

原位置での多次元方向温度伝導率の同定法（その2）

羽 根 義

§ 1. はじめに

本研究の一連の目的は、従来のように数センチメートル程度の成型した小試験片を用いる同定法ではなく、原位置、かつ大域での温度伝導率を同定する方法を確立することである。

原位置での同定を行なおうとするとき、その初期温度分布条件、および境界条件に制限を与えることは殆んど困難であり、また同定法として簡便さが要求される。

したがって、原位置での温度伝導率の同定法として、従来のように熱伝導方程式の厳密解の式に対応させた複雑な同定法には難があり、離散化近似式に基づいた同定

法が有効であろうと考えられる。

前報告論文では、スプライン法、Crank-Nicolson 法による差分法、数値補間法、Newton-Cotes 法等を応用した離散系による温度伝導率の同定法を提案した。

一般に、離散系による解法、あるいは同定式は熱伝導方程式の必要十分条件を満たさず、これらの同定式の同定領域、適用条件等を明確にする必要がある。

本報告では、これらの同定式を用いる場合の同定領域について検討を行なう。また、Stirling の公式を応用して、空間に5点のサンプル点を用いる同定式を提案し、他の同定式と同定領域について比較検討を行なう。

§ 2. 温度伝導率の同定式の概要

2.1 空間方向に3点の温度サンプル点を用いる同定式

前報告論文に示されるように、端条件にP-スプラインを用いたスプライン関数を応用した同定式 SF 33, Crank-Nicolson 法を用いた差分同定式 FD 33, SF 33 をもとに空間方向に数値補間を用いて合成した同定式 ISF 33 は、それぞれ次式となる。

$$\text{SF 33} = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \begin{Bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{Bmatrix} / \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(1)$$

$$\text{FD 33} = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = 2 \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix} / \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(2)$$

ただし、FD 33 は他の同定式の同一の温度サンプル値を用いるように、FD 32 を時間方向に合成したものである。

$$\text{ISF 33} = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \begin{Bmatrix} 5 & 38 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -38 & -5 \end{Bmatrix} / \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \quad \dots\dots(3)$$

ここで、 a は温度伝導率、 Δt , Δx は時間刻み、空間刻みである。また、 $\{ \}$ 内の係数は、前報告論文と同様に、温度サンプル値の積和する係数を示している。

2.2 空間方向に5点の温度サンプル点を用いる同定式

Newton-Cotes 積分法を用いた同定式 NC 54 は、次式で示される。

$$\text{NC 54} = \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & 0 & -3 & 0 & -1 \end{array} \right\} / 2 \left\{ \begin{array}{cccccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -6 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right\} \begin{array}{c} \uparrow \Delta t \\ \downarrow \\ \uparrow \Delta t \\ \downarrow \end{array} \begin{array}{c} \leftarrow \Delta x \rightarrow \\ \leftarrow \Delta x \rightarrow \end{array} \quad \dots\dots(4)$$

また、上述した同定式は、次式の積分方程式の数値積分式と考えられる⁸⁾。

$$a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{\frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^{x_2} \{\phi(x, t_2) - \phi(x, t_0)\} dx}{\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_2} \{\phi(x_0, t) - 2\phi(x_1, t) + \phi(x_2, t)\} dt} \quad \dots\dots(5)$$

一方、Stirling の積分公式は、次式で与えられる。

$$\int_{y_1}^{y_3} f(y) dy \approx \frac{\Delta y}{90} \{-f(y_0) + 34f(y_1) + 114f(y_2) + 34f(y_3) - f(y_4)\} \quad \dots\dots(6)$$

したがって、式(6)を式(5)に代入すると、Stirling の公式を応用した同定式 ST 55 が得られる。

$$\text{ST 55} = a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 34 & 114 & 34 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -34 & -114 & -34 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right\} / 2 \left\{ \begin{array}{ccccc} 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 34 & -68 & 34 & 0 \\ 0 & 114 & -228 & 114 & 0 \\ 0 & 34 & -68 & 34 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots(7)$$

§ 3. 数値実験結果

上述の同定式は離散化近似式に基づいているために、同定できる領域、およびその条件を求める必要がある。

したがって、表一に示される初期条件、境界条件での厳密解の温度 (10^{-4} の桁まで採用) をサンプル値として数値実験を行なった。

また、同定精度の評価方法として、分散・共分散行列による主成分分析法を用いた。ただし、第1主成分方向のばらつきを相関係数により評価を行なった。寄与率の変化より相関係数の変化の方が大きい結果が得られたためである。

		Parameter
基 礎 式	$\frac{\partial \phi}{\partial t} = a \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$	$a = 3.03 \times 10^{-8} (\text{m}^2/\text{hr})$ $a = 1.515 \times 10^{-3} (\text{m}^2/\text{hr})$ $a = 3.03 \times 10^{-4} (\text{m}^2/\text{hr})$
初 期 条 件	$\phi(x, t_0) = 0, 0(\text{℃})$	
境 界 条 件	$\phi_{0,t} = \phi(x_0, t) = 10 \sin \omega t (\text{℃})$ $\phi_{2,t} = \phi(x=1.0\text{m}, t) = 0, 0(\text{℃})$	$\omega = \frac{2\pi}{24}$ $\omega = \frac{2\pi}{12}$

