することができる。

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = (\lambda + 2\mu) \text{grad}(\text{div } \mathbf{u}) + \text{rot rot } \mathbf{u} \quad \dots\dots(1)$$

ここで、 ρ : 弾性体の密度
 λ, μ : ラーメの弾性定数



図一において、音源の中心線上の点を原点 0 にとり、音源の中心線を z 軸、半無限体の表面に垂直な軸を y 軸、半無限体の表面上にあり、 y, z 両軸に垂直な軸を x 軸とすると、問題は x, y の 2 つの軸で表現することができる 2 次元問題となる。 x 方向、 y 方向の各点の変位を (u, v) とすると、式(1)は次のように書き直すことができる。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{aligned} \right\} \dots\dots(2)$$

表面 ($y=0$) における境界条件は、音源の幅を $2a$ とすると、次のように表現できる。ここで、応力 T_{ij} とは、 j 軸に垂直な面が受ける i 軸方向の応力であるとする。

$$\left. \begin{aligned} T_{yy} &= \lambda \frac{\partial u}{\partial x} + (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (|x| > a) \\ &= A \sin \omega t & (|x| \leq a) \\ T_{xy} &= \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots(3)$$

(A は定数)

これらの偏微分方程式、境界条件を中心差分による差分方程式に置換する (図一 2 参照)。 $x-y$ 平面を、幅 h の正方形メッシュで表現し、時間的メッシュ幅を h とすると式(2)、式(3)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y, t+k) &= 2u(x, y, t) - u(x, y, t-k) + \left(\frac{\alpha k}{h}\right)^2 \{u(x+h, y, t) - 2u(x, y, t) + u(x-h, y, t)\} \\ &\quad + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \left(\frac{k}{h}\right)^2 \{v(x+h, y+h, t) - v(x+h, y-h, t) - v(x-h, y+h, t) \\ &\quad + v(x-h, y-h, t)\} + \left(\frac{\beta k}{h}\right)^2 \{u(x, y+h, t) - 2u(x, y, t) + u(x, y-h, t)\} \\ v(x, y, t+k) &= 2v(x, y, t) - v(x, y, t-k) + \left(\frac{\beta k}{h}\right)^2 \{v(x+h, y, t) - 2v(x, y, t) + v(x-h, y, t)\} \\ &\quad + \frac{(\alpha^2 - \beta^2)}{4} \left(\frac{k}{h}\right)^2 \{u(x+h, y+h, t) - u(x+h, y-h, t) - u(x-h, y+h, t) \\ &\quad + v(x-h, y-h, t)\} + \left(\frac{\alpha k}{h}\right)^2 \{v(x, y+h, t) - 2v(x, y, t) + v(x, y-h, t)\} \end{aligned} \right\} \dots\dots(4)$$

$$\left. \begin{aligned} (\alpha^2 - \beta^2) \frac{\{u(x+h, 0, t) - u(x-h, 0, t)\}}{2h} + \alpha^2 \frac{\{v(x, h, t) - v(x, -h, t)\}}{2h} &= 0 & (|x| > a) \\ &= \sin \omega t & (|x| \leq a) \end{aligned} \right\} \dots\dots(5)$$

$$\frac{\{u(x, h, t) - u(x, -h, t)\}}{2h} + \frac{\{v(x+h, 0, t) - v(x-h, 0, t)\}}{2h} = 0$$

ただし、 $\alpha^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}$, $\beta^2 = \frac{\mu}{\rho}$

式(4), 式(5)は時刻 $(t-k)$, t における状態が定まっていれば, 時刻 $(t+k)$ の状態を知ることができることを示している。

したがって, $t=0, k$ のとき, $u=0, v=0$ とすると, $t=2k$ における $u(t)$, $v(t)$ の値は式(4), 式(5)から求めることができ, 同様にして時刻 $t=3k, 4k, \dots, nk$, \dots の各点の変位量 $u(t)$, $v(t)$ を求めることができる。

このとき, $x=0$ の点の変位ベクトルの算出には, 問題の y 軸に関する対称性から得られる次式を用いる。

$$\left. \begin{aligned} u(-h, y, t) &= -u(h, y, t) \\ v(-h, y, t) &= v(h, y, t) \end{aligned} \right\} \dots\dots(6)$$

時間メッシュ幅と空間メッシュ幅 h の比は, 差分法の安定条件から次のように定めることができる。

$$\frac{h^2}{k^2} \leq v_L^2 \left(1 + \frac{v_T^2}{v_L^2} \right) \dots\dots(7)$$

