

地盤 — 基礎系における波動問題

—基礎と地盤に関する動力学的研究—

山 原 浩

§1. はじめに

建築土木のすべての構造物は地盤によって支持されている。両者の間には静的な荷重の釣合いのほかに、動的な力の交流が絶えず生じている。

地震や交通機関の振動の場合、地盤は構造物に対して能動的に作用するのであるが、機械基礎等のように、地盤が構造物から受動的に力を受ける場合もある。

そして、構造物と地盤相互の動的な力学機構を追求することは、耐震理論上あるいは防振理論上、極めて重要な課題となっている。

構造物の中で機械基礎が最も単純な形態をしている。

また、外力が機械の定常回転による場合が多く、調和波形の連続波動として表現される。このため、数学的な取扱いが非常に単純化され、人工的な諸実験が比較的容易であるので、理論機構の確認に好適なモデルの役割を果たしている。

機械基礎に関する研究それ自体も、工場建設の比重の高い建設業界において、極めて価値が高いのであるが、これらの研究成果の応用によって、一般構造物の耐震理論に展開される見通しから、その研究に一層の刺激を与えている。

本研究は、基礎として機械基礎を想定し、基礎と地盤との連成波動特性を求め、機械基礎に関する従来の経験と照合し、その理論値の適否を検討することから出発した。

もともと、地盤は完全な弾性体ではない。しかし地震波の伝播、あるいは地震動を験震学的に研究した結果では、地盤の振動に関するかぎり、これを弾性体とみなしても、その振動現象を論ずるのに不都合が起らないばかりか、土地を弾性体として取扱わなければ説明のできな

いことが非常に多い。

このような関係で、まず地盤を弾性体として様々な条件における問題を解き、必要な実験を並行して、基礎—地盤系における動力学的機構を調べる方針でいる。

その後において、地盤の粘性を考慮した粘弾性波の問題や、土質力学的な知識との組合せによって、変形が大きくなったときの破壊や、塑性的流動化現象等の解明に発展させていく予定になっている。

また、波動の形も調和波形から衝撃波の問題に移り、さらに実際の地震動へと展開していく方針である。

今回は、そのほんのかけだしの意味で、二つの問題について検討してみた。

一つは、不連続層がある場合の波動現象を、一つは、強制振動を受ける基礎の運動について解析したものである。

これらの結果は、機械基礎等の設計には直ちに実用化されるものであるが、さらに巨視的に見た地盤—基礎系の振動問題に対する応用展開へと継続していくつもりでいる。

§2. 不連続層による共振現象

地盤に伝播される振動を波動問題として取扱うとき、様々な興味ある現象を呈することがわかる。その一つに不連続層における波動の反射による共振現象がある。

これは先日、愛知県の埋立地に建設中のトヨタ自動車工業鍛造工場において、各種機械基礎の強制振動試験¹⁾を行なったところ、図—1に示すように、隣接する基礎によってはさまれた中間の地盤が、基礎の振幅に無関係に、ある振動数において共振現象を呈することを発見し

た。そして、その共振振動数が基礎間の距離が遠いほど低く、接近しているほど高いことを知った。

また、この現象における地盤の振幅は、基礎自体の振幅の数倍に達することがあり、基礎の防振設計上見落してはならない重要な要素になっていることがわかった。

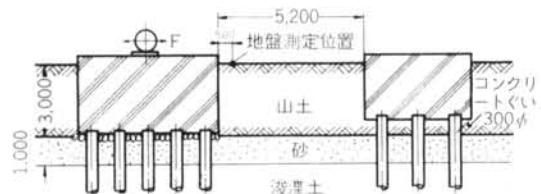
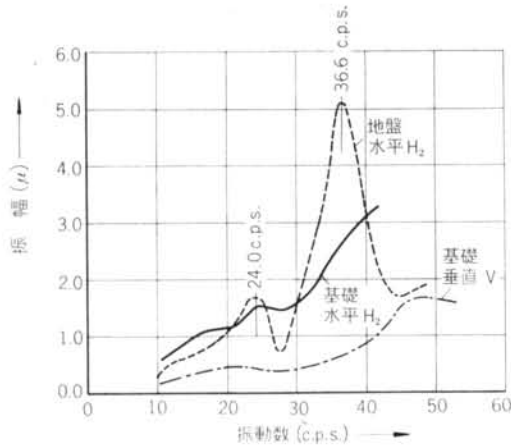


図-1 基礎の強制振動試験結果の例(トヨタ自動車・鋸造工場)

実際にこのような現象が存在することは、波動の常識から容易に説明されるのであるが、本章においては、不連続層における波動の反射による共振現象を、一般論として検討することにした。

図-2を参照し、いま(I)より(III)へ向って進行する波動について考えてみよう。

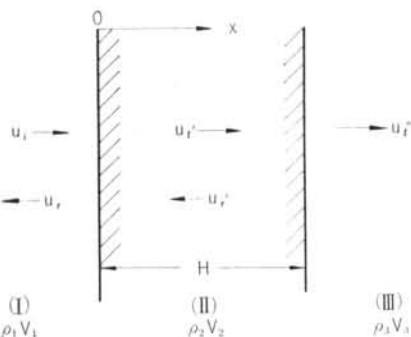


図-2

入射する(I)中の変位波動を u_1 とし、 $x=0$ なる界面に直角に入射するものとする。 u_1 が $x=0$ なる界面に入

射すると、その面における反射波 u_r と屈折波 u_i' と、 $x=H$ なる(II)と(III)の界面における反射波 u_r' と屈折波 u_i'' の4種類の波動が誘起され、初期入射波 u_1 と釣合いを保つ。

いま、入射波 u_1 を振動数 ω 、振幅 U_0 なる調和波形連続波動であるとする、

$$u_1 = U_0 e^{i h(V_1 t - x)} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここで $i = \sqrt{-1}$ 、 $h = \omega/V$ であって、 V は波動の伝播速度である。縦波および横波の伝播速度を V_p 、 V_s とすると、

$$V_p = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}} \quad V_s = \sqrt{\frac{E}{\rho} \cdot \frac{1}{2(1+\nu)}} \quad \dots\dots\dots(2)$$

E は縦弾性係数、 ρ は密度、 ν はポアソン比。

もし、ラーメの常数 λ 、 μ を用いて表わせば、

$$V_p = \sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}} \quad V_s = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} \quad \dots\dots\dots(3)$$

u_r 、 u_i' 、 u_r' 、 u_i'' も当然、弾性波動方程式を満足する形で表わされるから、 A 、 B 、 C 、 D を未定係数として

$$u_r = A e^{i h(V_1 t + x)} \quad \dots\dots\dots(4)$$

$$u_i' = B e^{i h \beta_{12}(V_2 t - x)} \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$u_r' = C e^{i h \beta_{12}(V_2 t + x)} \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$u_i'' = D e^{i h \beta_{13}(V_3 t - x)} \quad \dots\dots\dots(7)$$

ここで V_1 、 V_2 、 V_3 はそれぞれ媒体(I)(II)(III)における波動の伝播速度であり、 $\beta_{12} = V_1/V_2$ 、 $\beta_{13} = V_1/V_3$ である。

u_1 、 u_r 、 u_i' 、 u_r' 、 u_i'' に対する波動応力をそれぞれ f_1 、 f_r 、 f_i' 、 f_r' 、 f_i'' とすると、縦波の場合(横波の場合は $\lambda+2\mu$ を μ とする)、

$$f_1 = (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial u_1}{\partial x} = -i h U_0 (\lambda_1 + 2\mu_1) e^{i h(V_1 t - x)} \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$f_r = (\lambda_1 + 2\mu_1) \frac{\partial u_r}{\partial x} = i h A (\lambda_1 + 2\mu_1) e^{i h(V_1 t + x)} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$f_i' = (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial u_i'}{\partial x} = -i \beta_{12} h B (\lambda_2 + 2\mu_2) e^{i \beta_{12} h(V_2 t - x)} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$$f_r' = (\lambda_2 + 2\mu_2) \frac{\partial u_r'}{\partial x} = i \beta_{12} h C (\lambda_2 + 2\mu_2) e^{i \beta_{12} h(V_2 t + x)} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$f_i'' = (\lambda_3 + 2\mu_3) \frac{\partial u_i''}{\partial x} = -i \beta_{13} h D (\lambda_3 + 2\mu_3) e^{i \beta_{13} h(V_3 t - x)} \quad \dots\dots\dots(12)$$