表一 サンプル値として用いる温度の厳密解の条件

3.1 FD 33 の同定領域

図一～図五にサンプル温度値として用いる厳密解のパラメータを変えたときの FD 33 の同定領域を示す。

図中のハッチング部分は、同定誤差 $|\varepsilon| < 1.0\%$ 、かつ相関係数 $r = 1.0$ の領域である。

また、 $F = 1.0$ はフーリエ数 ($= a\Delta t / (\Delta x)^2$) を示している。

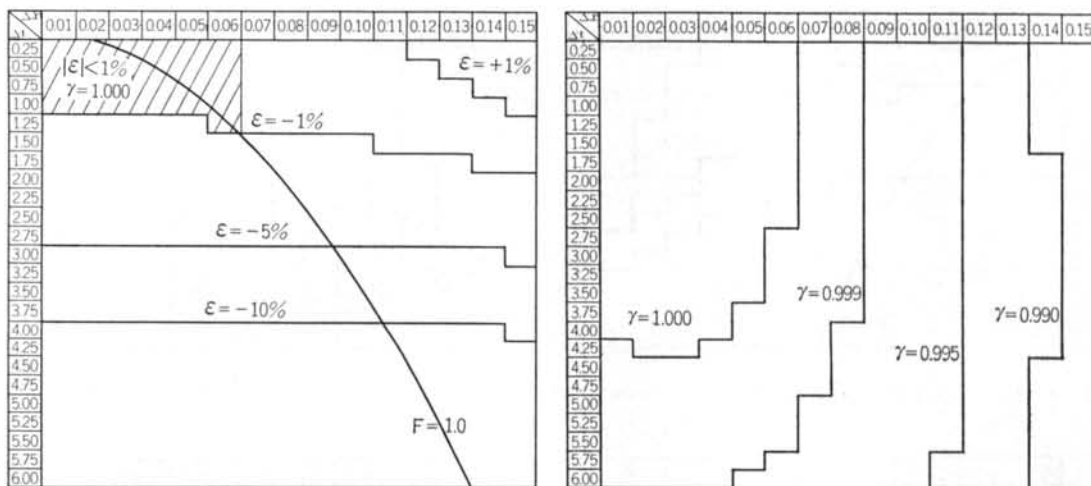
図一～図五より、ハッチング部分での同定領域は境界条件 $\phi_{0,t} = 10 \sin 2\pi t / 24$ の場合、時間方向の刻み (Δt) の最大が 1.0 hr であり、 $\phi_{0,t} = 10 \sin 2\pi t / 12$ の場合、時間刻み (Δt) が 0.5 hr であることが分かる。