§ 3. 本手法の適用例

3.1 計算条件および計算モデル

計算は, 次の5つのケースについて行なう。ここで, t は時間を表わす。

- (a) $t \geq 0$ において連続的に応力負荷
- (b) $t = 0$ から1周期分のみ応力負荷
- (c) $t = 0$ から4周期分のみ応力負荷
- (d)(b)と同様で, 音源の正面に剛体リボンが音源と平行に存在する場合
- (e)(b)と同様で, 音源の正面に剛体リボンが音源と直角に存在する場合

計算モデルを図-3に示す。上方に広がる半無限体を幅 h の正方形メッシュで表現し, 表面上に音源が置かれている。このときの各格子点の各時刻における変位 u , v を求める。ここで音源の幅 $2a = 17h$ とし, 負荷応力の周期は図-4に示すように $12k$ とする。したがって, 式(3)の応力負荷の角速度 ω は,

$$\omega = \frac{\pi}{6k} \dots\dots(8)$$

となる。

弾性体は鋼とする。計算に用いる弾性定数を表-1に示す。これは, 音源の応力負荷周波数を $1 \text{ MHz} (10^6 \text{ Hz})$ とすると, 時間メッシュ幅 $k = 83 \text{ nsec} (8.3 \times 10^{-8} \text{ sec})$, 空間メッシュ幅 $h = 0.57 \text{ mm}$, 音源の幅 $2a = 9.61 \text{ mm}$ という値となる。

計算は, 各ケースとも $133k$ (応力負荷の11周期分)

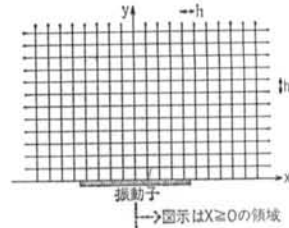


図-3 計算格子点と空間メッシュ幅

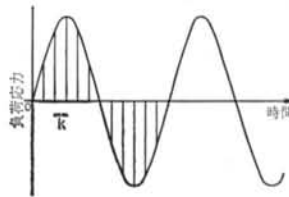


図-4 時間メッシュと応力負荷曲線(正弦波)

材質	λ	μ
鋼	1.1×10^{12}	8.2×10^{11}

(dyn/cm²)

表-1 計算に用いた弾性定数

まで行なう。これは, 応力負荷周波数を 1 MHz とすると, 超音波が鋼中を約 66 mm 進んだ時間になり, 音源付近の弾性波発生状況を観察するには十分である。

算出された各点の変位ベクトルは, 各時刻ごとに各点の静止位置を起点とするベクトル表示で表現し, 全体の様子を把握できるようにする。このとき, 全体は y 軸に関して対称であるので, 図形表示は $x \geq 0$ の部分のみとする。

3.2 計算結果

3.2.1 $t \geq 0$ において連続的に正弦波応力を負荷した場合

半無限体上にある音源から, 半無限体に対して $t \geq 0$ において連続的に正弦波状の応力を負荷した場合の $t = 122k$ (応力負荷が約10周期終了した時点) における各点の変位ベクトルを図-5に示す。図の左端の C.L. は y 軸を示し, 下端は半無限体の表面を示す。また, 左下の "SOURCE" は音源の位置を表わしている。

y 軸近辺の y 軸に平行なベクトルは, 上方に伝わる縦波を表わしている(L)。右斜めの上方には, 各点の変位方向が波の進行方向と直角な横波が発生している(TM)。

横波の生成メカニズムは以下のように観察できる。 $t = 0$ から $t = 6k$ の間は, 音源から応力が y 方向に加わり, y の正方向の変位が生ずるが, $t = 7k$ から $t = 12k$ までは負の応力が働き y の負の方向に向う変位が生ず