未定係数 A 、 B 、 C 、 D を決定するために、境界条件 $x=0$ および $x=H$ の界面における変位と応力の釣合いから、

$x=0$ のとき

$$u_1 + u_r = u_i' + u_r' \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$f_1 + f_r = f_i' + f_r' \quad \dots\dots\dots(14)$$

$x=H$ のとき

$$u'_t + u'_r = u''_t \quad \dots\dots\dots(5)$$

$$p'_t + p'_r = p''_t \quad \dots\dots\dots(6)$$

$$\text{式(3)から } U_0 + A = B + C \quad \dots\dots\dots(7)$$

$$\text{式(4)から } A - U_0 = \frac{\beta_{12}(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_1 + 2\mu_1} (C - B) \quad \dots\dots\dots(8)$$

$$\text{式(5)から } Be^{-i\beta_{12}hH} + Ce^{i\beta_{12}hH} = De^{-i\beta_{13}hH} \quad \dots\dots\dots(9)$$

$$\text{式(6)から } \frac{\beta_{12}}{\beta_{13}} \cdot \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_3 + 2\mu_3} (Ce^{i\beta_{12}hH} - Be^{-i\beta_{12}hH}) = De^{-i\beta_{13}hH} \quad \dots\dots\dots(10)$$

ここで、 $\lambda + 2\mu = \rho V^2$ (横波の場合は $\mu = \rho V^2$) なる関係を代入し、

$$\frac{\beta_{12}(\lambda_2 + 2\mu_2)}{\lambda_1 + 2\mu_1} = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_1 V_1} = \alpha_{12} \quad \dots\dots\dots(11)$$

$$\frac{\beta_{12}}{\beta_{13}} \cdot \frac{\lambda_2 + 2\mu_2}{\lambda_3 + 2\mu_3} = \frac{\rho_2 V_2}{\rho_3 V_3} = \alpha_{32} \quad \dots\dots\dots(12)$$

なお、 ρV なる量は、音響学で特性インピーダンスと呼んでいるものである。

式(11)、(12)をそれぞれ式(8)、(9)に代入し、式(7)~(9)の連立方程式から、 A 、 B 、 C 、 D は次のように決まる。

$$A = \frac{(1 - \alpha_{12} + \alpha_{32} - \alpha_{12}\alpha_{32}) - 2(\alpha_{32} - 1)e^{-i(\beta_{12} + \beta_{13})hH} + (1 - \alpha_{12} - \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32})e^{-2i\beta_{12}hH}}{(1 + \alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32}) - (1 - \alpha_{12} - \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32})e^{-2i\beta_{12}hH}} U_0 \quad \dots\dots\dots(13)$$

$$B = \frac{2(1 + \alpha_{32})}{(1 + \alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32}) - (1 - \alpha_{12} - \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32})e^{-2i\beta_{12}hH}} U_0 \quad \dots\dots\dots(14)$$

$$C = \frac{2(\alpha_{32} - 1)e^{-2i\beta_{12}hH}}{(1 + \alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32}) - (1 - \alpha_{12} - \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32})e^{-2i\beta_{12}hH}} U_0 \quad \dots\dots\dots(15)$$

$$D = \frac{4\alpha_{32}e^{-i(\beta_{12} + \beta_{13})hH}}{(1 + \alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32}) - (1 - \alpha_{12} - \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32})e^{-2i\beta_{12}hH}} U_0 \quad \dots\dots\dots(16)$$

かくして、(I)(II)(III)における波動変位 U_I 、 U_{II} 、 U_{III} は、

$$U_I = U_0 e^{i(V_1 t - x)} + A e^{i h(V_1 t + x)} \quad \dots\dots\dots(17)$$

$$U_{II} = B e^{i\beta_{12}h(V_2 t - x)} + C e^{i\beta_{12}h(V_2 t + x - 2H)} \quad \dots\dots\dots(18)$$

$$U_{III} = D e^{i\beta_{13}h[V_3 t - x - (\beta_{12} - 1)H]} \quad \dots\dots\dots(19)$$

として表わされる。

以上の結果を一般式として、実際上問題となる幾多の実例について、検討を進めることにしよう。

2.1 二つの基礎にはさまれた地盤の共振について

図-3 に示すように、二つの基礎が隣接してある場合一方の基礎から発する波動によって、中間の地盤に共振現象を生ずることがある。この場合、媒体(I)および

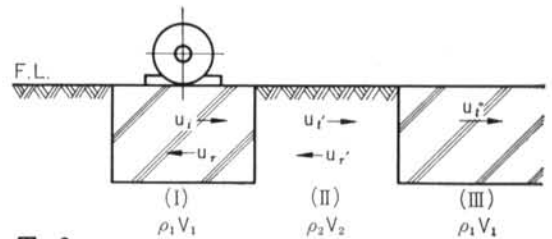


図-3

(III)を同一物質(コンクリート)とすれば、 $\beta_{32} = V_1/V_3 = 1$ 、 $\alpha_{32} = \rho_2 V_2/\rho_3 V_3 = \alpha_{12}$ であるから、

$$U_I = U_0 e^{i h(V_1 t - x)} + \frac{(1 - \alpha_{12}^2)\{1 - e^{-2i\beta_{12}hH}\}U_0}{(1 + \alpha_{12})^2 - (1 - \alpha_{12})^2 e^{-2i\beta_{12}hH}} e^{i h(V_1 t + x)} \quad \dots\dots\dots(20)$$

$$U_{II} = \frac{2(1 + \alpha_{12})U_0 e^{i\beta_{12}h(V_2 t - x)} - 2(1 - \alpha_{12})U_0 e^{i\beta_{12}h(V_2 t + x - 2H)}}{(1 + \alpha_{12})^2 - (1 - \alpha_{12})^2 e^{-2i\beta_{12}hH}} \quad \dots\dots\dots(21)$$

$$U_{III} = \frac{4\alpha_{12}U_0}{(1 + \alpha_{12})^2 - (1 - \alpha_{12})^2 e^{-2i\beta_{12}hH}} e^{i h[V_3 t - x - (\beta_{12} - 1)H]} \quad \dots\dots\dots(22)$$

いまここでは U_{II} を問題としている。また入射波 u_i を、

$$u_i = U_0 \cos_1 h(V_1 t - x) \quad \dots\dots\dots(23)$$

として、(II)における変位波動を式(21)より計算すると、

$$\begin{aligned} & (1 + \alpha_{12})^2 - (1 - \alpha_{12})^2 e^{-2i\beta_{12}hH} \\ &= (1 + \alpha_{12})^2 - (1 - \alpha_{12})^2 \cos 2\beta_{12}hH + i(1 - \alpha_{12})^2 \sin 2\beta_{12}hH \\ &= \sqrt{(1 + \alpha_{12})^4 + (1 - \alpha_{12})^4 - 2(1 + \alpha_{12})^2(1 - \alpha_{12})^2 \cos 2\beta_{12}hH} \end{aligned}$$

であるから、

$$U_{II} = \frac{2U_0[(1+\alpha_{12})\frac{\cos}{\sin}\beta_{12}h(V_2t-x+\phi_1) - (1-\alpha_{12})\frac{\cos}{\sin}\beta_{12}h(V_2t+x-2H+\phi_1)]}{\sqrt{(1+\alpha_{12})^4 + (1-\alpha_{12})^4 - 2(1+\alpha_{12})^2(1-\alpha_{12})^2 \cos 2\beta_{12}hH}} \quad \dots\dots\dots 34$$