また、空間方向の刻み (Δx) 方向の同定領域は、おのの時間刻み Δt の最大での $F = 1.0$ に相当していることが認められる。

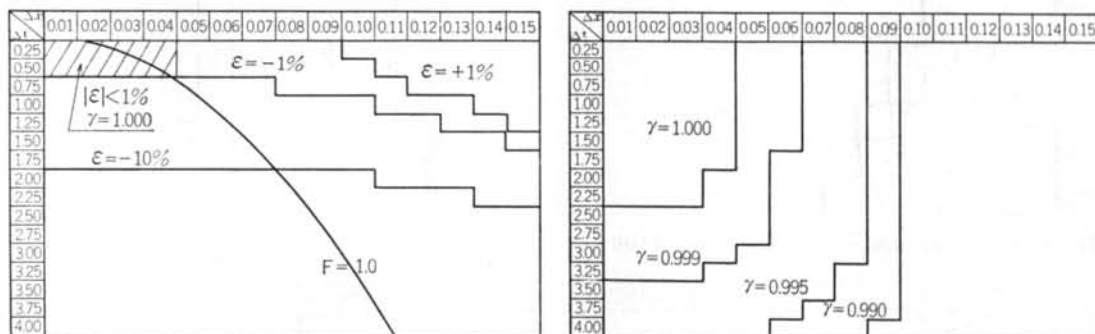
3.2 SF 33, ISF 33 の同定領域

図六～図一十一に、SF 33 と ISF 33 の同定領域を示す。

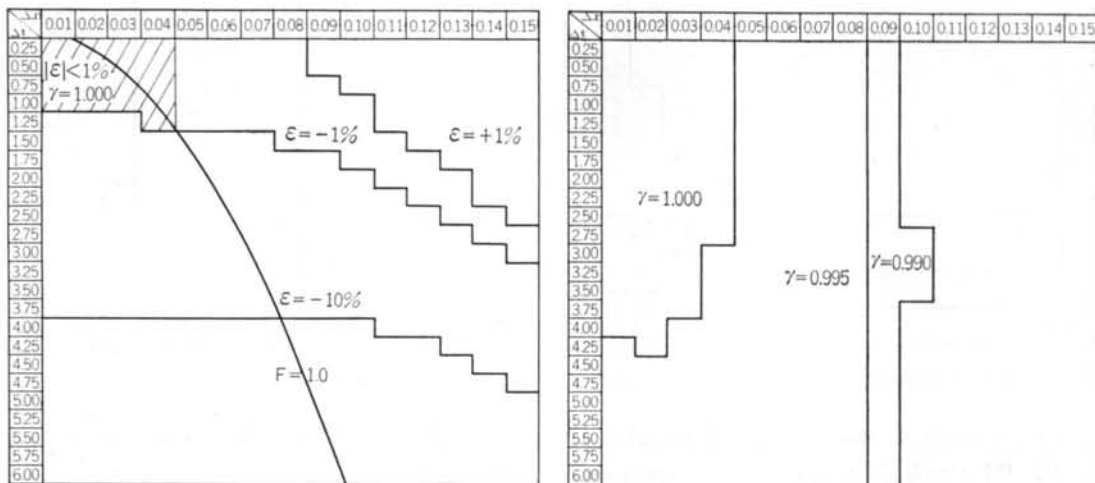
図六と図七から、SF 33 と ISF 33 の同定誤差を比較した場合ほぼ同じ領域であり、相関係数 $r = 1.0$ の領域



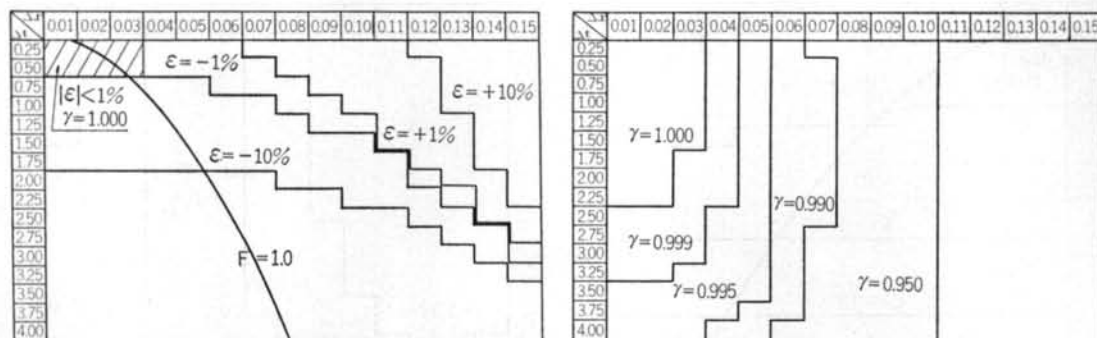
図一 FD33 の同定領域 ($a = 3.03 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t} = 10 \sin \frac{2\pi}{24} t$)



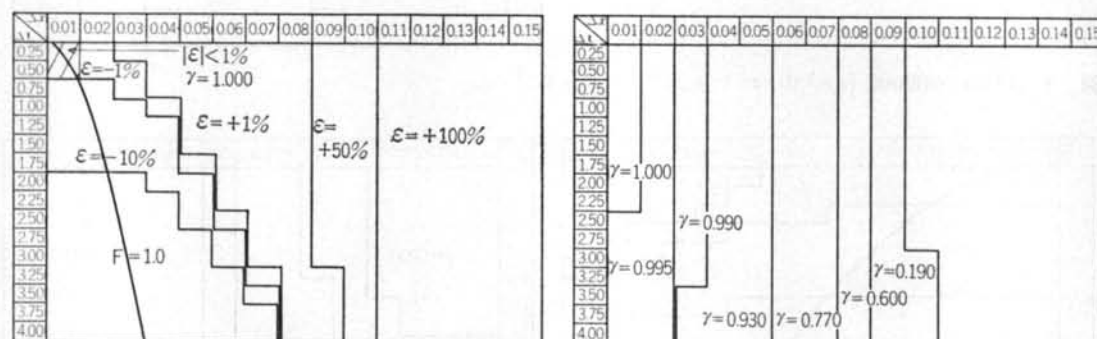
図二 FD33 の同定領域 ($a = 3.03 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t} = 10 \sin \frac{2\pi}{12} t$)



