

## 原位置での多次元方向温度伝導率の同定法（その4）

羽根義

### § 1. はじめに

実際の場（以下、原位置という）の構造物における熱定数（温度伝導率）は、温度・水分・空気の対流、あるいは熱流方向による伝熱特性の違いの影響により大きく異なるといわれる。しかし、従来の温度伝導率の同定法による値は、種々の制約条件のもとで数ミリ～数センチメートル程度の整形された小試料を用いて同定されたものであり、その値をもって原位置での温度伝導率であるとは言い難い面がある。また、試料を作製して同定を行なう時点では、水分や空気の影響を受けて熱的性状が変化してしまうもの（例えば粉粒体層）、あるいは局部的に熱を与えて性状が変化してしまうもの（例えば温度的非線形材料）等を原位置からサンプリングし、例えば実験室等で再現することは困難であると考えられ、したがって原位置において、直接温度伝導率を同定する必要がある。

これらの状況を踏まえ、本一連の研究は原位置において簡単な温度測定による、温度伝導率の同定法を確立することを目的としている。

本論文では、ポリカーボネート、バイレックス、花崗岩材料を用いて、任意の初期温度分布および境界条件下でのサンプル実験結果、および提案された同定式の同定精度、同定領域等の温度伝導率の同定条件について、数値実験等により検討した結果について述べる。

### § 2. 温度伝導率の同定式の概要

前論文<sup>1)~3)7)12)~14)</sup>に示される温度伝導率の同定式のうち、空間に3点の温度センサを用いる同定式は次式で示される。

(1) 差分同定式 (FD 32)

差分同定式 (FD 32) は次式で示される。

$$FD\ 32 = \frac{4t}{(\Delta x)^2} = 2 \times \{\phi(x_i, t_{j+1}) - \phi(x_i, t_j)\}$$

$$\begin{aligned} & \div \{\phi(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2\phi(x_i, t_{j+1}) + \phi(x_{i+1}, t_{j+1}) \\ & \quad + \phi(x_{i-1}, t_j) - 2\phi(x_i, t_j) + \phi(x_{i+1}, t_j)\} \\ \equiv & \left\{ \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right\} / \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \right\} \cdots (1) \\ & x_{i-1} \quad x_i \quad x_{i+1} \quad x_{i-1} \quad x_i \quad x_{i+1} \end{aligned}$$

ただし、 $a$ は温度伝導率、 $\Delta t$ 、 $\Delta x$ は各々時間刻み、空間刻み、 $\phi(x_i, t_j)$ は $(x_i, t_j)$ での温度を示している。

(2) 端条件にP-スプラインを用いた同定式(SF 33)

端条件にP-スプラインを用いた同定式 (SF 33) は次式で示される。

$$\begin{aligned} SF\ 33 = & a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ = & \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{array} \right\} / 2 \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right\} \cdots (2) \end{aligned}$$

(3) 数値補間法を用いた同定式 (ISF 33)

数値補間法を応用した同定式 (ISF 33) は次式で示される。

$$\begin{aligned} ISF\ 33 = & a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \\ = & \left\{ \begin{array}{ccc} 5 & 38 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ -5 & -38 & -5 \end{array} \right\} / 16 \left\{ \begin{array}{ccc} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{array} \right\} \cdots (3) \end{aligned}$$

### § 3. 任意の初期温度分布および境界条件下でのサンプル実験

#### 3.1 同定条件および同定装置

本提案による温度伝導率の同定式は、式の構造上、初期温度分布、境界温度条件は任意である。また、同定式 (FD 32, SF 33, ISF 33 等) は、1次元熱伝導方程式に基づいているため、温度伝導率の同定条件として1次元熱移動が生ずる同定装置であれば良い。

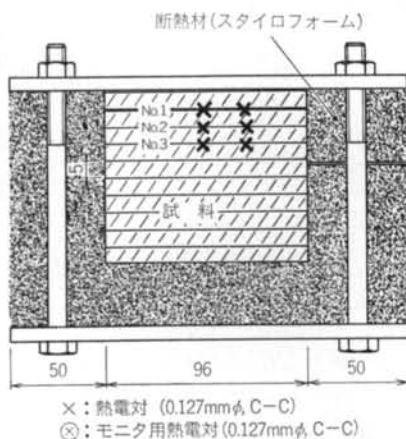


図-1 任意の初期温度分布、境界条件下での温度伝導率の同定装置

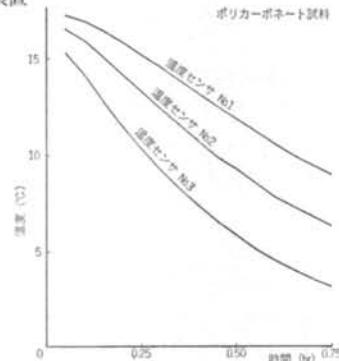


図-2 過渡温度応答

次に、温度伝導率の同定装置の概要を図-1に示す。平板試料に与える熱源として、同定装置を恒温槽内に設置し、恒温槽内の温度設定を任意に変え平板試料に温度変化を与える。

温度測定を行なう場合、多次元熱流を生じてないことを確認するために平板試料中の $\frac{1}{4}$ 点で熱電対で温度を同時に測定し、モニタリングを行なう。測定温度の精度等については、前論文<sup>5)14)</sup>に示されるように、半無限固体近似法に準拠したサンプル実験と同様とした。

