

# 原位置での多次元方向温度伝導率の同定法 (その5)

羽根 義  
(技術研究所)

## § 1. はじめに

従来の温度伝導率の測定法(以下、同定法という)は熱伝導方程式で記述される分布定数システムの連続系厳密式に基づくもので、(1)成型された試験片が必要であること、(2)試験片に与えられる初期温度分布が一様であることが必要なこと、(3)試験片に与えられる境界条件が限定されていること、(4)多次元方向の温度伝導率の同定法が得られていないことなどの制約条件があった。したがって、原位置における熱水分特性、異方性熱特性、形状、あるいはその温度場に与えられる条件などを考慮した同定法は得られていないのが現状である。

本研究は、原位置での温度伝導率の同定法の確立を目的としているが、原位置での温度伝導率の同定法として1次元直交座標系での測定式を理論展開し、大谷での岩盤内冷凍庫実験、筑波用水トンネル現場での花崗岩の温度伝導率の同定を行ない良好な結果を得ているが、さらに原位置での同定法を簡便化するために、また熱的異方性を評価するために線状熱源、点熱源を用いた同定法の検討を行なった。本報告は、その同定法の同定理論に関するものである。

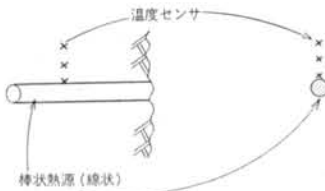


図-1 線状熱源の場合の温度伝導率の同定法

一方、 $r_1$  の点において温度上昇に用いられる熱流を  $q_3$  とすると、

$$q_3 = C_p \gamma \cdot \pi \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 - \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \right\} \cdot \frac{t\phi_1 - \phi_1}{\Delta t} \quad [\text{kcal/hr}] \quad \dots\dots(3)$$

ただし、 $t\phi$  は  $\Delta t$  後の温度を示す。

ここで、Crank-Nicolson 法を応用して次式が成立するものとする。

## § 2. 線状熱源、点熱源の同定理論(I): 等間隔温度センサの場合

### 2.1 線状熱源の場合の温度伝導率の同定法の概要

線状熱源の場合の原位置での同定法の概略図を図-1に示す。図-1に示されるように、熱源としてヒータを壁面に埋設すれば良く、壁面に熱源は不要となる。

### 2.2 線状熱源の場合の温度伝導率の同定式

温度伝導率の同定式のモデルを図-2に示す。

ここで、熱伝導率を  $\lambda$  (kcal/mhr°C)、比熱を  $C_p$  (kcal/kg°C)、比重を  $\gamma$  (kg/m<sup>3</sup>)、温度伝導率を  $a = \lambda / C_p \gamma$  (m<sup>2</sup>/hr)、半径を  $r$ 、時間を  $t$ 、温度を  $\phi$  とする。

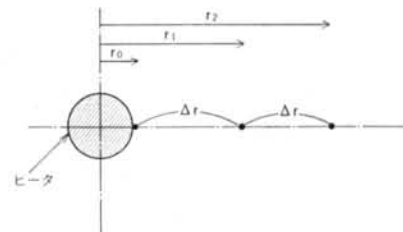


図-2 温度伝導率の同定法のモデル

#### 2.2.1 差分法の応用による温度伝導率の同定式 (FR 32)

$r_0$  から  $r_1$  の点に流入する熱流を  $q_1$  とすると、

$$q_1 = \frac{\lambda}{\Delta r} \cdot 2\pi \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right) (\phi_0 - \phi_1) \quad [\text{kcal/hr}] \quad \dots(1)$$

$r_1$  から  $r_2$  の点に流出する熱流を  $q_2$  とすると、

$$q_2 = \frac{\lambda}{\Delta r} \cdot 2\pi \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right) (\phi_1 - \phi_2) \quad [\text{kcal/hr}] \quad \dots(2)$$

$$q_3 = \frac{1}{2} \{ (tq_1 + q_1) - (tq_2 + q_2) \} \quad \dots\dots(4)$$

式(4)より式(1), (2), (3)を代入して,

$$C_p \gamma \cdot \pi \left\{ \left( r_1 + \frac{Dr}{2} \right)^2 - \left( r_1 - \frac{Dr}{2} \right)^2 \right\} \frac{t\phi_1 - \phi_1}{Dt} = \frac{2\pi C_p \gamma \cdot Dr}{Dt} \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}$$

$$= \frac{\lambda \pi}{Dr} \left\{ \left( r_1 - \frac{Dr}{2} \right) \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} + \left( r_1 + \frac{Dr}{2} \right) \begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \right\} \quad \dots\dots(5)$$