ただし、 ϕ_1 は位相差で、 $\tan \phi_1 = \{(1-\alpha_{12})^2 \sin 2\beta_{12}hH\} / \{(1+\alpha_{12})^2 - (1-\alpha_{12})^2 \cos 2\beta_{12}hH\}$ である。

さて、図-3に示すように、コンクリート→地盤→コンクリートの場合、 $\alpha_{12} = \rho_2 V_2 / \rho_3 V_3 < 1$ であるから、式34から、 $-\beta_{12}hx - (2n-1)\pi = \beta_{12}h(x-2H)$ $n=1, 2, 3, \dots$ のとき、すなわち、

$$x = H - \frac{(2n-1)\pi V_2}{2\omega} = H - \frac{(2n-1)V_2}{4f} \quad (f = \frac{\omega}{2\pi}) \quad \dots\dots\dots 35$$

のとき U_{II} は最大値をとり、その時の振幅を $|U_{II}|$ とすれば、

$$|U_{II}| = \frac{4U_0}{\sqrt{(1+\alpha_{12})^4 + (1-\alpha_{12})^4 - 2(1+\alpha_{12})^2(1-\alpha_{12})^2 \cos 2\beta_{12}hH}} \quad \dots\dots\dots 36$$

となる。

あるいは、

$$|U_{II}| = \frac{4U_0}{\sqrt{(1+\alpha_{12})^4 + (1-\alpha_{12})^4 - 2(1+\alpha_{12})^2(1-\alpha_{12})^2 \cos(2\pi H/V_2)}} \quad \dots\dots\dots 37$$

式37は $\cos(2\omega H/V_2) = 1$ すなわち、

$$\omega_n = \frac{n\pi V_2}{H} \quad \text{または} \quad f_n = \frac{nV_2}{2H} \quad \dots\dots\dots 38$$

(ただし $n=1, 2, 3, \dots$)のとき $|U_{II}|$ は、最大となって、その振幅 $|U_{II}|_{max}$ は、

$$|U_{II}|_{max} = \frac{4U_0}{\sqrt{(1+\alpha_{12})^4 + (1-\alpha_{12})^4 - 2(1+\alpha_{12})^2(1-\alpha_{12})^2}} = \frac{U_0}{\alpha_{12}} \quad \dots\dots\dots 39$$

式39において、もし一様な媒体で界面が存在しない場合には $\alpha_{12} = 1$ であり、 $|U_{II}|_{max} = U_0$ となり、界面 II→III, II→I において全反射する場合は $\alpha_{12} = 0$ であり、波動のエネルギーが II から外部にもれないのであるから $|U_{II}|_{max}$ は無限大となる。しかし実際には、 $\alpha_{12} = 0$ ($\rho_1 V_1 = \infty$ または $\rho_2 V_2 = 0$) になることは絶対にありえないのであるから、地盤の粘性を考えなくても、振幅が無限大になることはありえない。なお式38の ω_n, f_n は共振条件を与える円振動数および振動数を意味している。

つぎに、式37において $|U_{II}|$ を最小にする条件は $\cos(2\omega H/V_2) = -1$ 、すなわち $2\omega H/V_2 = (2n-1)\pi$ ($n=1, 2, 3, \dots$)であるから、この時の ω, f を ω_0, f_0 と表わすと

$$\omega_0 = \frac{(2n-1)\pi V_2}{2H} \quad \text{または} \quad f_0 = \frac{(2n-1)V_2}{4H} \quad \dots\dots\dots 40$$

であり、その振幅 $|U_{II}|_{min}$ は、

$$|U_{II}|_{min} = \frac{4U_0}{\sqrt{(1+\alpha_{12})^4 + (1-\alpha_{12})^4 + 2(1+\alpha_{12})^2(1-\alpha_{12})^2}} = \frac{2}{1+\alpha_{12}^2} U_0 \quad \dots\dots\dots 41$$

となる。

以上の結果を要約すると、

$H > (2n-1)V_2/4f$ であれば、中間層(II)に振幅が最大となる位置が定まり、その振幅は粘性減衰を無視するとき、 $f_n = nV_2/2H$ にて最大値 U_0/α_{12} となり、 $f_0 = (2n-1)V_2/4H$ のとき最小値 U_0 となる。

α_{12} はコンクリート→地盤の場合、 $\rho_2/\rho_1 = 2/3, V_2/V_1 = 1/10$ として $\alpha_{12} = 1/15$ となる。したがって、粘性減衰を無視すれば、地盤の振幅が基礎の振幅の15倍に達することになる。二つの基礎間に埋め戻す土を砂質系にし、十分に締め固めることは ρ_2, V_2 を大きくし有効である。

実際の設計において、基礎の配置を定める場合に、式40より、

$$H = (2n-1)V_2/4f_0 \quad \dots\dots\dots 42$$

なるように、基礎の間隔を定める心構えが必要である。例えば、 $f_0 = 20\text{c/s}, V_2 = 160\text{m/s}$ である場合、 $H = 2\text{m}, 6\text{m}, 10\text{m}, \dots$ となり、もしこの中間の $H = 4\text{m}, 8\text{m}, 12\text{m}, \dots$ に配置されれば、防振上極めて不利である。

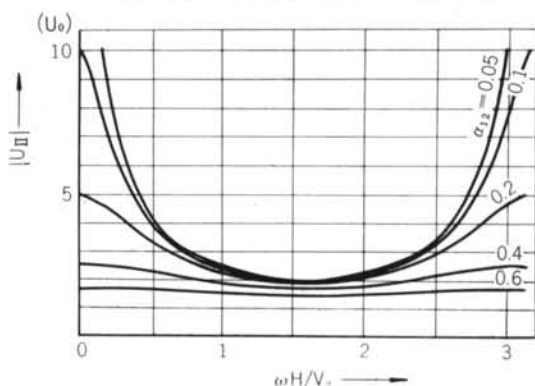


図-4 中間層における最大変位

図-4 は式(37)について示したもので、 $|U_{II}|$ は $\omega H/V_2$ の π を周期として変化する。

2.2 地中にある障壁の効果

もし、地中にコンクリート等の障壁がある場合、それを透過する波動がどんな特性をもっているか、調べてみよう。

地盤→コンクリート→地盤の場合として、(III)における変位波動は式(32)で与えられる。入射波 u_i を、

$$u_i = U_0 \frac{\cos}{\sin} \{h(V_1 t - x)\}$$

としたときの(III)における変位波動は、式(32)より、

$$U_{III} = \frac{4\alpha_{12} U_0 \frac{\cos}{\sin} \{h[V_1 t - x - (\beta_{12} - 1)H + \phi_1]\}}{\sqrt{(1 + \alpha_{12})^4 + (1 - \alpha_{12})^4 - 2(1 - \alpha_{12}^2)^2 \cos 2\beta_{12} h H}} \quad \dots\dots\dots(43)$$

いま、入射波に対する(III)中の変位波動伝達率を τ_{13} とすると、

$$\tau_{13} = \frac{4\alpha_{12}}{\sqrt{(1 + \alpha_{12})^4 + (1 - \alpha_{12})^4 - 2(1 - \alpha_{12}^2)^2 \cos(2\omega H/V_2)}} \quad \dots\dots\dots(44)$$

τ_{13} を最大にする条件は、 $\cos(2\omega H/V_2) = 1$ すなわち $\omega = n\pi V_2/H$ または $f = nV_2/2H$ $\dots\dots\dots(45)$

のときであり、そのとき τ_{13} は 1 となる。 τ_{13} を最小にする条件は、 $\cos(2\omega H/V_2) = -1$ すなわち、

$$\omega = (2n - 1)\pi V_2/2H \quad \text{または} \quad f = (2n - 1)V_2/4H \quad \dots\dots\dots(46)$$

のときであり、そのとき τ_{13} は、

$$|\tau_{13}|_{min} = 2\alpha_{12}/(1 + \alpha_{12}^2) \quad \dots\dots\dots(47)$$