### 3.2 ポリカーボネート試料の温度伝導率の同定結果

#### 3.1 で述べた同定装置によるポリカーボネート試料の

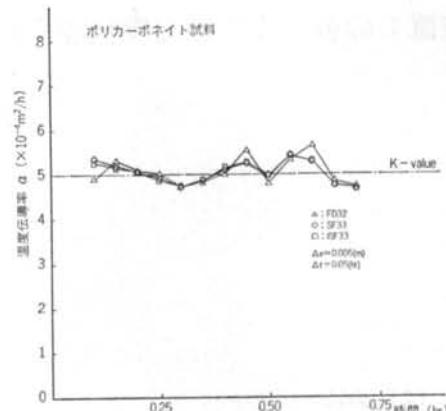


図-3 温度伝導率の同定結果

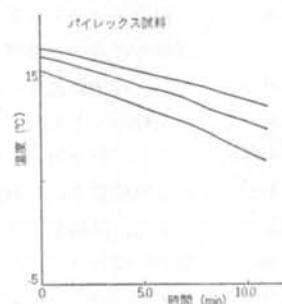


図-4 過渡温度応答

温度伝導率の同定結果を次に示す。

恒温槽内の設定温度を約+20°Cから-20°Cにえたときの各点での温度応答を図-2に示す。温度は、任意の時刻から約45分間を30秒ごとに読みとった。また、温度伝導率を求めるための時間刻み $\Delta t$ を180秒とした。

同定式(FD32, SF33, ISF33)を用いた場合の温度伝導率の同定結果を図-3に示す。

温度伝導率の同定値の平均値、標準偏差、および従来の同定法(半無限固体近似法)との差 $\delta$ を表-1に示す。ただし、従来の同定法との差 $\delta$ は次式とする。

$$\delta = \frac{a_H - a_K}{a_K} \times 100\%$$

ここで、 $a_H$ は任意の初期温度分布の境界条件下で得られた温度伝導率、 $a_K$ は従来の同定法で得られた値を示している。

温度伝導率の同定式	温度伝導率 $a(m^2/hr)$	標準偏差 $s(m^2/hr)$	サンプリング数 $N$	従来の同定法との差 $\delta(\%)$	離散化フーリエ数 $a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (-)$
FD32	$5.055 \times 10^{-4}$	$3.10 \times 10^{-5}$	13	-2.03	1.011
SF33	$5.032 \times 10^{-4}$	$2.40 \times 10^{-5}$	13	-2.48	1.006
ISF33	$5.038 \times 10^{-4}$	$2.33 \times 10^{-5}$	13	-2.36	1.008

表-1 任意の初期温度分布、境界条件下での温度伝導率の同定結果(ポリカーボネート試料)

温度伝導率の同定式	温度伝導率 $a(m^2/hr)$	標準偏差 $s(m^2/hr)$	サンプリング数 $N$	従来の同定法との差 $\delta(\%)$	離散化フーリエ数 $a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (-)$
FD32	$1.3864 \times 10^{-3}$	$3.08 \times 10^{-4}$	10	-3.57	0.924
SF33	$1.4036 \times 10^{-3}$	$2.46 \times 10^{-4}$	10	-2.37	0.936
ISF33	$1.4040 \times 10^{-3}$	$2.48 \times 10^{-4}$	10	-2.34	0.936

表-2 任意の初期温度分布、境界条件下での温度伝導率の同定結果(パイレックス試料)

温度伝導率の同定式	温度伝導率 $a(m^2/hr)$	標準偏差 $s(m^2/hr)$	サンプリング数 $N$	従来の同定法との差 $\delta(\%)$	離散化フーリエ数 $a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (-)$
FD32	$2.1847 \times 10^{-3}$	$2.35 \times 10^{-4}$	21	-2.41	0.728
SF33	$2.1937 \times 10^{-3}$	$1.88 \times 10^{-4}$	21	-2.01	0.731
ISF33	$2.1913 \times 10^{-3}$	$1.89 \times 10^{-4}$	21	-2.12	0.730

表-3 任意の初期温度分布、境界条件下での温度伝導率の同定結果(花崗岩試料)

表-1より、同定式 FD32 では  $\delta = -2.03\%$ 、同定式 SF33, ISF33 では各々  $\delta = -2.48\%$ ,  $\delta = -2.36\%$  の十分な精度で温度伝導率が求められた。

### 3.3 パイレックス試料の温度伝導率

3.1 で述べた同定装置によるパイレックス試料の温度伝導率の同定結果を次に示す。

恒温槽内の設定温度を約18°Cから-30°Cに変えたときの各点での温度応答を図-4に示す。温度は、任意の時刻から約11分間を30秒ごとに読みとった。また、温度伝導率を求めるための時間刻み  $\Delta t$  を60秒とした。

同定式(FD32, SF33, ISF33)を用いた場合の温度伝導率の同定結果を図-5に示す。

温度伝導率の同定値の平均値、標準偏差、および従来の同定法との差  $\delta$  を表-2に示す。表-2より、同定式 FD32 では  $\delta = -3.57\%$ 、同定式 SF33, ISF33 では各々  $\delta = -2.37\%$ ,  $\delta = -2.34\%$  の十分な精度で温度伝導率が求められた。

### 3.4 花崗岩試料の温度伝導率の同定結果

3.1 で述べた同定装置による花崗岩試料の温度伝導率の同定結果を次に示す。

恒温槽内の設定温度を約16°Cから-30°Cに変えたときの各点での温度応答を図-6に示す。温度は、任意の時刻から約16分を30秒ごとに読みとった。また、温度伝導率を求めるための時間刻み  $\Delta t$  を30秒とした。