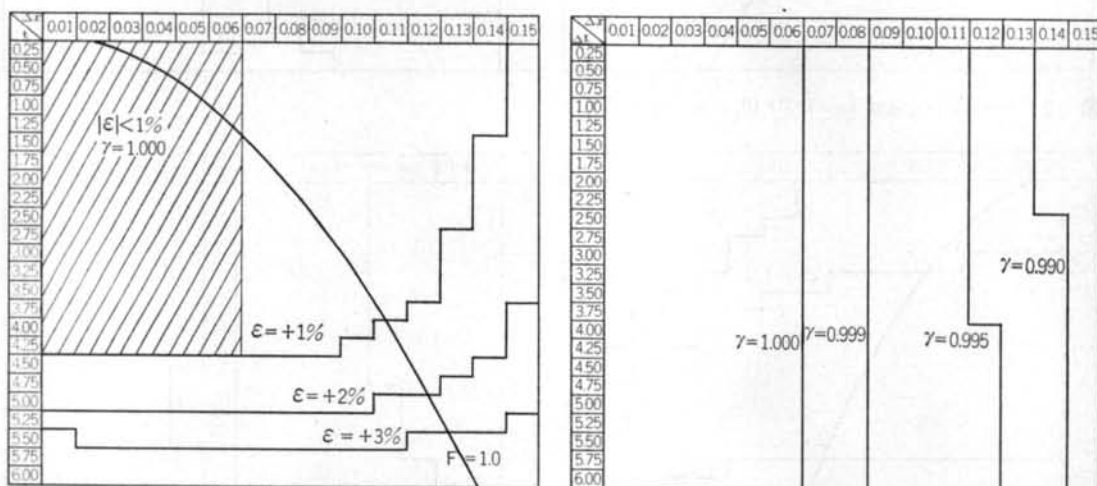
図三 FD33 の同定領域 ($a = 1.515 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t} = 10 \sin \frac{2\pi}{24} t$)



図一4 FD33の同定領域 ($a=1.515 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t}=10 \sin \frac{2\pi}{12} t$)



図一5 FD33の同定領域 ($a=3.03 \times 10^{-4}$, $\phi_{0,t}=10 \sin \frac{2\pi}{12} t$)



図一6 SF33の同定領域 ($a=3.03 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t}=10 \sin \frac{2\pi}{24} t$)

(ハッチングの部分)は、時間方向の同定領域は同程度であるが、ISF33の方が空間刻み(Δx)での同定領域が広がっていることが分かる。

図一7～図一11で、ISF33を用いた場合、境界条件 $\phi_{0,t}=10 \sin 2\pi t/24$ の場合、ハッチング部分の時間方向

の刻み(Δt)の最大は4.25 hrで、 $\phi_{0,t}=10 \sin 2\pi t/12$ の場合2.0 hrである。

また、空間方向の刻み(Δx)の同定領域は、FD33の同定領域と同様に、おのおの Δt が最大での $F=1.0$ に相当していることが分かる。

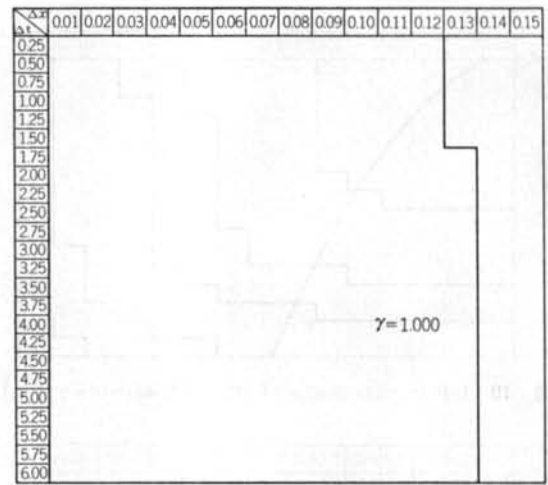
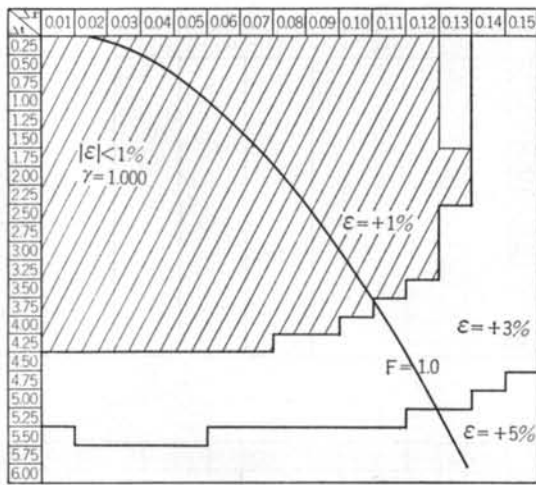


図-7 ISF 33 の同定領域($\alpha=3.03 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t}=10 \sin \frac{2\pi}{24} t$)

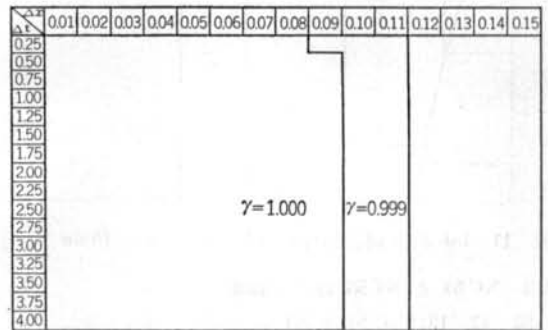
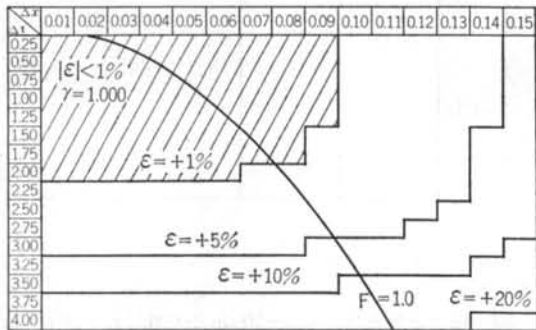