となる。

さて実際に、地中にコンクリート等の障壁を設けて防振効果を期待するときには、その障壁の厚さを式(46)より

$$H = (2n - 1)V_2/4f \quad \dots\dots\dots(48)$$

とする。例えば、 $V_2 = 1000\text{m/s}$ 、 $f = 50\text{c/s}$ としたとき、 $H = 5\text{m}$ 、 15m 、 25m 、 \dots となる。

地盤→コンクリート→地盤としたとき、

$$\alpha_{12} = \rho_2 V_2 / \rho_1 V_1 \approx 15$$

ぐらいになるから、 $|\tau_{13}|_{min} = 0.133$ となり、透過波の振幅は入射波の約13%になることがわかる。

図-5 は τ_{13} について図示したもので、式(44)から当然 $\omega H/V_2$ の π を周期として変化する。

また、以上の計算の取扱いにおいて $\alpha_{12} > 1$ なる制約がないのであるから、以上の結果は $\alpha_{12} < 1$ の場合にもそのまま適用される。むしろ実際には、サンドシール等 $\alpha_{12} < 1$ の場合の方が応用されやすい。この場合の理論的取扱いは、項を改めて次に検討することにしよう。

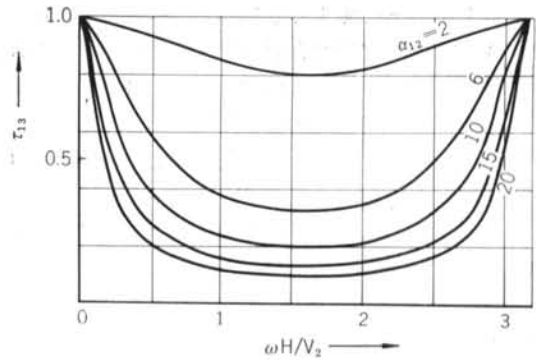


図-5 障壁による変位波動伝達率

2.3 絶縁層の効果

ひと昔、機械基礎の防振の目的で、図-6 に示すようなサンドシール基礎が流行したことがある。

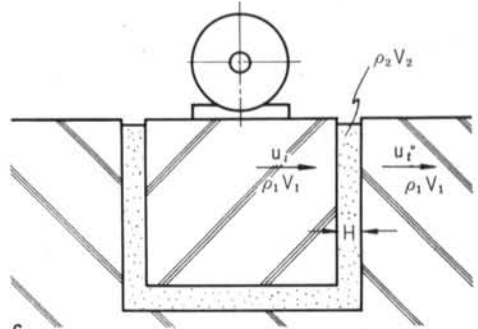


図-6

この場合の基礎から外部に透過する変位波動伝達率は式(44)で与えられる。そして、 τ_{13} を最小にする砂層の厚さは式(48)で、その時の τ_{13} 値は式(47)で与えられる。しかし $V_2 = 150\text{m/s}$ 、 $f = 25\text{c/s}$ としたとき $H = 1.5\text{m}$ となるが、実際には $H = 5 \sim 20\text{cm}$ ぐらいが慣例となっている。

式(44)について、各条件における砂層の効果を計算し、図-7 に示した。

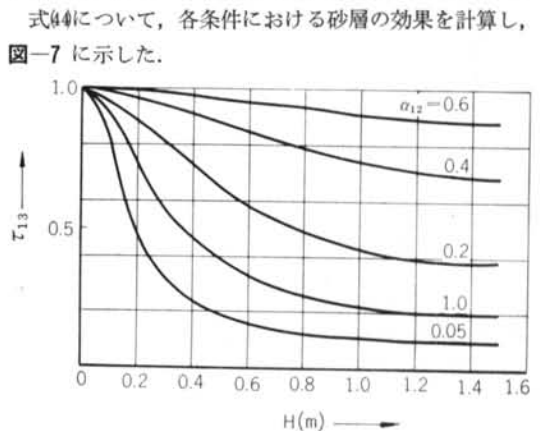


図-7 砂絶縁層による変位波動伝達率 ($V_2 = 150\text{m/s}$ 、 $f = 25\text{c/s}$ の場合)

同図より $\alpha_{12}=0.05$ としても、 $H=5\sim 10\text{cm}$ では防振の効果はほとんど期待できず、砂の層厚を少なくとも 30cm 以上にしないと意味がないことがわかる。

したがって、サンドシール基礎とは、振動数が余程高い場合か、砂の層厚を極めて厚くしない限り、顕著な効果を期待できないのである。

サンドシールに代って図-8に示すような、防振ゴムや防振マットが最近一般に使われるようになった。防振ゴムには、スプリング効果のほかに、この種の防振効果を兼ね備えている。

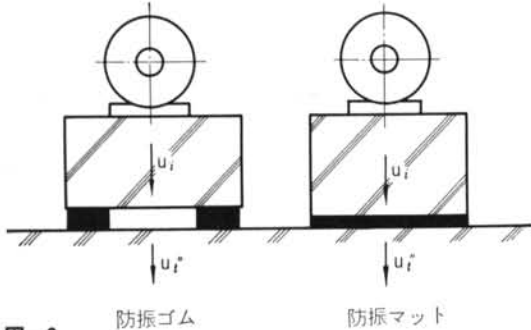


図-8

ゴムのヤング率 $E_2=40\text{kg/cm}^2$ 、密度 $\rho_2=1.2\text{g/cm}^3$ (C. G. S.)、コンクリートのヤング率 $E_1=2\times 10^5\text{kg/cm}^2$ 、密度 $\rho_1=2.4\text{g/cm}^3$ (C. G. S.) とすると、

$$\alpha_{12} = \rho_2 V_2 / \rho_1 V_1 = \sqrt{\rho_2 E_2} / \sqrt{\rho_1 E_1} = 0.01$$

式(44)によって τ_{13} を計算し、図-9に示した。

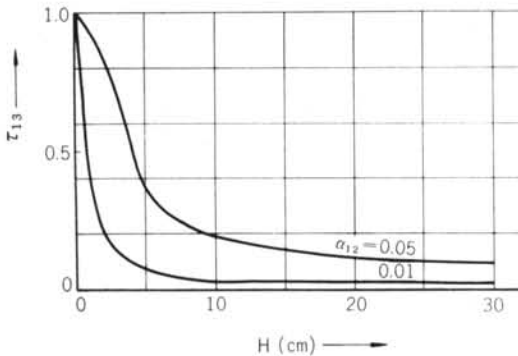


図-9 防振ゴムによる変位波動伝達率 ($V_2=30\text{m/s}$, $f=25\text{c/s}$ の場合)

同図より、防振ゴムのように軟かい (ρV が小さい) 媒体の場合には、変位波動伝達率は極めて小さくなり、防振の効果が高くなることがわかる。例えば、 $\alpha_{12}=0.01$ 、 $f=25\text{c/s}$ のとき、ゴム厚 4cm に対して変位波動伝達率は 10% である。

また、振動数がさらに高くなると、薄いゴム厚でも、

τ_{13} は著しく小さくなるから、防振効果を生ずるゆえんでもある。

ただし、ここでは防振ゴムを透過する波動エネルギーについてのみ考えている。当然、防振ゴムに支持された Mass によって、機械的な振動系が形成される。この系による力の伝達に関しては、波動の問題とは別に考慮しなくてはならないのである。

2.4 成層による地盤の共振

図-10に示すように、地表面に波動源となる基礎があり、地盤に特性インピーダンス ρV の著しく異なる不連続層がある場合、全く同様の問題として取扱われる。

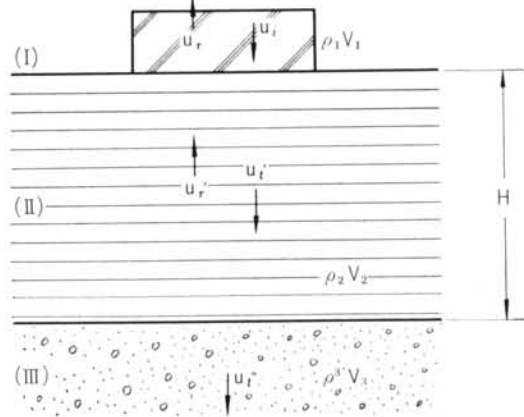


図-10

これは昨年、山口県の徳山曹達工場内の地盤振動を測定調査したところ、コンプレッサーによって地盤に誘起された振動 (振動数 4.6c/s) が、約 $500\sim 800\text{m}$ の範囲に分布していることを知った。波動源となるコンプレッサーの基礎自体は、別に振動障害を伴っているわけではないが、約 200m も離れた研究室にある諸精密計測器に、軽微ながら障害を起したのである。このような現象も、あるいは本項で検討するような成層による地盤の共振現象ではないかと想像している。