ここで, 


 $t_1$  は  $(r_0, t_0) \sim (r_2, t_1)$  の温度の係数を示す。  
 $t_0$

ここで,  $FR\ 32 = \frac{\lambda \Delta t}{C_p \gamma (Dr)^2} = a \frac{\Delta t}{(Dr)^2}$  とすると,

$$2 \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} = FR\ 32 \left\{ \left( r_1 - \frac{Dr}{2} \right) \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} + \left( r_1 + \frac{Dr}{2} \right) \begin{matrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\} \quad \dots\dots(6)$$

となり,

$$FR\ 32 = \frac{2 \begin{matrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix}}{\left\{ \left( r_1 - \frac{Dr}{2} \right) \begin{matrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{matrix} + \left( r_1 + \frac{Dr}{2} \right) \begin{matrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{matrix} \right\}} \quad \dots\dots(7)$$

すなわち, 式(7)において計測した温度  $\phi(r_i, t_j)$  を積和することにより  $FR\ 32$  の値が求まり,  $\Delta t, Dr$  が既知であるため, 温度伝導率  $a$  を求めることができる。

### 2.2.2 スプライン関数の応用による温度伝導率の同定式 (SR 33)

2.1.1で示された  $r_0 \rightarrow r_1, r_1 \rightarrow r_2$  に流入, 流出する熱流  $q_1, q_2$  を各々次式とする。

$$q_1 = \frac{\lambda}{Dr} 2\pi \left( r_1 - \frac{Dr}{2} \right) \left[ \int_{t_0}^{t_2} \{ \phi(r_0, t) - \phi(r_1, t) \} dt \right] / 2\Delta t \quad \dots\dots(8)$$

$$q_2 = \frac{\lambda}{Dr} 2\pi \left( r_1 + \frac{Dr}{2} \right) \left[ \int_{t_0}^{t_2} \{ \phi(r_1, t) - \phi(r_2, t) \} dt \right] / 2\Delta t \quad \dots\dots(9)$$

すなわち, 式(8), (9)は  $2\Delta t$  間での幾何的平均熱流を示している。一方,  $r_1$  での温度上昇に用いられる熱流  $q_3$  を次式とする。

$$q_3 = C_p \gamma \cdot \pi \left\{ \left( r_1 + \frac{Dr}{2} \right)^2 - \left( r_1 - \frac{Dr}{2} \right)^2 \right\} \left[ \int_{r_0}^{r_2} \{ \phi(r, t_2) - \phi(r, t_0) \} dr \right] / 2Dr / 2\Delta t \quad \dots\dots(10)$$

ここで, シンプソンの公式により  $f(y)$  の数値積分式は次式で示される。

$$\int_{y_0}^{y_2} f(y) dy = \frac{\Delta y}{3} \{ f(y_0) + 4f(y_1) + f(y_2) \} \quad \dots\dots(11)$$

$q_3 = q_1 - q_2$  とし, 式(11)を式(8), (9), (10)に代入すると,

$$2\pi C_p \gamma r_1 Dr \frac{1}{12\Delta t} \begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{matrix} = \frac{\pi C_p \gamma r_1 Dr}{6\Delta t} \begin{matrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{matrix}$$

$$= \frac{\lambda\pi}{3\Delta r} \left\{ \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \dots\dots(12)$$

SR 33 =  $\frac{\lambda}{C_p\gamma} \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} = a \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$  とすると、

$$\frac{r_1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \text{SR 33} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \dots\dots(13)$$

$$\text{SR 33} = \frac{\begin{bmatrix} & & 1 \\ & & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}}{2 \left\{ \left( 1 - \frac{\Delta r}{2r_1} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left( 1 + \frac{\Delta r}{2r_1} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}} \quad \dots\dots(14)$$