図-8 ISF 33 の同定領域($\alpha=3.03 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t}=10 \sin \frac{2\pi}{12} t$)

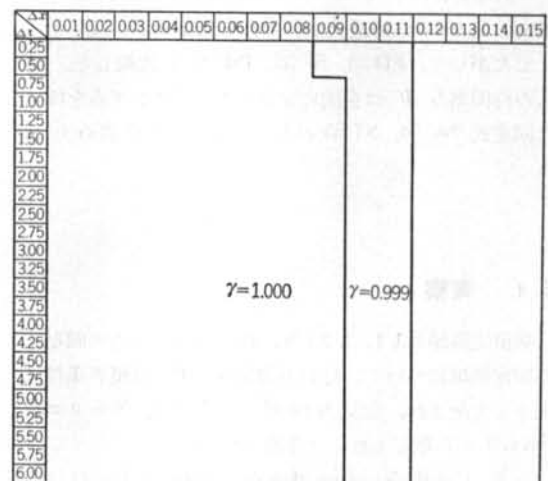
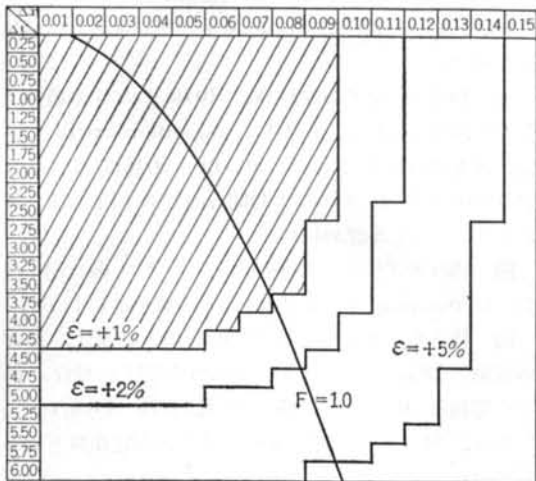
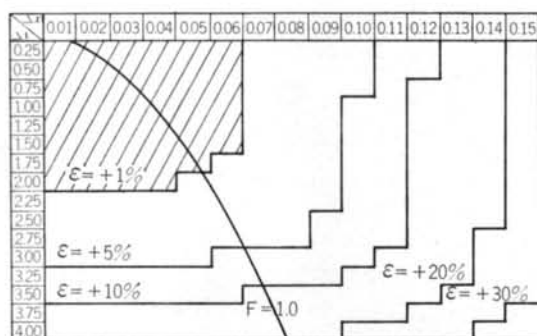
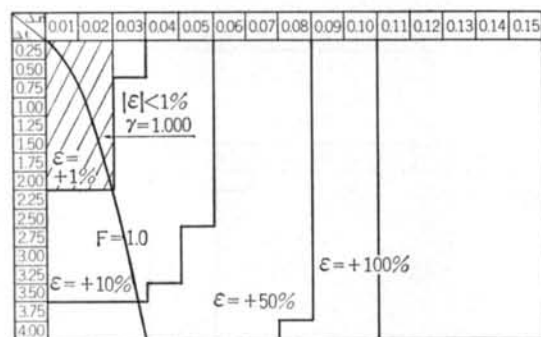
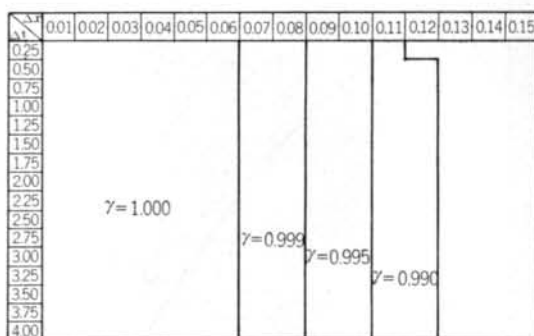


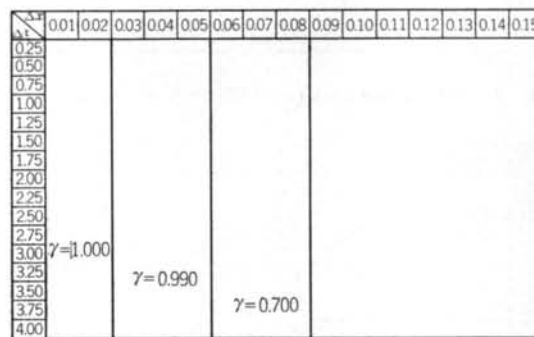
図-9 ISF 33 の同定領域($\alpha=1.515 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t}=10 \sin \frac{2\pi}{24} t$)



図—10 ISF 33 の同定領域 ($a=1.515 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t}=10 \sin \frac{2\pi}{12} t$)