この場合の理論的取扱いを進めていこう。

(II)層(上部軟弱層)における変位波動は式(28)によって

$$U_{II} = B e^{i\beta_2 z h (V_2 t - x)} + C e^{i\beta_2 z h (V_2 t + x - 2H)}$$

ここで、 B および C は式(24)、(25)から、

$$B = \frac{2(1 + \alpha_{32})}{\Delta_1 - \Delta_2 e^{-2i\beta_2 z h H}} U_0$$

$$|B| = \frac{2(1 + \alpha_{32})}{\sqrt{\Delta_1^2 + \Delta_2^2 - 2\Delta_1 \Delta_2 \cos 2\beta_2 z h H}} U_0$$

$$C = \frac{-2(1 - \alpha_{32}) e^{-2i\beta_2 z h H}}{\Delta_1 - \Delta_2 e^{-2i\beta_2 z h H}} U_0$$

$$|C| = \frac{-2(1-\alpha_{32})}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos 2\beta_{12}hH}} U_0 \quad \text{ただし, } d_1 = 1 + \alpha_{12} + \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32}$$

$$d_2 = 1 - \alpha_{12} - \alpha_{32} + \alpha_{12}\alpha_{32}$$

入射波を $u_i = \frac{\cos}{\sin} h(V_1 t - x)$ としたとき,

$$U_{II} = \frac{2(1+\alpha_{32}) \frac{\cos}{\sin} \beta_{12} h(V_2 t - x + \phi_1) - 2(1-\alpha_{32}) \frac{\cos}{\sin} \beta_{12} h(V_2 t + x - 2H + \phi_2)}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos 2\beta_{12}hH}} U_0 \quad \dots\dots\dots(49)$$

ここで, $\phi_1 = \tan^{-1} \frac{d_2 \sin 2\beta_{12}hH}{d_1 - d_2 \cos 2\beta_{12}hH}$ $\phi_2 = \tan^{-1} \frac{d_1 \sin 2\beta_{12}hH}{d_1 \cos 2\beta_{12}hH - d_2}$

$\alpha_{32} = \rho_2 V_2 / \rho_3 V_3 < 1$ であるから, 式(49)において $\beta_{12}h(\phi_1 - x) - (2n-1)\pi = \beta_{12}h(x - 2H + \phi_2)$ すなわち,

$$x = H - \frac{(2n-1)\pi V_2}{2\omega} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} = H - \frac{(2n-1)V_2}{4f} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad \dots\dots\dots(50)$$

なる位置で U_{II} は最大になり, その時の振幅を $|U_{II}|$ とすれば,

$$|U_{II}| = \frac{4U_0}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos 2\beta_{12}hH}}$$

$$= \frac{4U_0}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2 \cos(2\omega H/V_2)}} \quad \dots\dots\dots(51)$$

式(51)は $\cos(2\omega H/V_2) = 1$ すなわち,

$$\omega = \frac{n\pi V_2}{H} \quad \text{または} \quad f = \frac{nV_2}{2H} \quad \dots\dots\dots(52)$$

のとき $|U_{II}|$ は最大となって, その振幅 $|U_{II}|_{max}$ は,

$$|U_{II}|_{max} = \frac{4U_0}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 - 2d_1d_2}} = \frac{4U_0}{d_1 - d_2}$$

$$= \frac{2U_0}{\alpha_{12} + \alpha_{32}} \quad \dots\dots\dots(53)$$

となる。

図-11は式(53)を示したものである。

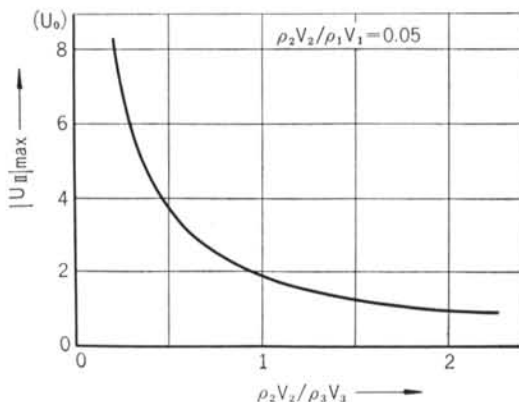


図-11 成層における上部層の最大変位

同図より, 上部層(II)と支持層(III)の特性インピーダンスの比 $\rho_2 V_2 / \rho_3 V_3$ が小さいほど, 上部層における波動変位が大きくなるのがわかる。一般に, 地盤は土質分類によって密度はあまり変わらず, 特性インピーダンス比は速度比によって定まる。

いま上部層を $N=2\sim 6$ の粘性土とし, 支持層を $N>50$

の砂礫層の場合を想定すると, $\alpha_{32} = 1/5$ ぐらいになる。もし, 地中の粘性減衰を無視すれば, 図-11より, 地中の波動変位の最大は, $f = nV_2/2H$ のとき, 入射波の8倍に達することがわかる。

先述の徳山曹達の例の場合, 同工場の地盤が, 深度14mまでは軟弱な粘土-シルト層で, その下に堅い砂礫層が発達し, 典型的な二層性を成している。もし, 上部層の横波の伝播速度を 130m/s とすると, 式(52)より, $n=1$ の場合,

$$f = 130/2 \times 14 = 4.6 \text{ c/s}$$

となって, コンプレッサーの回転数と完全に一致する。

このように, 成層を成す地盤で特性インピーダンス ρV が極端に変化する構成になっている場合には, 機械の回転数の選定に充分注意を要するのである。

さて, 以上はすべて地中における最大変位について論じてきた。そして, 最大変位を生ずる位置は, 式(50)より, $f = nV/2H$ の場合に, ほぼ層の中間 ($x = H/2$) になる。

実際には, 地中よりも地表面における振動が問題になることが多い。

地表面における波動変位を最大にする条件は, 式(50)より, $x=0$ とおいて,

$$H = \frac{(2n-1)V_2}{4f} + \frac{\phi_1 - \phi_2}{2} \quad \dots\dots\dots(54)$$

ここで, $n=1$ (基本波), $\phi_1 = \phi_2$ とすれば,

$$H = \frac{V_2}{4f} \quad \text{または} \quad f = \frac{V_2}{4H} \quad \dots\dots\dots(55)$$

この f を地表層の固有振動数と呼んでいる。入射波をこの振動数としたときの地表面の波動変位 $|U_{II}|_{x=0}$ は, 式(50)を式(54)に代入して,

$$|U_{II}|_{x=0} = \frac{4U_0}{\sqrt{d_1^2 + d_2^2 + 2d_1d_2}} = \frac{2U_0}{1 + \alpha_{12}\alpha_{32}} \quad \dots\dots\dots(56)$$

式(56)より, 地表面における変位は, $\alpha_{12}\alpha_{32} < 1$ としても, 入射波の2倍以上にはなりえないことがわかる。

なお, 式(55)における f は, 地盤の V_2 や H がわからな

くても、地表面における常時微動の観測から、実験的に知ることができるのであり、工場等の建設計画に先立って、地盤の弾性波の性状を調査することも、今後必要になると思っている。

§ 3. 固定基礎の強制振動

機械基礎、すなわち地盤—基礎系に関する理論的な研究は、案外古くから行なわれている。その試みは先ず地盤を質量のないばねと見なし、地盤—基礎系を質点系による機械的振動問題におきかえることから始まった。¹⁾