すなわち、式(14)において計測した温度  $\phi(r_i, t_j)$  を積和することにより SR 33 の値が求まり、 $\Delta t$ 、 $\Delta r$  が既知であるため、温度伝導率  $a$  を求めることができる。

### 2.3 点熱源の場合の温度伝導率の同定法の概要

点熱源の場合の原位置での測定法の概略図を図-3に示す。

図-3に示されるように、点熱源とすれば深度方向の温度伝導率も測定できることが分かる。



図-3 点熱源の場合の温度伝導率の同定法

### 2.4 点熱源の場合の温度伝導率の同定式

測定式のモデルを図-2と同様とする(ただし、極座標系とする)。

#### 2.4.1 差分法による温度伝導率の同定式 (F 32)

$r_0 \rightarrow r_1$ 、 $r_1 \rightarrow r_2$  に流入、流出する熱流を  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $r_1$  において温度上昇に用いられる熱流を  $q_3$  とする。式(4)と同様に展開すると、

$$C_p\gamma \frac{4\pi}{3} \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^3 \right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} / \Delta t$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\Delta r} 4\pi \left\{ \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \dots\dots(15)$$

F 32 =  $\frac{\lambda\Delta t}{C_p\gamma(\Delta r)^2} = a \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$  とすると、

$$\frac{1}{\Delta r} \frac{2}{3} \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^3 \right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= F32 \left\{ \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \dots\dots(16)$$

$$2 \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^3 \right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(17)$$

$$F32 = \frac{3\Delta r \left\{ \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}}{2 \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^3 \right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}$$

すなわち、式(16)において計測した温度  $\phi(r_i, t_j)$  を積和することにより F32 の値が求まり、 $\Delta t$ 、 $\Delta r$  が既知であるため、温度伝導率  $a$  を求めることができる。

### 2.4.2 スプライン関数の応用による温度伝導率の同定式 (S33)

2.4.1と同様に展開する。 $r_1$  に流入、流出する熱流  $q_1$ 、 $q_2$ 、 $r_1$  で温度上昇に用いられる熱流  $q_3$  を次式とする。

$$q_1 = \frac{\lambda}{\Delta r} \cdot 4\pi \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \left[ \int_{t_0}^{t_2} \{ \phi(r_0, t) - \phi(r_1, t) \} dt \right] / 2\Delta t \quad \dots\dots(18)$$

$$q_2 = \frac{\lambda}{\Delta r} \cdot 4\pi \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \left[ \int_{t_0}^{t_2} \{ \phi(r_1, t) - \phi(r_2, t) \} dt \right] / 2\Delta t \quad \dots\dots(19)$$

$$q_3 = \frac{4\pi C_p \bar{\gamma}}{4} \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^3 \right\} \left[ \int_{r_0}^{r_2} \{ \phi(r, t_2) - \phi(r, t_0) \} dr \right] / 2\Delta r / 2\Delta t \quad \dots\dots(20)$$

$$\frac{1}{6\Delta r} \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^3 \right\} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix} \\ = F \left\{ \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \dots\dots(21)$$

$$S33 = \frac{\left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^3 \right\} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -4 & -1 \end{bmatrix}}{6\Delta r \left\{ \left( r_1 - \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left( r_1 + \frac{\Delta r}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}} \quad \dots\dots(22)$$

すなわち、式(21)において計測した温度  $\phi(r_i, t_j)$  を積和することにより S33 の値が決まり、 $\Delta t$ 、 $\Delta r$  が既知であるため、温度伝導率  $a$  を求めることができる。

## § 3. 線状熱源、点熱源の同定理論(II): 不等間隔温度センサの場合

§ 2. で線状熱源、点熱源における原位置での温度伝導率の同定式の理論展開を試みた。この理論展開では、図-2 に示されるように空間方向に等間隔に温度センサを埋設する必要がある、その間隔がずれると温度伝導率の測定誤差

を生じる結果となる。一方、岩盤を対象にこの同定法を適用するとき、現状の一般の技術レベルで等間隔にボーリングする方法は難かしいが、ボーリング跡の位置を計測することは可能である。したがって、本章では原位置での温度伝導率の同定式として不等間隔における同定式を展開する。