同定式(FD32, SF33, ISF33)を用いた場合の温度伝導率の同定結果を図-7に示す。

温度伝導率の同定値の平均値、標準偏差、および従来の同定法との差  $\delta$  を表-3に示す。表-3より、同定式 FD32 では  $\delta = -2.41\%$ 、同定式 SF33, ISF33 では

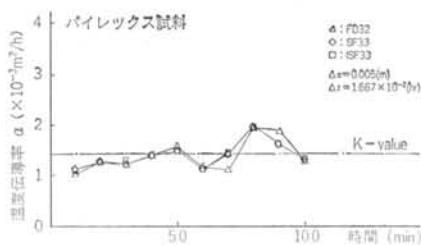


図-5 温度伝導率の同定結果

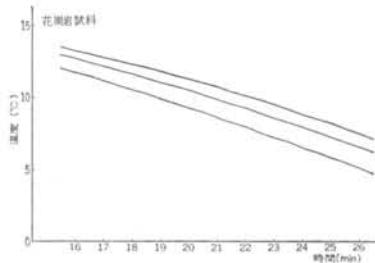


図-6 過渡温度応答

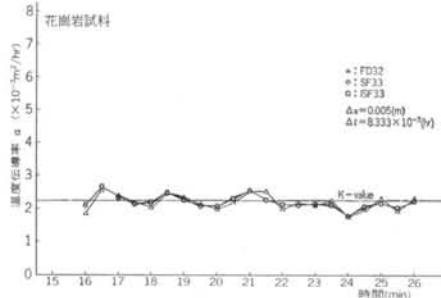


図-7 温度伝導率の同定結果

各々  $\delta = -2.01\%$ ,  $\delta = -2.12\%$  の十分な精度で温度伝導率が求められた。

### 3.5 考察

ポリカーボネート、パイレックス、花崗岩試料を用いた任意の初期温度分布および任意の境界条件下でのサンプル実験より、温度伝導率の同定式 (FD 32, SF 33, ISF 33) は  $-2.01\% \sim -2.48\%$  以内程度の十分な精度で温度伝導率の同定ができることが分かった。したがって、このサンプル実験より、これら離散化式を用いた温度伝導率の同定式を用いて任意の初期温度分布、境界条件での同定、すなわち原位置においても十分な精度で温度伝導率の同定が可能であると考察される。

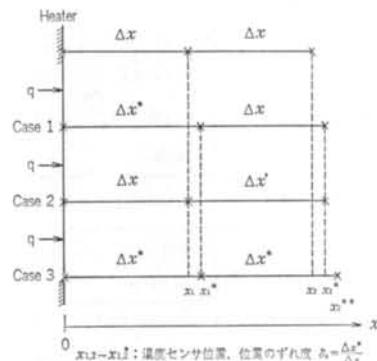


図-8 温度センサ位置のずれの仮定

### § 4. 温度センサ位置のずれにより生ずる温度伝導率の同定誤差

温度センサの太さ、設置方法などにより測定位置がずれるが、そのずれによる温度伝導率の同定誤差について検討する。

数値実験はパイレックス試料を仮定し、図-8に示す3ケースについての温度センサの位置のずれを仮定した。Case 1は、加熱面から1番目の温度センサに位置のずれが生じた場合、Case 2は2番目の温度センサに位置のずれが生じた場合、Case 3は1, 2番目の温度センサに位置のずれが生じた場合である。

位置のずれ度  $\delta_x$  は次式とする。

$$\delta_x = \frac{\Delta x^*}{\Delta x} \quad \dots \dots (4)$$

ここで、 $\Delta x$  は正規の温度センサ間距離で、 $\Delta x^*$  は位置のずれを持った場合の温度センサ間距離を示す。

$\delta_x=1.025$  について、温度センサ位置のずれにより生ずる測定温度誤差と、同定式 SF 33, ISF 33, FD 32 を用いて離散化フーリエ数  $a\Delta t/(\Delta x)^2 \approx 1.0$  での温度伝導率を求めた結果を表-4～表-6に示す。

Case 1については、表-4より各測定温度の誤差が  $0.085 \sim 0.15^\circ\text{C}$  生じ、その結果各同定式により求められた温度伝導率の同定誤差は  $-7 \sim -9\%$  で、低い値を示している。Case 2については、表-5より各測定温度の誤差が  $0.085 \sim 0.10^\circ\text{C}$  生じ、その結果各同定式により求められた温度伝導率の同定誤差は  $4 \sim 5\%$  で、高い値を示している。Case 3については、表-6より各測定温度の誤差が  $0.13 \sim 0.21^\circ\text{C}$  生じ、その結果各同定式により求められた温度伝導率の同定誤差は  $-4 \sim -5\%$  で、低い値を示している。

図-9～図-12に温度センサ位置のずれを生じていない場合、および Case 1～Case 3について温度センサ位

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	
$t_0$	16.08467	16.08467	9.48592	5.08915
	0		0.13540	0.08506
$t_1$	18.23830	18.23830	11.50258	6.74521
	0		0.14209	0.09597
$t_2$	20.16319	20.16319	13.32916	8.30605
	0		0.14693	0.10416

$$a=1.43770 \times 10^{-3} (\text{m}^2/\text{hr}), \delta_x=1.025$$

1	2	1: 位置がずれてない場合の温度 $\phi_1(\text{C})$
	3	2: 位置がずれている場合の温度 $\phi_2(\text{C})$
		3: 温度差 $\Delta\phi=\phi_1-\phi_2(\text{C})$