その後、地盤を半無限弾性体として、波動問題から解析する試みが、鳥海氏²⁾や田治見氏³⁾等によって行なわれた。

これらの解は、実際の現象や傾向をより合理的に説明している。

筆者は、上記二氏とは別の論拠に立ち、むしろ機械的振動問題の考え方の中に、波動的要素を折込んで試算してみたところ、上記二氏の解にほぼ一致した結果が得られたほか、数々の興味ある事実を発見した。

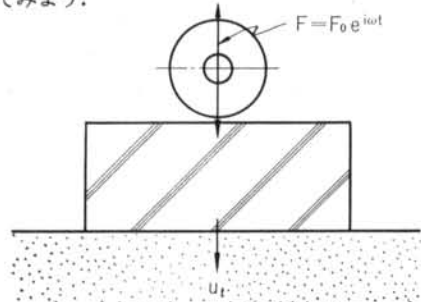
従来、機械的振動問題と波動問題とは別個の問題として取扱われ、各々の分野において発達を遂げている。

しかし、地盤—基礎系のように、純粋なる機械的振動問題とも波動問題とも考えられない系に、あるいは両者の組合せによって現実の説明が合理的になされるのではないかとの着想から出発した。

この種の系は、結局は力の釣合いなのであって、波動現象によって生ずる力を単に組込んだにすぎないのであるが、オリジナルな試みとして、本章において紹介することにした。

3. 1 運動方程式

図—12に示すように、地表面に置かれた固定基礎に、上下または水平方向の力 $F_0 e^{i\omega t}$ が加わった場合について考えてみよう。



図—12

基礎は地盤にくらべて十分に剛であり、基礎の高さは波動の波長にくらべて充分小さいとする。

この場合、基礎は地盤のばね反力のほかに、基礎底面地盤の波動運動による波動圧が加わるから、基礎の運動方程式は次のようになる。

$$M \frac{d^2 u}{dt^2} = -Ku + S(p_t)_{z=0} + F_0 e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots 57$$

- ここで、 M : 基礎の質量 $t \cdot s^2/m$
 u : 振動方向の変位 m
 K : 地盤のばね常数 t/m
 S : 基礎底面の面積 m^2
 F_0 : 加振力振幅 t
 ω : 加振振動数 $1/t$
 p_t : 基礎から地盤に伝播する波動応力 t/m^2

基礎から地盤に伝播する変位波動は、当然、次の形で与えられる。

$$u_t = A e^{i h (Vt - \kappa z)} \quad \dots\dots\dots 58$$

ここで、 A は未定係数、 $i = \sqrt{-1}$ 、 $h = \omega/V$ 、 κ は振動型を意味する係数である。⁴⁾

式58より、

$$(p_t)_{z=0} = \mu \left(\frac{\partial u_t}{\partial z} \right)_{z=0} = -i h \mu A \kappa e^{i\omega t} \\ = -i h A \rho V^2 \kappa e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots 59$$

($\because \mu = \rho V^2$ 、縦波の場合は μ を $\lambda + 2\mu$ とし、同様な結果を得る。)

一方、 $u = (u_t)_{z=0} = A e^{i\omega t}$ であるから、式57は、
 $(K - \omega^2 M + i h \rho V^2 \kappa S) A e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$

$$\therefore A = \frac{F_0}{K - \omega^2 M + i h \rho V^2 \kappa S} \quad \dots\dots\dots 60$$

したがって、 u は、

$$u = \frac{F_0}{\sqrt{(K - \omega^2 M)^2 + (h \rho V^2 \kappa S)^2}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots 61$$

ここで、位相差 ϕ は、

$$\phi = \tan^{-1} \frac{h \rho V^2 \kappa S}{K - \omega^2 M} \quad \dots\dots\dots 62$$

式61を書きかえて、

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{(\rho V \kappa S)^2}{MK} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots 63$$

ここで、 $u_{st} = F_0/K$ 、 $\omega_{st}^2 = K/M$ である。

一方、 K は静的な場合として、地中の応力を Bousinesq 分布とし、基礎底面の圧力の分布を適宜仮定することによって求められる。

3.2 上下動

地表面に集中荷重 P が作用する場合、地中の任意の点における変位 w は、Boussinesq によって次のように与えられている。

$$w = \frac{P}{4\pi\mu R} \left\{ 2(1-\nu) + \frac{Z^2}{R^2} \right\} \quad \dots\dots\dots(64)$$

ただし、 $R = \sqrt{r^2 + Z^2}$ (r, Z は円筒座標)、 ν はポアソン比。

円形基礎の場合について、その中心の変位を w_z とし、基礎底面の圧力を等分布と仮定すると、

$$w_z = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \cdot \frac{P}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{r} r dr d\theta = \frac{1-\nu}{\pi a \mu} P \quad \dots\dots\dots(65)$$

田治見氏は、基礎底面の圧力 p の分布を、

$$p = \frac{P}{2\pi a \sqrt{a^2 - r^2}} \quad \dots\dots\dots(66)$$

と仮定している。この場合、

$$w_z = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \cdot \frac{P}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = \frac{1-\nu}{4a\mu} P \quad \dots\dots\dots(67)$$

$$\left(\because \int_0^a \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr = \left[\sin^{-1} r/a \right]_0^a = \pi/2 \right)$$

なおここで、 a は円形基礎の半径、 μ は地盤の横弾性係数である。

本論では、田治見氏の分布にしたがって、静的な場合の K_z を求めると、

$$K_z = \frac{w_z}{P} = \frac{4a\mu}{1-\nu} = \frac{4a\rho V_s^2}{1-\nu} \quad \dots\dots\dots(68)$$

$$\left(\because \mu = \rho V_s^2 \right)$$

式68を式63に代入すると、

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{(1-\nu)\pi^2\kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots(69)$$

ここで、 $M/\rho a^3$ は質量比と呼ばれるものである。

$\nu = 0.25$, $\kappa = 1.33$ として、式69は、

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 3.272 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

または、 $\dots\dots\dots(70)$

$$u = \frac{3}{16a\rho V_s^2} \cdot \frac{F_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 3.272 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots(71)$$

式70が上下動の振幅特性を表わす解である。

図-13は式70によって $M/\rho a^3$ の各値に対する u/u_{st} を

図示したものである。また、図-14は $a = 1.0\text{m}$, $V_s = 150\text{m/s}$ とした場合の ω に対する u/u_{st} を示したものである。

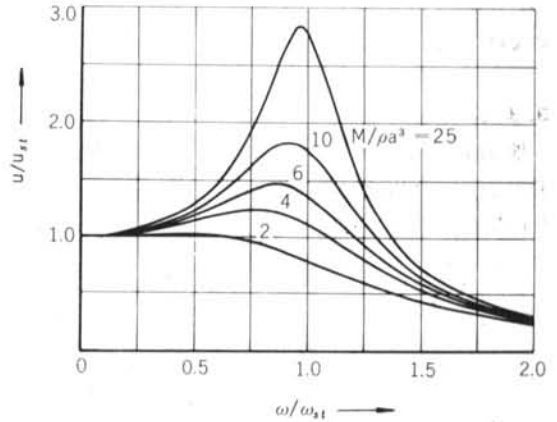


図-13 共振曲線(上下動、一定加振力)

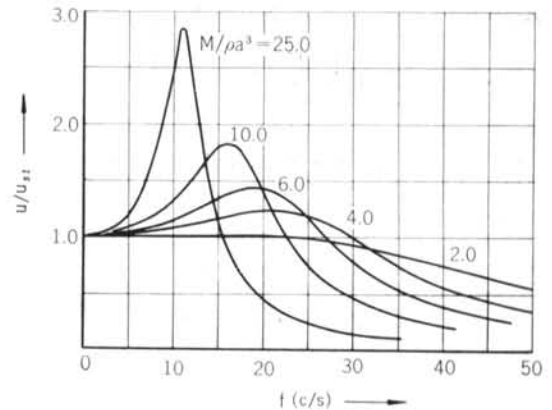


図-14 共振曲線(上下動、 $a = 1.0\text{m}$, $V_s = 150\text{m/s}$ 、一定加振力)