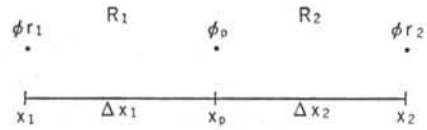


図-4 変分的決定のための領域と節点の指定(1次元の場合)

### 3.1 不等間隔理論の概要

直交座標系熱伝導方程式：

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_z \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) - C_p \gamma \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots\dots(23)$$

1次元の場合、次式となる。

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a_x \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) - \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad \dots\dots(24)$$

ただし、 $a_x$  は温度伝導率を示し、 $a_x = \lambda_x / C_p \gamma$  で  $\lambda_x$ ,  $C_p$ ,  $\gamma$  は各々  $x$  軸方向の熱伝導率、比熱、比重を示す。

式(24)は、変分法により解  $\phi$  は次の積分：

$$\pi(\phi) = \sum_i \int_{R_i} \left\{ \frac{1}{2} a_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \phi \right\} dx \quad \dots\dots(25)$$

を最小にすることに相当する。ただし、 $\pi(\phi)$  は汎関数を示す。ここで、 $\pi_i(\phi)$  を部分領域  $R_i$  からの  $\pi(\phi)$  への寄与とする(図-4)。

$$\pi_i(\phi) = \int_{R_i} \left\{ \frac{1}{2} a_x \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \phi \right\} \quad \dots\dots(26)$$

$\partial \phi / \partial x$  が  $\phi_{x_1}$  から  $\phi_p$  までの線分上で一定値  $(\phi_p - \phi_{x_1}) / \Delta x_1$  をとると仮定し、 $\phi$  は  $(\phi_{x_1} + \phi_p) / 2$  と仮定すると、式(26)から、

$$\pi_i(\phi) = \frac{1}{2} a_x \Delta x_1 \left( \frac{\phi_p - \phi_{x_1}}{\Delta x_1} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) (\phi_{x_1} + \phi_p) \Delta x_1 \quad \dots\dots(27)$$

が得られる。ただし、 $\partial \phi / \partial t$  は変分に不感とする。

$\pi_i(\phi)$  の  $\phi_p$  に関する偏導係数をとると、

$$\frac{\partial \pi_i(\phi)}{\partial \phi_p} = \frac{a_x}{\Delta x_1} (\phi_p - \phi_{x_1}) + \frac{\Delta x_1}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \dots\dots(28)$$

となり、同様に  $R_2$  の領域において次式が得られる。

$$\frac{\partial \pi_2(\phi)}{\partial \phi_p} = \frac{a_x}{\Delta x_2} (\phi_p - \phi_{x_2}) + \frac{\Delta x_2}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) \quad \dots\dots(29)$$

式(28)と式(29)を加え、その和を零に等しいと置くと、

$$a_x \left( \frac{\phi_p - \phi_{x_1}}{\Delta x_1} + \frac{\phi_p - \phi_{x_2}}{\Delta x_2} \right) + \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) = 0 \quad \dots\dots(30)$$

が得られる。

ここで、式(30)を吟味する。 $x_1$  から  $x_p$  に流入する熱流を  $q_1$ 、 $x_p$  から  $x_2$  に流出する熱流を  $q_2$  とする。

$$\left. \begin{aligned} q_1 &= \frac{\lambda_x}{\Delta x_1} (\phi_{x_1} - \phi_p) \\ q_2 &= \frac{\lambda_x}{\Delta x_2} (\phi_p - \phi_{x_2}) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(31)$$

$x_p$  における温度上昇に用いられる熱流を  $q_3$  とすると、

$$q_3 = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2} C_p \gamma \frac{\partial \phi_p}{\partial t} \quad \dots\dots(32)$$

$$q_1 - q_2 = q_3 \text{ とすると,} \quad \dots\dots(33)$$

$$\frac{\lambda_x}{\Delta x_1} (\phi_{x_1} - \phi_p) - \frac{\lambda_x}{\Delta x_2} (\phi_p - \phi_{x_2}) = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2} C_p \gamma \frac{\partial \phi_p}{\partial t} \quad \dots\dots(34)$$