	$a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$	温度伝導率 $a \times 10^{-3} (\text{m}^2/\text{hr})$	同定誤差 $\varepsilon (\%)$
FD32	0.965	1.44725	0.664
	0.883	1.32401	-7.908
SF33	0.950	1.42553	-0.846
	0.866	1.29858	-9.677
ISF33	0.957	1.43475	-0.205
	0.871	1.30692	-9.096
半無限固体 近似法	—	—	—
	—	1.36841	-4.820

上段……温度センサの位置がずれてない場合

下段……温度センサの位置がずれている場合

表-4 温度センサの位置のずれによる温度伝導率の同定誤差 (Case 1)

置のずれ  $\delta_x=1.025$  を生じたときの各同定式 (SF 33, ISF 33, FD 32) で求められた温度伝導率の同定結果を示す。また、図-13～図-16に温度センサ位置のずれを生じていない場合、および Case 1～Case 3について温度センサ位置のずれ  $\delta_x=1.025$  を生じたときの各同定式 (SF 33, ISF 33, FD 32) で求められた温度伝導率のばらつき (標準偏差  $s$ ) を示す。

図-9～図-12より、温度センサ位置のずれ  $\delta_x=1.025$  を生じた場合の温度伝導率の同定値の誤差は、Case 1～

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	
$t_0$	16.08467	16.08467	9.48592	9.48592
	0	0	0	0.08506
$t_1$	18.23830	18.23830	11.50258	11.50258
	0	0	0	0.09597
$t_2$	20.16319	20.16319	13.32916	13.32916
	0	0	0	0.10416

$$\alpha = 1.43770 \times 10^{-3} (\text{m}^2/\text{hr}), \delta_x = 1.025$$

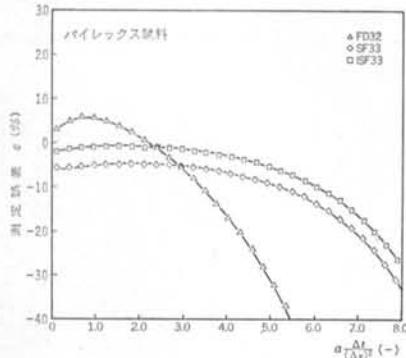
1	2	1: 位置がずれてない場合の温度 $\phi_1(\text{C})$
		2: 位置がずれている場合の温度 $\phi_2(\text{C})$
		3: 温度差 $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2(\text{C})$

	$a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$	温度伝導率 $a \times 10^{-3} (\text{m}^2/\text{hr})$	同定誤差 $\epsilon (\%)$
FD32	0.965	1.44725	0.664
	1.009	1.51276	5.221
SF33	0.950	1.42553	-0.846
	0.997	1.49623	4.071
ISF33	0.957	1.43475	-0.205
	1.004	1.50639	4.778
半無限固体 近似法	—	—	—
近似法	—	—	—

上段……温度センサの位置がずれてない場合

下段……温度センサの位置がずれている場合

表—5 温度センサの位置のずれによる温度伝導率の同定誤差 (Case 2)



図—9 位置のずれを持たない場合の温度伝導率の同定誤差～Case 3 について全体に、-11～-13%，9～10%，-4～-5% 生じていることが分かる。

図—13～図—16より、求められた温度伝導率のばらつき（標準偏差  $s$ ）は、Case 1, Case 2 について離散化フーリエ数 ( $a \Delta t / (\Delta x)^2$ ) で比較すると、温度センサ位置のずれを持たない場合に比べ4～7倍程度大きくなっていることが分かる。一方、Case 3 については温度センサ位置のずれを持たない場合に比べ、同程度のばらつきを持っている。

次に、温度センサの位置のずれによる温度伝導率の同

	$x_0$	$x_1$	$x_2$	
$t_0$	16.08467	16.08467	9.48592	9.35052
	0	0	0.13540	0.16902
$t_1$	18.23830	18.23830	11.50258	11.36049
	0	0	0.14209	0.19088
$t_2$	20.16319	20.16319	13.32916	13.18223
	0	0	0.14693	0.20735

$$\alpha = 1.43770 \times 10^{-3} (\text{m}^2/\text{hr}), \delta_x = 1.025$$

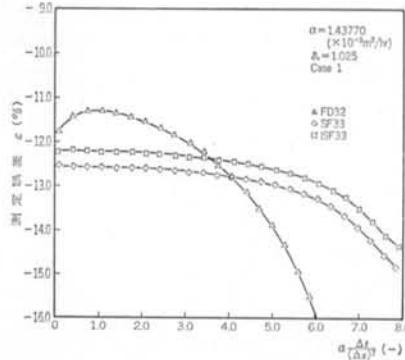
1	2	1: 位置がずれてない場合の温度 $\phi_1(\text{C})$
		2: 位置がずれている場合の温度 $\phi_2(\text{C})$
		3: 温度差 $\Delta\phi = \phi_1 - \phi_2(\text{C})$

	$a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$	温度伝導率 $a \times 10^{-3} (\text{m}^2/\text{hr})$	同定誤差 $\epsilon (\%)$
FD32	0.965	1.44725	0.664
	0.919	1.37814	-4.143
SF33	0.950	1.42553	-0.846
	0.904	1.35636	-5.658
ISF33	0.957	1.43475	-0.205
	0.910	1.36551	-5.021
半無限固体 近似法	—	—	—
近似法	—	1.36841	-4.820