図—11 ISF 33 の同定領域 ($a=3.03 \times 10^{-4}$, $\phi_{0,t}=10 \sin \frac{2\pi}{12} t$)



3.3 NC 54 と ST 55 の同定領域

図—12, 13にNC 54 と ST 55 の同定領域を示す。

時間方向の刻み (Δt) の最大は、NC 54 と ST 55 の各々の場合、5.0~5.25 hr, 5.75~6.0 hr であり、空間方向の刻み (Δx) の最大はいずれも 0.06 m である。

したがって、FD 33, SF 33, ISF 33 と比較して、最大の時間刻み Δt は空間に 5 点のサンプリング点を持った同定式 NC 54, ST 55 の方が大きいことが認められる。

§ 4. 考察

数値実験結果 3.1, 3.2より、提案された一連の同定式の同定領域について、時間方向刻み (Δt) は境界条件に大きく支配され、空間方向刻み (Δx) は、フーリエ数 $F=1.0$ から規定されると考察される。

一方、Crank-Nicolson 法を用いた同定式 FD 33 は、時間方向に対して 1 次近似 (相加平均) とみなすことができる。すなわち、ある時刻 t_n と次時刻 $t_n + \Delta t$ での温度変化が、1 次直線で近似される場合に成立すると考

えられる。

図—14は境界条件が $\phi_{0,t}=10 \sin 2\pi t/24$, および $10 \sin 2\pi t/12$ において、サンプル温度 $\phi_{0,t+1/2\Delta t}$ と、補間温度 $\theta_{0,t+1/2\Delta t} = \{\phi_{0,t} + \phi_{0,t+\Delta t}\}/2$ との補間誤差 $\varepsilon_\phi = |\phi_{0,t+1/2\Delta t} - \theta_{0,t+1/2\Delta t}|$ の平均値を、 Δt をパラメータとして示したものである。

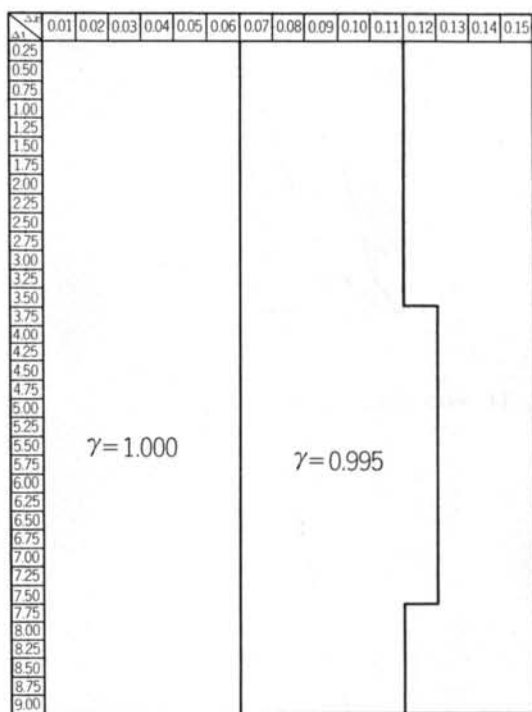
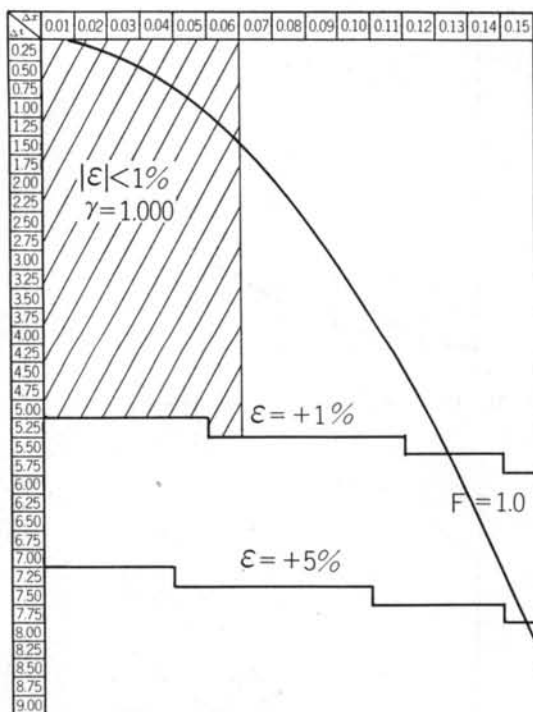
図—14より、境界条件が $\phi_{0,t}=10 \sin 2\pi t/24$ の場合、最大時間刻み $\Delta t_{\max}$ が 10 hr, $\phi_{0,t}=10 \sin 2\pi t/12$ の場合、最大時間刻み $\Delta t_{\max}$ が 0.5 hr での補間誤差は共に 0.05℃ であり、FD 33 の時間方向での同定領域と対応していることが認められる。

図—15はスプライン関数を用いたときの $\phi_{0,t+1/2\Delta t}$, および $\phi_{0,t+3/2\Delta t}$ での補間誤差の平均値を示している。