ここで,  $a_x = \frac{\lambda_x}{C_p \gamma}$  であるから,

$$a_x \left( \frac{\phi_{x_1} - \phi_p}{\Delta x_1} + \frac{\phi_{x_2} - \phi_p}{\Delta x_2} \right) = \frac{\Delta x_1 + \Delta x_2}{2} \frac{\partial \phi_p}{\partial t} \quad \dots\dots(35)$$

が成立する。式(35)は式(30)と全く一致する。すなわち、式(30)は式(31)～式(33)の考えに基づいているといえる。この考えに基づき、線状熱源、点熱源の場合について展開する。

### 3.2 線状熱源の場合の温度伝導率の同定式

測定式のモデルを図-5に示す(ただし、円筒座標系とする)。

#### 3.2.1 差分法による温度伝導率の同定式

$r_0$  から  $r_1$  に流入する熱流を  $q_1$  とする。

$$q_1 = \frac{\lambda}{\Delta r_1} 2\pi \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right) (\phi_0 - \phi_1) \quad \dots\dots(36)$$

また、 $r_1$  から  $r_2$  に流出する熱流を  $q_2$  とする。

$$q_2 = \frac{\lambda}{\Delta r_2} 2\pi \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right) (\phi_1 - \phi_2) \quad \dots\dots(37)$$

一方、 $r_1$  の点において温度上昇に用いられる熱流を  $q_3$  とすると、

$$q_3 = C_p \gamma \pi \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^2 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^2 \right\} \frac{\phi_1 - \phi_1}{\Delta t} \quad \dots\dots(38)$$

ただし、 $\phi$  は  $\Delta t$  後の温度を示す。Crank-Nicolson 法により、

$$q_3 = \frac{1}{2} \{ (\phi_1 + q_1) - (\phi_2 + q_2) \} \quad \dots\dots(39)$$

とすると、式(36)に式(38)～(39)を代入すると次式が成立する。

$$\frac{C_p \gamma \pi}{\Delta t} \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^2 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^2 \right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(40)$$

$$= \frac{\lambda}{\Delta r_1} \pi \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{\lambda}{\Delta r_2} \pi \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(41)$$

$a \equiv \frac{\lambda}{C_p \gamma}$  より、

$$a = \frac{\left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^2 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^2 \right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}{\Delta t \left[ \left( \frac{r_1 - \Delta r_1/2}{\Delta r_1} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \left( \frac{r_1 + \Delta r_2/2}{\Delta r_2} \right) \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right]} \quad \dots\dots(42)$$

式(42)が温度伝導率  $a$  を求める測定式となる。

#### 3.2.2 スプライン関数法による 不等間隔温度センサの同定式

図-6のモデルの不等間隔に対し、スプライン関数法を応用する。 $[x_0, x_1]$  において P-スプライン関数による3次曲線を求める。

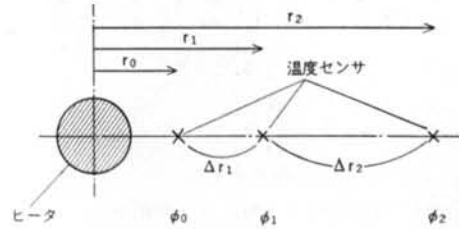


図-5 不等間隔温度センサの場合のモデル

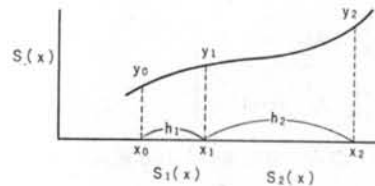


図-6 不等間隔のスプライン関数法

$$S_1''(x) = M_0 \frac{x_1 - x}{h_1} + M_1 \frac{x - x_0}{h_1} \quad \dots\dots(43)$$

ここで、 $M_1$  は各  $x_0, x_1$  における微係数を示す。式(43)を2回積分を行なう。

$$S_1(x) = M_0 \frac{(x_1 - x)^3}{6 h_1} + M_1 \frac{x - x_0}{6 h_1} + \left( y_0 - \frac{M_0 h_1}{6} \right)^2 \frac{(x_1 - x)}{h_1} + \left( y_1 - \frac{M_1 h_1}{6} \right)^2 \frac{(x - x_0)}{h_1} \quad \dots\dots(44)$$