上段……温度センサの位置がずれてない場合

下段……温度センサの位置がずれている場合

表—6 温度センサの位置のずれによる温度伝導率の同定誤差 (Case 3)



図—10 位置のずれが  $\delta_x = 1.025$  生じたときの温度伝導率の同定誤差 (Case 1)

同定誤差について、熱の相似則より考察する。

正規の温度センサ位置  $x$  での温度を  $\phi(x)$  とし、その温度伝導率を  $a$  とする。一方、温度センサ位置がずれた場合の位置  $x^*$  での温度を  $\phi(x^*)$  とし、その温度伝導率を  $a^*$  とする。

熱の相似則より、

$$F_0 = a \frac{t}{(x)^2} = a^* \frac{t}{(x^*)^2} \quad \dots \dots (5)$$

が成立するとき、 $\phi(x)$  と  $\phi(x^*)$  は一致する。ただし、

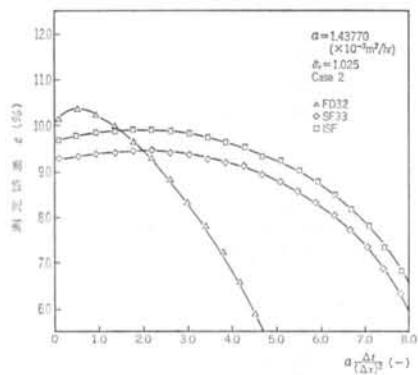


図-11 位置のずれが  $\delta_x = 1.025$  生じたときの温度伝導率の同定誤差 (Case 2)

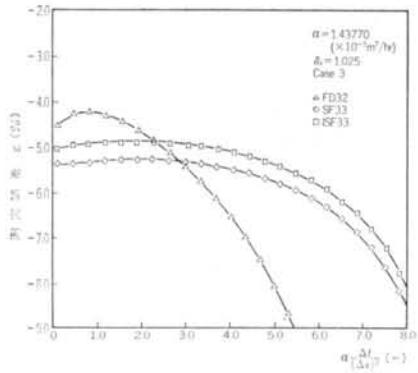


図-12 位置のずれが  $\delta_x = 1.025$  生じたときの温度伝導率の同定誤差 (Case 3)

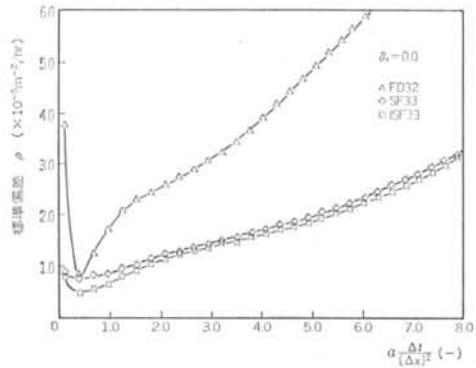


図-13 位置のずれが生じてない場合の温度伝導率同定値の標準偏差

$\delta_x$	$x_1^*$	$x_2^*$	$x_2^{**}$
1.025	5.1%	2.5%	5.1%
1.05	10.3%	5.1%	10.3%

表-7 温度センサ位置のずれによる温度伝導率の同定誤差 (熱の相似則より)

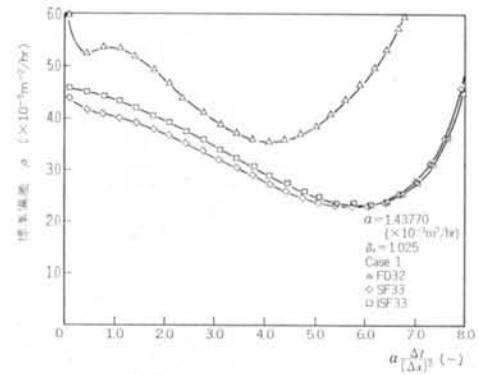


図-14 位置のずれが  $\delta_x = 1.025$  生じたときの温度伝導率同定値の標準偏差 (Case 1)

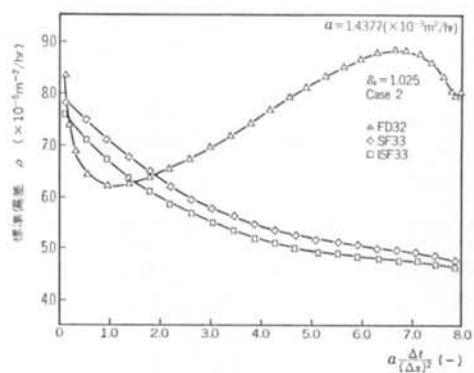


図-15 位置のずれが  $\delta_x = 1.025$  生じたときの温度伝導率同定値の標準偏差 (Case 2)

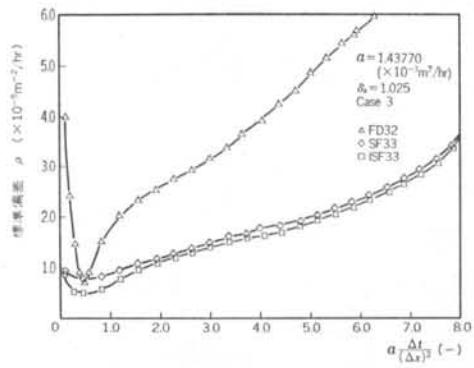


図-16 位置のずれが  $\delta_x = 1.025$  生じたときの温度伝導率同定値の標準偏差 (Case 3)

$F_0$  をフーリエ数,  $t$  は時間を示す。したがって、正規の温度伝導率  $a$  に対し  $x$  の位置においては  $\phi(x)$  の温度を示すべきであるのに対し  $\phi(x^*)$  が得られたということは、 $a^*$  の温度伝導率を算出したことに相当する。