両図より、質量比 $M/\rho a^3$ が大きいほど共振時(振幅が最大になる時)の振幅が大きく、その振動数は低く、 $M/\rho a^3$ が小さくなるにつれて共振振動数は大きく、共振振幅は小さくなることわかる。

質点系においては、粘性摩擦がなければ、共振点において振幅が無限大になるのであるが、無限連続体においては、共振時に振幅無限大となることはない。そして、見かけ上、減衰があるような特性を示すのである。これはエネルギーが熱になるのではなく、そのまま遠方へ去ってしまうという現象からなのである。

なお、地盤のばね常数 K_z は、式68より求められるべきものであって、これを、地盤係数 k_0 を適宜仮定し $K_z = k_0 S$ などとしてはいけない。式68より、 K_z は V_s を知ることによって一義的に定められるのであって、 k_0 を

仮定するより、土質分類とN値等から V_s を想定する方がより確かでもある。

また同式より、 K_x は基礎の半径 a に対し linear であって、地盤係数法⁵⁾におけるように面積 S に比例するものではない。

3.3 水平動

地表面に水平の集中荷重 Q が作用するとき、地中の任意の点における水平変位 u は、Cerruti によって次のように与えられている。

$$\xi = \frac{Q}{4\pi\mu R} \left\{ 1 + \frac{r^2}{R^2} + (1-2\nu) \left[\frac{R}{R+Z} - \frac{r^2}{(R+Z)^2} \right] \right\} \quad \dots\dots\dots(72)$$

ここで、 $Z=0$ とすれば $R=\sqrt{Z^2+r^2}=r$ であるから

$$\xi_0 = \frac{Q}{2\pi\mu R}$$

円形基礎の場合について、基礎底面の剪断応力を等分布とすると、基礎中心の変位を ξ_r として、

$$\xi_r = \frac{Q}{2\pi\mu} \cdot \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{r} r dr d\theta = \frac{Q}{\pi a \mu} \quad \dots\dots\dots(73)$$

田治見氏は、基礎底面の剪断応力 τ_r の分布を、

$$\tau_r = \frac{Q}{2\pi a \sqrt{a^2-r^2}} \quad \dots\dots\dots(74)$$

と仮定している。この場合、

$$\xi_r = \frac{Q}{2\pi\mu} \cdot \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{r \sqrt{a^2-r^2}} r dr d\theta = \frac{Q}{4a\mu} \quad \dots\dots\dots(75)$$

本論では、田治見氏の分布にしたがって、静的な場合の K_x を求めると、

$$K_x = \frac{\xi_r}{Q} = 4a\mu = 4a\rho V_s^2 \quad \dots\dots\dots(76)$$

したがって、

$$K_x/K_s = 1-\nu = 0.75 \quad (\nu=0.25) \quad \dots\dots\dots(77)$$

となる。

式(76)を式(72)に代入すると、

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{\pi^2 \kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots(78)$$

$\nu=0.25$ のとき $\kappa=0.92$ として、

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 2.086 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots(79)$$

または、

$$u = \frac{1}{4a\rho V_s^2} \cdot \frac{F_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 2.086 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots(80)$$

これが水平動の振幅特性を表わす解である。

図-15は式(79)によって $M/\rho a^3$ の各値に対する u/u_{st} を図示したものである。

また、図-16は $a=1.0\text{m}$ 、 $V_s=150\text{m/s}$ とした場合の f に対する u/u_{st} を示したものである。

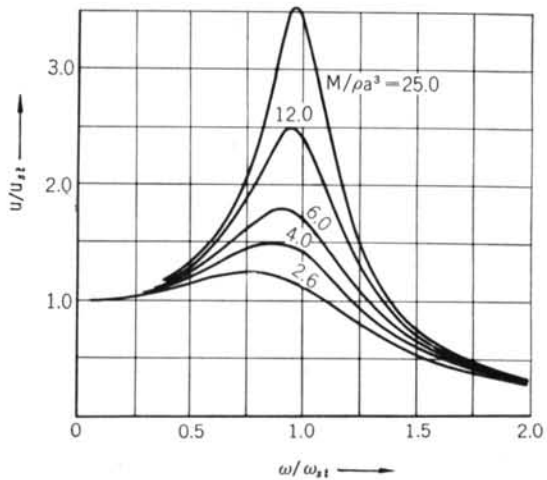


図-15 共振曲線（水平動、一定加振力）

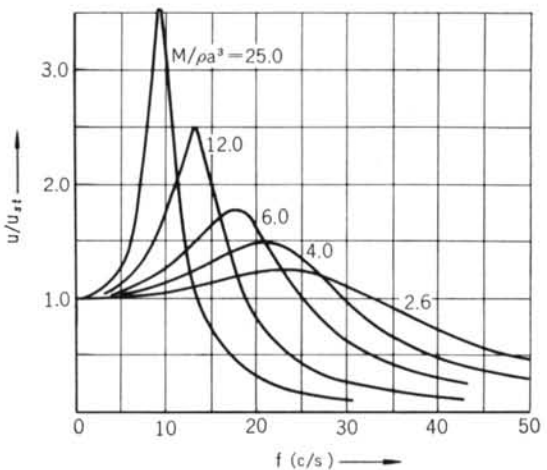


図-16 共振曲線（水平動、 $a=1.0\text{m}$ 、 $V_s=150\text{m/s}$ 、一定加振力）

これらの傾向は、鳥海氏や Arnold 等が求めた結果とほぼ一致している。

なお、参考までに、基礎底面の圧力を等分布と仮定した場合の振幅特性を求めておこう。

(上下動)

式69より,

$$K_z = \frac{\pi a \mu}{1-\nu} = \frac{\pi a \rho V_s^2}{1-\nu} \quad \dots\dots\dots 81$$

式69より,

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + (1-\nu)\pi\kappa^2 \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots 82$$

ただし,

$$u_{st} = \frac{F_0}{K_z} = \frac{(1-\nu)F_0}{\pi a \rho V_s^2} \quad \dots\dots\dots 83$$

ここで, $\nu=0.25$, $\kappa=1.33$ として,

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 4.166 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots 84$$

(水平動)

式73より,

$$K_x = \pi a \mu = \pi a \rho V_s^2 \quad \dots\dots\dots 85$$

式69より,

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \pi\kappa^2 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} \quad \dots\dots\dots 86$$

ただし,

$$u_{st} = \frac{F_0}{K_x} = \frac{F_0}{\pi a \rho V_s^2} \quad \dots\dots\dots 87$$

$\nu=0.25$, $\kappa=0.92$ とすれば,

$$u = u_{st} \frac{F_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 2.658 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots 88$$

図-17, 図-18は, 式80, 89との比較を示したものである。

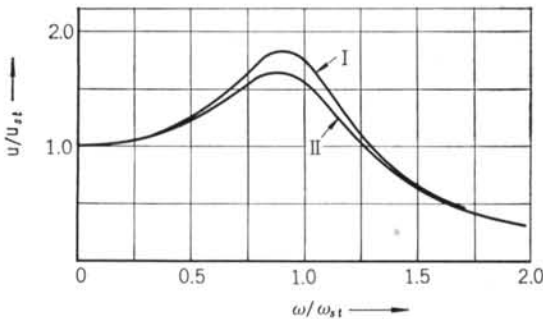


図-17 基礎底面の圧力を, 田治見氏の分布とした場合 I, 等分布とした場合 II の比較 (上下動, $M/\rho a^3=10$)