また、 $x_1$  での1次導関数  $S_1'(x_1)$  と  $S_2'(x_1)$  は一致すると仮定すると、

$$M_0 = M_1 = M_2 \equiv M = \frac{2}{h_1 + h_2} \left( \frac{y_0 - y_1}{h_1} + \frac{y_2 - y_1}{h_2} \right) \quad \dots\dots(45)$$

となる。ここで、

$$\int_{x_0}^{x_2} S(x) dx = \int_{x_0}^{x_1} S_1(x) dx + \int_{x_0}^{x_2} S_2(x) dx \quad \dots\dots(46)$$

より、 $S(x)$  の  $[x_0, x_2]$  の積分値を求める。

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_1} S_1(x) dx &= -M \frac{(x_1 - x)^4}{24 h_1} + M \frac{(x - x_0)^4}{24 h_1} - \left( y_0 - \frac{M h_1}{6} \right)^2 \frac{(x_1 - x)^2}{2 h_1} \\ &\quad + \left( y_1 - \frac{M h_1}{6} \right)^2 \frac{(x - x_0)^2}{2 h_1} \Big|_{x=x_0}^{x=x_1} \\ &= \left\{ M \frac{h_1^3}{24} + \left( y_1 - \frac{M h_1^2}{6} \right) \frac{h_1}{2} \right\} - \left\{ -M \frac{h_1^3}{24} - \left( y_0 - \frac{M h_1^2}{6} \right) \frac{h_1}{2} \right\} \\ &= \frac{M h_1^3}{12} + \frac{h_1}{2} \left( y_1 + y_0 - \frac{M h_1^2}{3} \right) \\ &= \frac{h_1}{2} (y_1 + y_0) - \frac{M h_1^3}{12} \end{aligned} \quad \dots\dots(47)$$

同様に、

$$\int_{x_0}^{x_2} S_2(x) dx = \frac{h_2}{2} (y_2 + y_1) - \frac{M h_2^3}{12} \quad \dots\dots(48)$$

式(47), (48)より、

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} S(x) dx &= \frac{h_1}{2} (y_1 + y_0) - \frac{h_1^3}{6(h_1 + h_2)} \left( \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right) + \frac{h_2}{2} (y_2 + y_1) \\ &\quad - \frac{h_2^3}{6(h_1 + h_2)} \left( \frac{y_2 - y_1}{h_2} - \frac{y_1 - y_0}{h_1} \right) \quad \dots\dots(49) \\ &= \left\{ \frac{h_1}{2} - \frac{h_1^2}{6(h_1 + h_2)} - \frac{h_2^3}{6 h_1(h_1 + h_2)} \right\} y_0 + \left\{ \frac{h_1}{2} + \frac{h_1^3}{6 h_2(h_1 + h_2)} + \frac{h_1^2}{6(h_1 + h_2)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{h_2^2}{2} + \frac{h_2^2}{6(h_1 + h_2)} + \frac{h_2^3}{6 h_1(h_1 + h_2)} \right\} y_1 + \left\{ \frac{h_2}{2} - \frac{h_1^3}{6 h_2(h_1 + h_2)} - \frac{h_2^2}{6(h_1 + h_2)} \right\} y_2 \\ &\equiv A_0 y_0 + A_1 y_1 + A_2 y_2 \\ &\equiv \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_0 & A_1 & A_2 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots(50) \end{aligned}$$

ここで、 $h = h_1 = h_2$  とすると、

$$\int_{x_0}^{x_2} S(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4 y_1 + y_2) \quad \dots\dots(51)$$

となる。

式(50), (51)を用いて、線状熱源の場合について温度伝導率の測定式を展開する。式(43)と同様に流入、流出する熱流  $q_1, q_2$  を次式とする。

$$q_1 = \frac{\lambda}{\Delta r_1} 2\pi \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right) \int_{t_0}^{t_2} \{ \phi_0(x_0, t) - \phi_1(x_1, t) \} dt / 2\Delta t = \frac{\lambda}{\Delta r_1} 2\pi \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right) \frac{1}{6} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 4 & -4 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots 52$$

$$q_2 = \frac{\lambda}{\Delta r_2} 2\pi \left( r_1 + \frac{\Delta r_1}{2} \right) \frac{1}{6} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 4 & -4 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots 53$$