$x_1$  の位置での、ずれを持った場合の位置  $x_1^*$  は  $x_1^* = \delta_x x_1$  であり、したがって温度伝導率は式(5)より、

$$a^* = a(\delta_x)^2 \quad \dots\dots(6)$$

となる。

すなわち、温度センサの位置のずれが  $\delta_x = 1.025$  生ずることにより、正規の温度伝導率  $a$  に対し 5.1% 程度大きく同定することになる。

この結果を表-7 にまとめた。

また、 $0 \sim x_1$  に流入する熱量を  $Q_1$ 、 $x_1 \sim x_2$  に流入する熱量を  $Q_2$ 、 $x_1$  での温度上昇に用いられる熱量を  $Q_3$  とすると、表-7 より Case 1 では  $Q_2$  を 2.6% 小さく見積るため、温度伝導率を小さく同定する結果となり、Case 2 では  $Q_2$  を 2.5% 大きく見積るため、温度伝導率

を大きく同定する結果となり、Case 3 では熱の相似則より、

$$a \frac{t}{(x_2^*)^2} = a^* \frac{t}{(x_2)^2} \quad \dots\dots(7)$$

が成立するから、仮定した温度伝導率より  $\delta_x^*$  小さく同定する結果となる。

これらの数値実験結果および熱の相似則の考察結果から、温度センサ位置のずれ度  $\delta_x$  が 1.025 (試料厚み 5 mm に対し熱電対の太さ 0.125 mm に相当) 生ずると、温度伝導率の同定誤差は  $\pm 5 \sim \pm 10\%$  程度、 $\delta_x = 1.05$  の場合一般に同定誤差は  $\pm 10\%$  以上生ずると考察される。

## § 5. 同定式の構造からみた温度伝導率の同定精度

温度伝導率の同定式 FD 32, SF 33, ISF 33 について、その式の構造から温度伝導率の同定精度を吟味する。

(1) Crank-Nicolson 型差分法による温度伝導率の同定式 FD 32 の構造

$\lambda, C_p, \gamma$  を各々熱伝導率、比熱、比重とし、 $\Delta t$  と次の  $\Delta t$  間で流入出される熱量を各々  $q_1, \nu q_1, q_2, \nu q_2$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} q_1 &\simeq \frac{\lambda}{\Delta x} \{ \phi(x_0, t_0) - \phi(x_1, t_0) \} \Delta t \\ \nu q_1 &\simeq \frac{\lambda}{\Delta x} \{ \phi(x_0, t_1) - \phi(x_1, t_1) \} \Delta t \\ q_2 &\simeq \frac{\lambda}{\Delta x} \{ \phi(x_1, t_0) - \phi(x_2, t_0) \} \Delta t \\ \nu q_2 &\simeq \frac{\lambda}{\Delta x} \{ \phi(x_1, t_1) - \phi(x_2, t_1) \} \Delta t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(8)$$

となり、

$$Q_1 \equiv \frac{1}{2} (q_1 + \nu q_1)$$

$$Q_2 \equiv \frac{1}{2} (q_2 + \nu q_2)$$

とし、温度上昇に用いられる熱量  $Q_3$  を、

$$Q_3 \simeq C_p \gamma \Delta x \{ \phi(x_1, t_1) - \phi(x_1, t_0) \} \quad \dots\dots(9)$$

と表現すると、 $Q_1 - Q_2 \equiv Q_3$  より次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} FD 32 &= a \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \simeq 2 \{ \phi(x_1, t_1) - \phi(x_1, t_0) \} / \{ \phi(x_0, t_1) - 2 \phi(x_1, t_1) + \phi(x_2, t_1) + \phi(x_0, t_0) - 2 \phi(x_1, t_0) + \phi(x_2, t_0) \} \\ &\equiv 2 \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{Bmatrix} / \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(10)$$

したがって、Crank-Nicolson 型差分法による温度伝導率の同定式 FD 32 は、熱の流入出  $Q_1, Q_2$  を  $2\Delta t$  間での平均の熱量  $\frac{1}{2}(q_{1,2} + \nu q_{1,2})$  とし、温度上昇に用いられる熱量  $Q_3$  を  $\phi(x_1, t)$  の温度変化で表記しているとみることができる。

(2) スプライン関数法による温度伝導率の同定式 SF 33 の構造

微小体積に流入出する熱量を  $Q_1, Q_2$  とし、次式で示す。

$$\left. \begin{aligned} Q_1 &\simeq \frac{\lambda}{\Delta x} \left[ \int_{t_0}^{t_1} \{ \phi(x_0, t) - \phi(x_1, t) \} dt / 2\Delta t \right] 2\Delta t \\ Q_2 &\simeq \frac{\lambda}{\Delta x} \left[ \int_{t_0}^{t_2} \{ \phi(x_1, t) - \phi(x_2, t) \} dt / 2\Delta t \right] 2\Delta t \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(11)$$

ここで、 $\phi(x_t, t)$  は温度  $\phi$  を  $x_t$  での時間の関数とする。また、 $Q_3$  を次式で表現する。

$$Q_3 \approx C_p \gamma \Delta x \left[ \int_{x_0}^{x_2} \{\phi(x, t_2) - \phi(x, t_0)\} dx / 2 \Delta x \right] \quad \dots \dots (12)$$