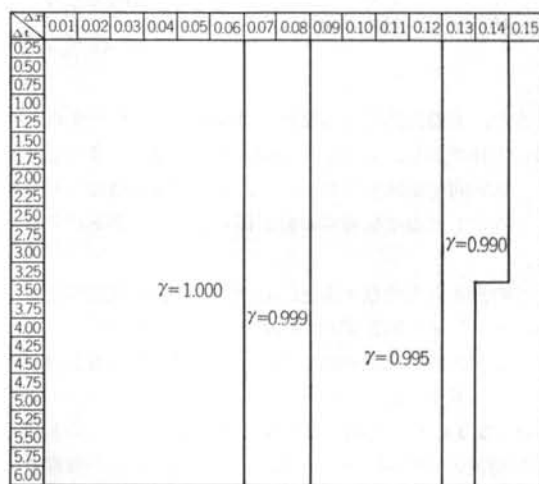
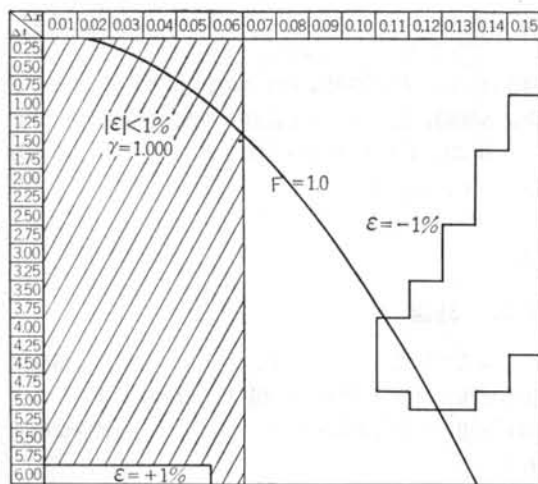
図—15より、境界条件が $10 \sin 2\pi t/24$ の場合、最大時間刻み $\Delta t_{\max}$ が 4.25 hr, $10 \sin 2\pi t/12$ の場合、最大時間刻み $\Delta t_{\max}$ が 2.0 hr での補間誤差は共に 0.4℃ であり、SF 33, ISF 33 の時間方向での同定領域と対応している。

また、図—16, 17は境界表面より 0.0, 0.15, 0.3 m 入ったサンプル点での補間誤差を示している。

図—16, 17より、同時間刻みで比較すると境界での補



図—12 NC 54 の同定領域 ($\alpha = 3.03 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t} = 10 \sin \frac{2\pi}{24} t$)



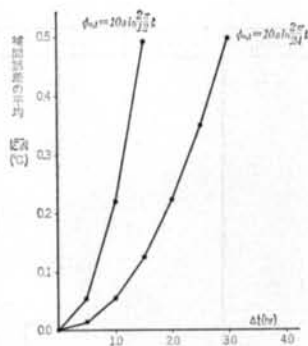
図—13 ST 55 の同定領域 ($\alpha = 3.03 \times 10^{-3}$, $\phi_{0,t} = 10 \sin \frac{2\pi}{24} t$)

間誤差が一番大きく、試験体内部に入るに従い補間誤差が小さくなっている。

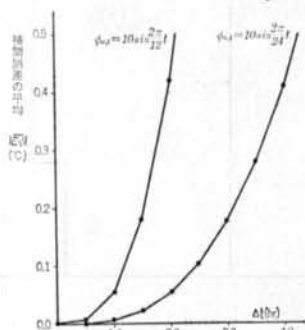
このことから、温度伝導率の同定に FD 33、および SF 33、ISF 33 を用いる場合、FD 33 では境界温度の補間誤差が 0.05°C 程度以内、SF 33、ISF 33 では境界温度の補間誤差が 0.4°C 程度以内となるように最大時間刻み $\Delta t_{\max}$ の同定領域を求め、次に、 $F=1.0=\alpha\Delta t_{\max}/$

$(\Delta x_{\max})^2$ から最大空間刻み $\Delta x_{\max}$ の同定領域が定められると考察される。

したがって、原位置での温度伝導率を同定するためには、まず境界温度のサンプリングにより最大時間刻み $\Delta t_{\max}$ の同定領域を求め、文献等から仮定した温度伝導率を用いて $\Delta x_{\max}$ を定めて、 $\Delta t_{\max}$ 、 $\Delta x_{\max}$ 以内の Δt 、 Δx を用いて温度伝導率が同定できると考察され



図—14 FD 33 補間誤差の平均: $\phi_{0t} = \begin{cases} 10 \sin \frac{2\pi}{24} t \\ 10 \sin \frac{2\pi}{12} t \end{cases}$



図—15 SF 33, ISF 33 補間誤差の平均: $\theta_0 = \begin{cases} 10 \sin \frac{2\pi}{24} t \\ 10 \sin \frac{2\pi}{12} t \end{cases}$

る。

また、実際に同定する場合、試験体の温度伝導率は一般に未知であり、したがって同定式が具備する条件として、広い同定領域を持ち、かつ、測定温度の精度がおちても安定した温度伝導率の値が得られることがあげられる。