ここで、 $B_1 \equiv \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right) / \Delta r_1 / 2\Delta t$ ,  $B_2 \equiv \left( r_1 + \frac{\Delta r_1}{2} \right) / \Delta r_2 / 2\Delta t$  とすると、

$$q_1 = \frac{\lambda\pi}{3} B_1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 4 & -4 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots 54$$

$$q_2 = \frac{\lambda\pi}{3} B_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline 0 & 4 & -4 \\ \hline 0 & 1 & -1 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots 55$$

一方、温度上昇に用いられる熱流  $q_3$  を次式とする。

$$q_3 = C_p \gamma \pi \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^2 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^2 \right\} \int_{r_0}^{r_2} \{ t\phi_1(r) - \phi_1(r) \} dr / (\Delta r_1 + \Delta r_2) / 2\Delta r \quad \dots\dots 56$$

ここで、 $C_1 = \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^2 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^2 \right\} / (\Delta r_1 + \Delta r_2) / 2\Delta t$  とし、式(7)より、

$$q_3 = \frac{C_p \gamma \pi C_1}{3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots 57$$

式54, 55, 57より  $q_1 - q_2 = q_3$  として、

$$\frac{\lambda}{3} \left\{ B_1 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline 4 & -4 & 0 \\ \hline 1 & -1 & 0 \\ \hline \end{array} + B_2 \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline 0 & -4 & 4 \\ \hline 0 & -1 & 1 \\ \hline \end{array} \right\} = \frac{C_p \gamma C_1}{3} \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots 58$$

ここで、温度伝導率  $a$  は  $a = \lambda / C_p \gamma$  より、

$$a = \begin{array}{|c|c|c|} \hline A_1 & A_2 & A_3 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline -A_1 & -A_2 & -A_3 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline B_1 & -B_1 & 0 \\ \hline 4B_1 & -4B_1 & 0 \\ \hline B_1 & -B_1 & 0 \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & -B_2 & B_2 \\ \hline 0 & -4B_2 & 4B_2 \\ \hline 0 & B_2 & B_2 \\ \hline \end{array} \quad \dots\dots 59$$

式59は線状熱源の場合で、不等間隔に温度センサが埋設された場合の温度伝導率の同定式である。



### 3.3 点熱源の場合の温度伝導率の同定式

#### 3.3.1 差分法による温度伝導率の測定式

測定式のモデルは図-4と同様とする(ただし、極座標系とする)。\$r\_0\$ から \$r\_1\$ に流入する熱流、\$r\_1\$ から \$r\_2\$ に流出する熱流を各々 \$q\_1, q\_2\$ とし、\$r\_1\$ で温度上昇に用いられる熱流を \$q\_3\$ とする。3.2.1と同様に展開すると、

$$C_{p\gamma} \frac{4\pi}{3} \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^3 \right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} / \Delta t = \frac{1}{2} \frac{\lambda}{\Delta r_1} 4\pi \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots 60$$

\$a \equiv \frac{\lambda}{C\_{p\gamma}}\$ より、

$$a = \frac{2 \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^3 \right\} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}}{3 \Delta t \left\{ \frac{(r_1 - \Delta r_1/2)^2}{\Delta r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{(r_1 + \Delta r_2/2)^2}{\Delta r_2} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}} \quad \dots\dots 61$$

すなわち、式61が温度伝導率を求める同定式である。

#### 3.3.2 スプライン関数法による温度伝導率の同定式

点熱源の場合について、温度伝導率の測定式60と同様に展開する。

$$q_3 = C_{p\gamma} \frac{4\pi}{3} \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^3 \right\} \int_{r_0}^{r_1} \{ \psi(t_2, r) - \psi(t_0, r) \} dr / (\Delta r_1 + \Delta r_2) / 2 \Delta t$$

$$= C_{p\gamma} \frac{4\pi}{9} D_1 \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 \end{bmatrix} \quad \dots\dots 62$$

ここで、

$$D_1 \equiv \left\{ \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^3 - \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^3 \right\} / (\Delta r_1 + \Delta r_2) / 2 \Delta t$$