式(11), 式(12)の[]内は、積分値を区間  $2\Delta t, 2\Delta x$  で平均していることに相当している。一方、シンプソンの公式により、ある  $y$  の関数  $f(y)$  の近似積分として、

$$\int_{y_0}^{y_2} f(y) dy \approx \frac{4y}{3} \{f(y_0) + 4f(y_1) + f(y_2)\} \quad \dots \dots (13)$$

で示されるが、式(13)を用いて式(11), (12)を表現し  $Q_1 - Q_2 = Q_3$  とすると、スプライン関数法による温度伝導率の同定式 SF 33 として、

$$SF 33 = \begin{Bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{Bmatrix} \left/ \begin{Bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & -8 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \end{Bmatrix} \right. \quad \dots \dots (14)$$

が得られる。したがって、スプライン関数法による温度伝導率の同定式は  $Q_1 \sim Q_3$  を積分形で表わし、その積分形を平均化し、シンプソンの数値積分法により求めた表記方法であると解釈される。

以上の結果から、温度伝導率の同定式 FD 32 と SF 33 を比較すると、FD 32 は流入・流出熱量を相加平均した 1 次関数値近似であるが、SF 33 はスプライン関数による 3 次関数近似を用い、流入・流出熱量の積分値を平均化しているため、SF 33 は FD 32 より温度伝導率の同定精度がよく、また同定領域も広く安定しているものと考察される。

### (3) 同定式 (SF 33) を合成し導びかれた同定式 ISF 33 の構造

次に、基本同定式 (SF 33) と、空間方向に合成して得られる合成同定式 (ISF 33) の同定精度について考える。

ここで、 $a_s$ : 温度伝導率の真の値

$a_e$ : 同定された温度伝導率

$$F_s \equiv a_s \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$F_e \equiv a_e \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$A_K$ : 基本同定式の誤差を含まない分子の値

$B_K$ : 基本同定式の誤差を含まない分母の値

$\varepsilon_K$ : 基本同定式の真値  $F_s$  に対する誤差

$\varepsilon_{AK}$ : 基本同定式の分子の入力温度データの誤差

$\varepsilon_{BK}$ : 基本同定式の分母の入力温度データの誤差

$\varepsilon_n$ : 合成同定式の真値  $F_e$  に対する誤差

とする。

基本同定式を次式で表現する。

$$F_e(m, n) = F_s + \varepsilon_k = \frac{A_k + \varepsilon_{Ak}}{B_k + \varepsilon_{Bk}} \quad (k=1, \dots, n-2) \quad \dots \dots (15)$$

合成同定式の一般式は、基本同定式の分子、分母のそれぞれの和の形で表わされるから、

$$F_e(m, n) = F_s + \varepsilon_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-2} (A_i + \varepsilon_{Ai})}{\sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi})} \quad \dots \dots (16)$$

となる。いま、 $F_e(m, n)$  と  $F_e(m, n-1)$  の 2 式から誤差に関する関係を導く。式(16)より、

$$F_e(m, n-1) = F_s + \varepsilon_{n-1} = \frac{\sum_{i=1}^{n-3} (A_i + \varepsilon_{Ai})}{\sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi})} \quad \dots \dots (17)$$

を得る。 $F_e(m, n-1)$  について、式(16)より次式が得られる。

$$(F_s + \varepsilon_1)(B_1 + \varepsilon_{B1}) = A_1 + \varepsilon_{A1}$$

$$(F_s + \varepsilon_2)(B_2 + \varepsilon_{B2}) = A_2 + \varepsilon_{A2}$$

$$(F_g + \varepsilon_{n-3})(B_{n-3} + \varepsilon_{Bn-3}) = A_{n-3} + \varepsilon_{An-3}$$

上式を辺々加えると,

$$F_g \sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi}) + \sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \cdot \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n-3} (A_i + \varepsilon_{Ai}) \quad \dots \dots (18)$$

となり, 式(17)より,

$$F_g \sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi}) + \varepsilon_{n-1} \sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi}) = \sum_{i=1}^{n-3} (A_i + \varepsilon_{Ai}) \quad \dots \dots (19)$$

が得られる. 式(18), (19)より,

$$\varepsilon_{n-1} \sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi}) = \sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \cdot \varepsilon_i \quad \dots \dots (20)$$

が得られる. 次に  $F(m, n)$  を  $k=1, \dots, n-2$  について同様に展開すると,

$$F_g \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) + \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \cdot \varepsilon_i = \sum_{i=1}^{n-2} (A_i + \varepsilon_{Ai}) \quad \dots \dots (21)$$

が得られる. 式(16)より,

$$F_g \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) + \varepsilon_n \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) = \sum_{i=1}^{n-2} (A_i + \varepsilon_{Bi}) \quad \dots \dots (22)$$

が得られる. 一方, 式(21), (22)より次式が得られる.

$$\varepsilon_n \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) = \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \cdot \varepsilon_i \quad \dots \dots (23)$$

式(20)と式(23)の差をとると,

$$\varepsilon_n \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) = \varepsilon_{n-1} \sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi}) + \varepsilon_{n-2} (B_{n-2} + \varepsilon_{Bn-2}) \quad \dots \dots (24)$$

となる. ゆえに,

$$\varepsilon_n = \frac{\sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi})}{\sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi})} \cdot \varepsilon_{n-1} + \frac{B_{n-2} + \varepsilon_{Bn-2}}{\sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi})} \cdot \varepsilon_{n-2} \quad \dots \dots (25)$$

$$|\varepsilon_n| \leq \left| \frac{\sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi})}{\sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi})} \right| \cdot |\varepsilon_{n-1}| + \left| \frac{B_{n-2} + \varepsilon_{Bn-2}}{\sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi})} \right| \cdot |\varepsilon_{n-2}| \quad \dots \dots (26)$$