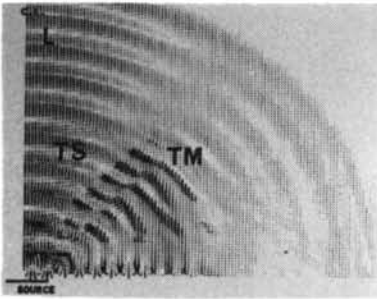


図-5 連続的に正弦波状応力を負荷した場合のベクトル図

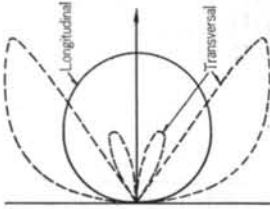


図-6 音源が小さい場合の指向性図¹⁾

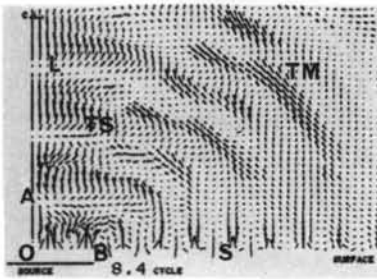


図-7 連続的に応力負荷した場合の音源付近の拡大ベクトル図

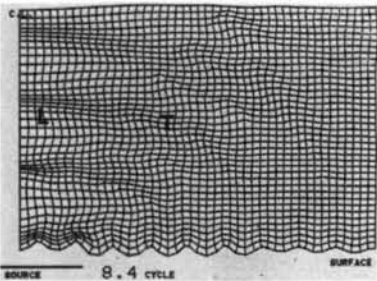


図-8 図-7の計算結果の格子図表示

る。このとき音源の端部では x の負の方向に向かう変位が生じて、端部を中心とする弧状のベクトル群となり、これが発達して横波となる。

横波の伝播速度は縦波のその0.55倍なので、後から発生した縦波ベクトルが追い着いて横波ベクトルに重なると横波が一見見えなくなり、縦波の変位が通りすぎると横波の変位が顕著になるので、横波が発生したり、消滅したりするかのよう観察される。

縦波は中心線近辺において特に顕著であるが(L),

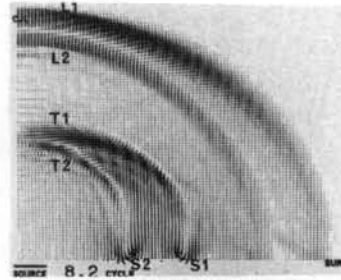


図-9 1周期分の正弦波応力を負荷したときのベクトル図

中心線と 40° 以上の角度をなす部分にも縦波が進行する。また、横波もその主部(TM)の他に、より中心線に近い領域にサイドローブ(TS)を観察することができる。これらの結果はクラウトクレマ¹⁾による音源幅が小さい場合の理論解析結果(図-6)とよく一致している。

図-7は、音源部分の拡大図である。音源端部上方に弧状のベクトル群が生じ、そのベクトル群が横波の発生源となっていること、およびそのベクトル群が表面と接する部分で表面波が発生していることが観察できる。

音源に近い点の運動(三角形AOB内)は楕円運動となっている。これはサイドローブ領域における縦波と横波の相互作用に起因するものと考えられる。

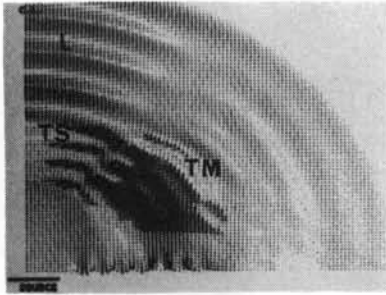
表面の各点はいずれも楕円運動を行なっている。楕円運動の長軸と短軸の比は Miller & Pursey の理論では約1.7であるが、本計算結果では約2となっている。

図-8は、図-7で表わされたベクトル表示を格子図表示したものである。音源から y の正方向に応力が加わると弾性体は圧縮され、次に負の応力を受けて引き伸ばされる。この過程が繰り返され、圧縮された部分と引き伸ばされた部分を持つ縦波が中心線に沿って進行する。音源端部では圧縮引張を受ける部分と受けない部分が隣り合わせに存在しているので、強い「ずれ」が生じ、この変形が横波となって斜め上方に進行する。

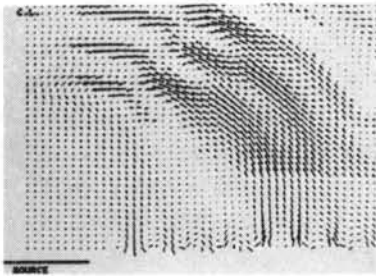
また、このずれ変形の部分が表面と接する位置で表面波が発生する。表面波の変形は、伸縮変形とずれ変形の混在した非常に複雑な変形であることが観察できる。このように計算結果の格子図表示は、弾性波を弾性体の変形の伝播であると捉えて、その進行を定性的に把握するのに適した表示方法である。

3.2.2 $t=0$ から正弦波応力を1周期分だけ負荷した場合

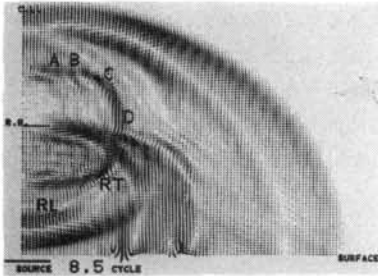
図-9は、音源から正弦波状の垂直応力を1周期のみパルス的に負荷した場合の $n=85k$ におけるベクトル図である。この場合、縦波が1波(1周期)だけ生じ伝播して行き、すぐあとに弧状のベクトルの列が生じて横