\$r\_1\$ に流入する熱流 \$q\_1\$ は同様に次式となる。

$$q_1 = \frac{\lambda}{\Delta r_1} \frac{4\pi}{3} \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^2 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} / 2 \Delta t \quad \dots\dots 63$$

$$E_1 \equiv \left( r_1 - \frac{\Delta r_1}{2} \right)^2 / \Delta r_1 / 2 \Delta t$$

$$E_2 \equiv \left( r_1 + \frac{\Delta r_2}{2} \right)^2 / \Delta r_2 / 2 \Delta t$$

として、\$q\_1 - q\_2\$ は、

$$q_1 - q_2 = \frac{4\pi\lambda}{3} \left\{ E_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \dots\dots 64$$

\$q\_1 - q\_2 \equiv q\_3\$ より、

$$C_p \gamma \frac{4\pi}{9} D_1 \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 \end{bmatrix} = \frac{4\pi\lambda}{3} \left\{ E_1 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 4 & -4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} + E_2 \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \right\} \quad \dots\dots 65$$

$a = \lambda / C_p \gamma$  より,

$$a = \frac{\begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ -A_1 & -A_2 & -A_3 \end{bmatrix}}{3 \left\{ \begin{bmatrix} E_1 & -E_1 & 0 \\ 4E_1 & -4E_1 & 0 \\ E_1 & -E_1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -E_2 & E_2 \\ 0 & -4E_2 & 4E_2 \\ 0 & -E_2 & E_2 \end{bmatrix} \right\}} \quad \dots\dots 66$$

式66は点熱源の場合で、不等間隔に温度センサが埋設された場合の温度伝導率の同定式である。

#### § 4. あとがき

原位置での温度伝導率の同定法として線状熱源、点熱源を壁体内に埋設し、温度変化を計測することにより求められる方法の理論展開を行なった。

各々の熱源において、各々差分法およびスプライン関数法の応用による同定式を求めることができたが、この測定式は熱的異方性、熱伝導率と温度伝導率の同時同定法にスムーズに展開できる利点を有しており、今後この方式を中心に研究を進めてゆきたいと考えている。

#### <参考文献>

- 1) 羽根：“実構造体に於ける多次元方向温度伝導率のシステム同定（その1）”日本建築学会論文報告集 第318号（昭和57年8月）
- 2) 羽根：“同上（その2）”日本建築学会論文報告集 第324号（昭和58年2月）
- 3) 羽根：“同上（その3）”（投稿中）
- 4) 羽根：“同上（その5）”（投稿中）
- 5) 羽根：“同上（その6）”（投稿中）
- 6) 羽根：“重回帰分析法による温度伝導率の算定”日本建築学会秋季大会（近畿）（昭和55年9月）
- 7) 羽根：“実構造体に於ける多次元方向温度伝導率のシステム同定（その4）”日本建築学会秋季大会（東北）（昭和57年10月）
- 8) T. Hane: “A Method for the Multidimensional Thermal Diffusivity Measurement by Means of the Variation Approximate Method and Multiple Linear Regression Analysis” Proceedings of 1st Japan Symposium on Thermophysical Properties, 1980.
- 9) T. Hane: 同上, 2nd Symposium, 1981.
- 10) T. Hane & T. Mizuno: 同上, 3rd Symposium, 1982.
- 11) 羽根：“変分法および重回帰分析法による温度伝導率の算定”清水建設研究所報 第34号（1981年）
- 12) 羽根：“原位置での多次元方向温度伝導率の同定法（その1）”清水建設研究所報 第35号（1981年）
- 13) 羽根：“同上（その2）”清水建設研究所報 第36号（1982年）
- 14) 羽根：“同上（その3）”清水建設研究所報 第37号（1982年）
- 15) 羽根：“同上（その4）”清水建設研究所報 第38号（1983年）
- 16) T. Hane: “System Identification of Multidimensional Thermal Diffusivity for Actual Structures (1)” SHIMIZU Technical Research Bulletin, No.1 (1982)
- 17) T. Hane: “System Identification of Multidimensional Thermal Diffusivity for Actual Structures (2)” SHIMIZU Technical Research Bulletin, No.2 (1983)