となる. ここで,  $\varepsilon_{\max} = \max(|\varepsilon_{n-1}|, |\varepsilon_{n-2}|)$  とおくと,

$$|\varepsilon_n| \leq \left\{ \left| \frac{\sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi})}{\sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi})} \right| + \left| \frac{B_{n-2} + \varepsilon_{Bn-2}}{\sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi})} \right| \right\} \cdot \varepsilon_{\max} = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n-3} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \right| + \left| B_{n-2} + \varepsilon_{Bn-2} \right|}{\left| \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \right|} \cdot \varepsilon_{\max} \quad \dots \dots (27)$$

$B_i + \varepsilon_{Bi}, B_{n-2} + \varepsilon_{Bn-2}$  が同符号のとき,

$$|\varepsilon_n| \leq \frac{\left| \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) + (B_{n-2} + \varepsilon_{Bn-2}) \right|}{\left| \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \right|} \cdot \varepsilon_{\max} = \frac{\left| \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \right|}{\left| \sum_{i=1}^{n-2} (B_i + \varepsilon_{Bi}) \right|} \cdot \varepsilon_{\max} = \varepsilon_{\max} \quad \dots \dots (28)$$

ゆえに,  $|\varepsilon_n| \leq \varepsilon_{\max}$

したがって, 上記の関係より合成同定式  $F_e(m, n)$  は, 基本同定式  $F_e(m, n-1)$  より誤差が小さいことが分かる. すなわち, 一般に温度場に与えられる温度変化は単調増加(減少)であり, したがって基本同定式と合成同定式が同符号であることから合成同定式の方が同定誤差が小さい. したがって, 基本同定式 SF 33 の合成法により導かれた温

度伝導率の同定式 ISF 33 は SF 33 より同定精度が良いと考察される。

## § 6. 結論

従来の同定法では得られなかった任意の初期温度分布および任意の境界条件のもとでの温度伝導率の同定法、すなわち原位置での同定法が導かれ、同定誤差が 0~3.6 % の十分な精度で温度伝導率の同定が可能であることが明らかになった。

また、提案された種々の同定式のうち、空間に 3 点の温度センサを用いる温度伝導率の同定式として、空間方向に合成しさらに数値補間された同定式 (ISF 33) が同定精度、同定領域の点から最も優れていることが結論された。

また、温度センサ位置のずれの影響について、温度伝導率の同定条件として温度伝導率の同定誤差を 5~10%

以内程度にするためには、温度測定間隔 ( $\Delta x$ ) に対し、温度センサ位置のずれを 2.5 % 以下に保つ必要があることが数値実験および熱の相似則の考察より明らかになった。さらに、測定温度位置のずれにより生ずる温度伝導率の同定誤差を 5~10% 以内程度にするためには、測定温度誤差を 0.08~0.21°C 以下に保つ必要があることが明らかになった。したがって、温度伝導率の同定条件として温度センサ位置のずれを 2.5 % 以内とすることが結論される。

**謝辞** 本研究論文をまとめるに当り、明治大学教授宮部英也博士、同教授藤井石根博士から有益なご指示とご討論をいただいた。また、東海技研㈱北坂秋秀氏、および本研究の遂行においてご協力をいただいた志鎌広行、岡田真明、高野恵、水野智公の諸氏に謝意を表します。

## ＜参考文献＞

- 1) 羽根: “実構造体に於ける多次元方向温度伝導率のシステム同定（その 1）” 日本建築学会論文報告集 第318号（昭和57年 8月）
- 2) 羽根: “同上（その 2）” 日本建築学会論文報告集 第324号（昭和58年 2月）
- 3) 羽根: “同上（その 3）”（投稿中）
- 4) 羽根: “同上（その 5）”（投稿中）
- 5) 羽根: “同上（その 6）”（投稿中）
- 6) 羽根: “重回帰分析法による温度伝導率の算定” 日本建築学会秋季大会（近畿）（昭和55年 9月）
- 7) 羽根: “実構造体に於ける多次元方向温度伝導率のシステム同定（その 4）” 日本建築学会秋季大会（東北）（昭和57年10月）
- 8) T. Hane: “A Method for the Multidimensional Thermal Diffusivity Measurement by Means of the Variation Approximate Method and Multiple Linear Regression Analysis” Proceedings of 1st Japan Symposium on Thermo-physical Properties, 1980.
- 9) T. Hane: 同上, 2nd Symposium, 1981.
- 10) T. Hane & T. Mizuno: 同上, 3rd Symposium, 1982.
- 11) 羽根: “変分法および重回帰分析法による温度伝導率の算定” 清水建設研究所報 第34号（1981年）
- 12) 羽根: “原位置での多次元方向温度伝導率の同定法（その 1）” 清水建設研究所報 第35号（1981年）
- 13) 羽根: “同上（その 2）” 清水建設研究所報 第36号（1982年）
- 14) 羽根: “同上（その 3）” 清水建設研究所報 第37号（1982年）
- 15) T. Hane: “System Identification of Multidimensional Thermal Diffusivity for Actual Structures (1)” SHIMIZU Technical Research Bulletin, No. 1 (1982)
- 16) T. Hane: “System Identification of Multidimensional Thermal Diffusivity for Actual Structures (2)” SHIMIZU Technical Research Bulletin, No. 2 (1983)