図一10 4周期分の正弦波応力を負荷したときのベクトル図



図一11 4周期分の正弦波応力を加えたときの音源付近の拡大ベクトル図



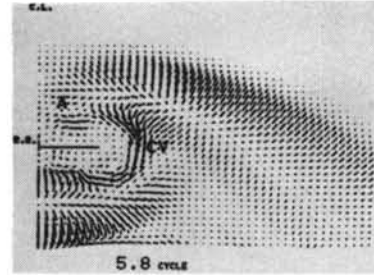
図一12 音源に平行に剛体リボンが存在する場合の縦波の反射

波、表面波に成長する。前節のように連続的に応力を負荷した場合には、縦波と横波の分離はそれほど明確ではないが、1周期分だけ応力負荷した場合は2者ははっきり分離し、それぞれの挙動を明確に認識することができる。ここで詳細に観察すると、縦波、横波、表面波ともに2つの成分からなっている。この2つの成分は、それぞれ音源の両端部を中心に伝播するかのように見える。この現象は、音波理論では説明することはできない。

Sachse²⁾らは、光弾性実験においてはこの現象を発見したと報告しているが、本数値実験においてもこの現象を明確に再現している。

3.2.3 $t = 0$ から正弦波応力を4周期分だけ負荷した場合

図一10は、音源から垂直応力を4周期分だけ負荷した場合の $t = 100k$ におけるベクトル図である。当然であ



図一13 剛体リボンに縦波が入射したときの端部の円形ベクトル群

るが、 $t = 48k$ (応力負荷4周期)までは連続的に正弦波応力を負荷した場合と同様な動きである。その後は、前節の1周期分だけの応力負荷の場合に類似してくる。音源端部周辺に生じる弧状のベクトル群が原因となり、横波・表面波が形成される。

縦波は中心線近辺を縦波速度で進行し、その後に横波が残され、その主部 TM や中心線近辺にサイドローブ TS を明確に見ることができる。

図一11は、音源付近の拡大ベクトル図である。

3.2.4 音源の正面に音源と平行に置かれた剛体リボンによる縦波の反射

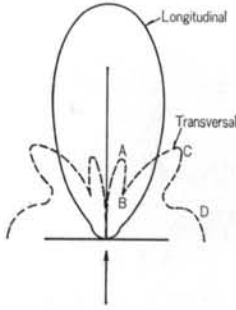
半無限体と音源に関する条件はこれまでの計算と同一であるが、音源から $45h$ 離れた位置 ($y = 45h$) に幅 $17h$ の帯状の剛体リボンが音源と平行に存在する場合の伝播・反射について計算を行なった。剛体リボンの位置は、

$$\left. \begin{aligned} y &= 45h \\ -8.5h &\leq x \leq 8.5h \end{aligned} \right\} \dots (9)$$

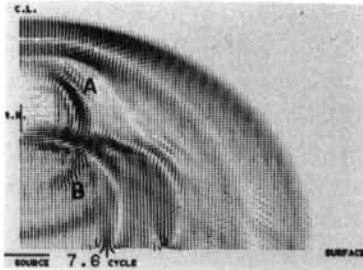
で表わされる。剛体リボン上での変位は強制的に $u = v = 0$ とされる。音源からの正弦波状応力の負荷は $t = 0$ から1周期分だけ行なう。

図一12は、 $t = 102k$ におけるベクトル図である。図中の R.R. と表示された線分が剛体リボンである。正弦波状の垂直応力を1周期分だけ加えると、縦波が剛体リボンに近付くまでは3.2.2の場合と同様である。 y の正方向の変位をもつ縦波が中心線に沿って進み、 x の負方向に変位をもつ横波が縦波の約半分速度で進む。そして、縦波が剛体リボンに到着すると、剛体リボンの面上で変位を0とするように y の負方向の成分を持つ波が反射される。この変位ベクトルは、縦波となって中心線に沿って音源の方向に進む (RL)。

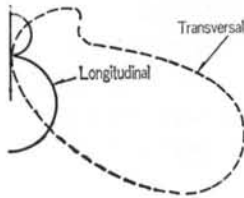
この反射の後、剛体リボン端部に y の負方向の成分を持つ変位が生じ、剛体リボン端部に円形ベクトル群 CV として成長し (図一13)、横波 C、D となる。他方、入