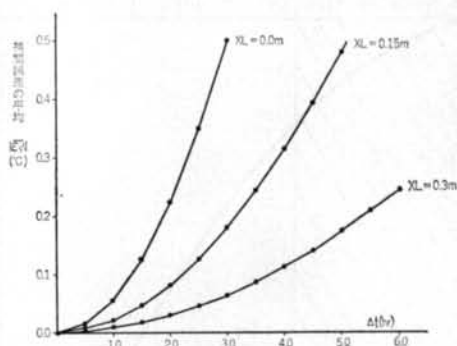
この点からも考察すると、前報告論文と同様に差分法、スプライン関数による同定式 (FD 33, SF 33) より、空間方向に数値補間した同定式 ISF 33 の方が適していると考えられる。

次に3.3より、空間方向に5点の温度サンプル点を用いた同定式 NC 54, ST 55 は、空間方向に3点の温度サンプル点を用いた同定式 FD 33, SF 33, ISF 33 より時間方向の同定領域は広がっており、温度サンプル点を増した効果は認められる。

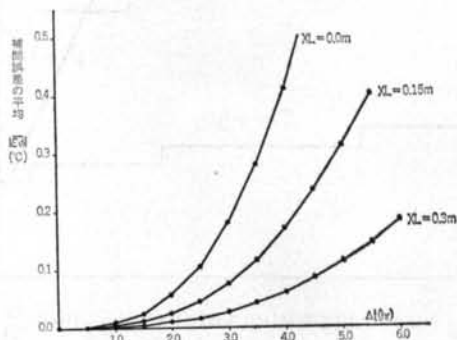
しかしながら、NC 54 の空間方向の同定領域は SF 33 と同程度で、空間方向のその効果は認められない。

ST 55 の空間方向の同定領域は、他の同定式に比べ2倍になっており、ISF 33 と同程度の同定領域となっている。

温度サンプル点を増すことは、温度センサの設置誤差



図—16 FD 33 補間誤差の平均: $\phi_{0t} = 10 \sin \frac{2\pi}{24} t$



図—17 SF 33, ISF 33 補間誤差の平均: $\phi_{0t} = 10 \sin \frac{2\pi}{24} t$

等を伴い、一般に不利な条件となるが、ST 55 は空間方向に等間隔に温度センサを設置するため、部分的に FD 33, SF 33, ISF 33 を用いて同定することができる利点を持っていると考えられる。

§ 5. 結論

本研究で提案された差分法、スプライン法、数値補間法を応用した温度伝導率の同定式 (FD 33, SF 33, ISF 33) を用いた場合の同定領域について、次の結論が導かれる。

すなわち、時間方向の最大の同定領域は、境界温度の補間誤差が FD 33 の場合 0.05℃ 程度以内、SF 33, ISF 33 の場合 0.4℃ 程度以内となる領域で示され、空間方向の同定領域はフーリエ数 $F=1.0$ から定めることができる。

また、FD 33, SF 33 より、ISF 33 の方が広い同定領域を持っており、温度伝導率の同定式として優れている。

次に、本報告で導かれた Stirling の公式を応用し

た同定式 (ST 55) は, ISF 33 と比較して空間方向はほぼ同程度, 時間方向に対して大きい同定領域をもっている。

また, ST 55 は空間に等間隔に温度サンプル点を設置するため, 部分的に他の同定式 FD 33, SF 33, ISF 33 を用いることができ, 温度伝導率の同定式として利点を有している。

§ 6. 今後の課題

本報告論文では, 温度伝導率の同定領域について検討を行なったが, 次報告では温度伝導率の同定条件および同定方法のフローを検討する予定である。また, 極座標系における同定式の検討を行ないたいと考えている。

謝辞 本研究にあたり, 協力していただいた河野君, 三嶋君に謝意を表します。

〈参考文献〉

- 1) 羽根: “重回帰分析法による温度伝導率の算定” 日本建築学会秋季大会 (55年9月)
- 2) T. Hane: “A Method for the Multidimensional Thermal Diffusivity Measurement by Means of the Variational Approximate Method and Multiple Linear Regression Analysis” Proceedings of 1st Japan Symposium on Thermophysical Properties, 1980.
- 3) 羽根: “変分法および重回帰分析法による多次元方向の温度伝導率の算定” 清水建設研究所報 第34号 (1981)
- 4) 羽根: “実構造体に於ける多次元方向温度伝導率のシステム同定 (その1)” 日本建築学会論文報告集 (投稿中)
- 5) 羽根: 同上 (その2) (投稿中)
- 6) 羽根: 同上 (その3) (投稿中)
- 7) 奥野: “多変量解析法” 日科技連
- 8) 羽根: “原位置での多次元方向温度伝導率の同定法 (その1)” 清水建設研究所報 第35号 (1981)
- 9) T. Hane: “System Identification of Multidimensional Thermal Diffusivity for Actual Structures (I)” Proceedings of 2nd Japan Symposium on Thermophysical Properties, 1981.
- 10) 戸川: “数値計算技法” オーム社