図一14 剛体リボンに縦波が垂直入射したときの反射パターン³⁾



図一15 音源に垂直に剛体リボンが存在する場合の縦波の反射



図一16 剛体リボンに縦波が平行入射した場合の反射パターン³⁾

射した縦波はリボンの後部に回折してまわり込む。この波は x の負方向の成分を持っているので、リボンの後面の変位を0とするように、 x の正方向成分を持つ反射ベクトルが生じ、成長して横波Aとなる。また、AとCの間にベクトルの絶対値が最小となる点が存在し、それをBとすると、横波ベクトル群A, B, C, Dのベクトルの絶対値の比は0.8:0.6:1.2:1.0となる。この値は春海³⁾らの連続波に対する解析値(図一14)とよく一致している。

計算結果を詳細に観察することにより、剛体リボンによる縦波の反射パターン、また x 方向に生成される反射横波の生成メカニズムを観察することができる。

3.2.5 音源の正面に音源に垂直に置かれた剛体リボンによる縦波の反射

中心線上($x=0$)に幅 $10h$ の剛体リボンが存在する場合の、縦波の伝播の変化や反射波の生成について計算を行なった。剛体リボンの位置は、

$$\left. \begin{aligned} x &= 0 \\ 40h &\leq y \leq 50h \end{aligned} \right\} \dots (10)$$

で表わされる。音源からの正弦波応力の負荷は $t=0$ から1周期分だけ行なう。

図一15は、 $t=94k$ におけるベクトル図である。音波理論によれば、このような条件下では反射波は存在しないが、計算結果には2つの反射波を明瞭に観察することができる。1つは、剛体リボンの先端における変位を0とするために生じた反射縦波で、中心線に沿って伝播する。この反射縦波の変位は、入射縦波のその約1/30である。

剛体リボンの面方向には横波が反射される。この横波の発生メカニズムは、 y の正方向の成分をもった入射縦波がリボンの横を通過するとき、リボン面上の変位を0とするような y の負方向の成分をもったベクトル群が生成される。このベクトル群は y 方向に広がりを持ち、 x 方向に進むので、剛体リボン面の法線方向に進む横波となる。

図一16は、弾性体の連続波理論で得られた反射波の指向性図である³⁾。パルス状の波として計算された本結果と直接比較することはできないが、概略一致しているといえることができる。

本計算によって、その反射波の生成メカニズムが明らかにされたことになる。

§ 4. まとめ

本報告ではこれまでの超音波探傷研究の現状を述べ、これまで説明のつかなかった現象の解明および新探傷技術のシーズの開発のために、超音波を固体内弾性波として捉え研究することの重要性を述べた。そして、その一手段として差分法による数値解析手法を提案し、第一ステップとして最も基本的な5つの問題についてその手法を適用し、解を得た。

その解は、すでに連続波の理論解析等から解が得られている問題については、両者でよい一致を示した。これは本手段の妥当性を示していると考えられる。そして、解が得られていても、どのようなメカニズムでその現象が生起されるのかという点で不明であったものについて解釈を与えることができた。

また、実際の探傷に用いられる超音波はパルス波であるが、パルス状の波の生成・伝播・反射については解析的に解を得ることは非常に難しい。本手法をこのような

問題に適用し、1周期ないし4周期の弾性波の生成・伝播・剛体リボンによる反射等の現象の原因・過程を詳しく観察することができた。

本計算結果から明らかになった点を列挙する。

- 1) 垂直振動子からの横波発生メカニズム
- 2) 近距離音場で横波が明瞭でない理由
- 3) ワイドバンドパルスの場合の2種の縦波、2種の横波の発生メカニズム
- 4) 剛体リボンに縦波が垂直入射したときの横波発生メカニズムと、解析的に得られている反射指向性

図の物理的意味

- 5) 剛体リボンに縦波が平行入射したときの反射波発生メカニズム

本計算結果は16mmの映画に編集し、研究用として、また社団法人日本非破壊検査協会における超音波探傷技術者の教育用として利用されている。

今後も超音波の生成・反射に関わる基本的な問題に本手法を適用し、研究を進めたいと考えている。

最後に、本研究を遂行するに当たりご指導頂いた、群馬大学春海教授に深い感謝の意を表します。

〈参考文献〉

- 1) Krautkramer: "Ultrasonic Testing of Materials" Springer (1977)
- 2) W. Sachse, et al.: Ultrasonic Symp., IEEE, 1978, Cat. 78 CH 1344-ISU
- 3) K. Harumi, F. Suzuki & Y. Sato: J. Acous. Soc. Amer., 53 (1973) pp. 660-664