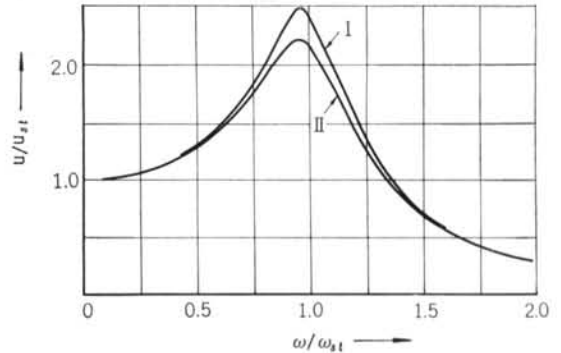


図-18 基礎底面の圧力を, 田治見氏の分布とした場合 I, 等分布とした場合 II の比較 (水平動, $M/\rho a^3=12$)

3.4 共振振動数

振幅が最大になるときの振動数を, 共振振動数 ω_n と呼び, 静的固有振動数 ω_{st} と区別する。図-13, 図-15より, 質量比 $M/\rho a^3$ が小さくなる時 ω_n/ω_{st} も小さくなることわかる。これを数学的に取扱ってみよう。

(上下動)

式69において, u を最大にするには, 分母

$$X_V = (1-\eta^2)^2 + \frac{(1-\nu)\pi^2\kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \eta^2 \quad \left(\eta = \frac{\omega}{\omega_{st}}\right) \quad \dots\dots\dots 89$$

を最小にすることであるから,

$$\frac{dX_V}{d\eta} = 2\eta \left\{ \frac{(1-\nu)\pi^2\kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} - 2(1-\eta^2) \right\} = 0$$

より,

$$\eta_0 = \sqrt{1 - \frac{(1-\nu)\pi^2\kappa^2}{8} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad \left(\eta_0 = \frac{\omega_n}{\omega_{st}}\right) \quad \dots\dots\dots 90$$

(水平動)

式78において,

$$X_H = (1-\eta^2)^2 + \frac{\pi^2\kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \eta^2 \quad \dots\dots\dots 91$$

とし, 同様に $dX_H/d\eta=0$ より,

$$\eta_0 = \sqrt{1 - \frac{\pi^2\kappa^2}{8} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad \dots\dots\dots 92$$

式90, 92について $\nu=0.25$, $\kappa=1.33$ (上下), 0.92 (水平)とした場合を図-19に示した。これらから $M/\rho a^3$ が極めて大きくなったとき $\omega_n = \omega_{st}$ となるが, 一般には $\omega_n < \omega_{st}$ なることが理解される。

図-20は Arnold 一派が導いた質量比- ω_n/ω_{25} 関係と本論の結果とを比較したものである。

また, 田治見氏は $M/\rho a^3$ の代わりに $\kappa_s a (\kappa_s = \kappa \omega_{st}/V_s)$ を parameter として表わしている。この $\kappa_s a$ を本論の記

号で表現すれば、 $\kappa\omega_{st}a/V_s$ で、 $M/\rho a^3$ とは次の関係にある。

$$\left. \begin{aligned} \kappa \frac{\omega_{st}}{V_s} a &= \frac{\kappa a}{V_s} \sqrt{\frac{K}{M}} = 2\kappa \sqrt{\frac{1}{1-\nu} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad (\text{上下}) \\ &= 2\kappa \sqrt{\frac{\rho a^3}{M}} \quad (\text{水平}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots \text{㉓}$$

図-21は $\kappa\omega_{st}a/V_s$ に対する ω_n/ω_{st} を田治見氏が導いた結果と比較して示したもので、ほぼ一致しているとみてよいであろう。

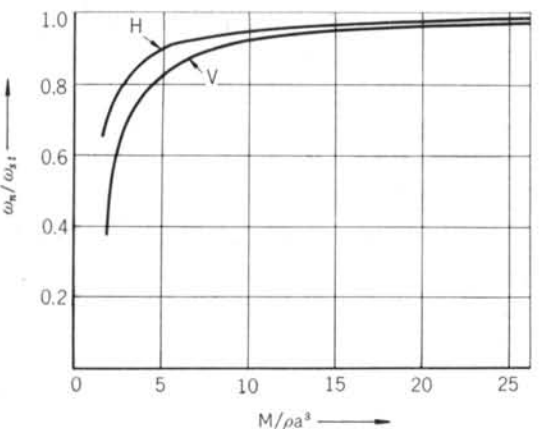


図-19 共振振動数 ω_n と静的固有振動数 ω_{st} との比 (V:上下動, H:水平動)

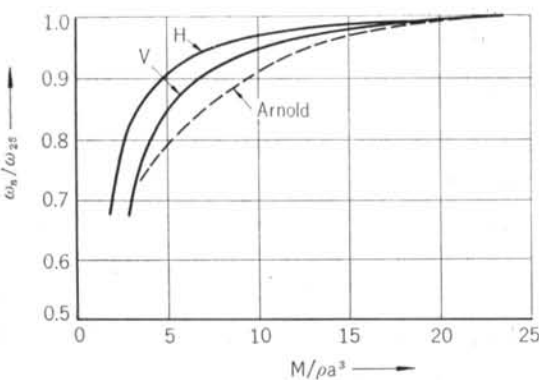


図-20 Arnold の結果との比較(Arnoldの結果は、「防振基礎の設計法」—大築志夫氏より引用)

3.5 強制振動試験

地盤係数法によって機械基礎の設計をする際、地盤係数 k (kg/cm³) を知る目的で、小型の試験基礎を作って起振機による強制振動試験を行なう場合がある。そして共振曲線から共振振動数 f_n を読み取り、次式の換算によって地盤係数 k を求めている。

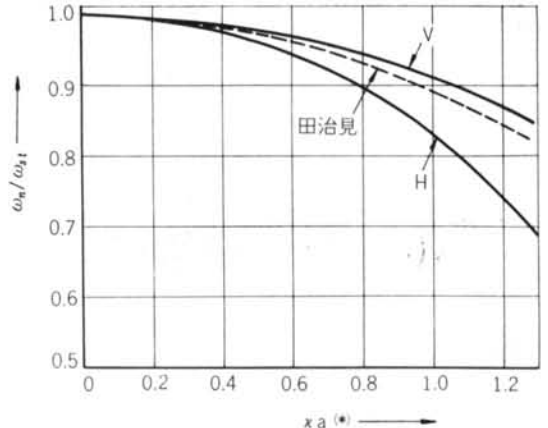


図-21 田治見氏の結果との比較(田治見氏の結果は、「耐震理論に関する基礎的研究」—生研第8巻4号より引用)
* κ は $\kappa\omega_{st}a/V_s$ の意

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{kSg}{W_s + W_v}} \dots\dots\dots \text{㉔}$$

ただし、 W_s : 基礎と共に一体となって振動すると考えられる土の重量 (t)

W_v : 機械および基礎の重量 (t)

このような方法で求めた共振振動数 f_n とは、一体何を意味しているのであろうか、如何なる物理的“量”なのであろうか、検討してみよう。

(上下動)

起振機による加振力は、次式で与えられる。

$$F = mr\omega^2 e^{i\omega t} \dots\dots\dots \text{㉕}$$

ただし、 mr : 起振機の加振モーメント

したがって、振動変位は式㉔より、

$$\begin{aligned} u &= u_{st} \frac{mr\omega^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{(1-\nu)\pi^2\kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \\ &= \frac{mr}{M} \frac{\omega^2/\omega_{st}^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{(1-\nu)\pi^2\kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \end{aligned} \dots\dots\dots \text{㉖}$$

$\nu=0.25, \kappa=1.33$ とすると、

$$u = \frac{mr}{M} \frac{\omega^2/\omega_{st}^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 3.272 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \dots\dots\dots \text{㉗}$$

これが、 ω^2 加振型の場合の変位特性を表わす解である。図-22は $M/\rho a^3$ の各値に対して、これを図示したものである。

ω^2 加振型の場合、最大変位を与える振動数を ω_p とし一定加振型の共振振動数 ω_n と区別する。

$\omega/\omega_{st}=\eta$ として式(9)を変形すれば、

$$u = \frac{mr}{M} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\eta^2}-1\right)^2 + \frac{(1-\nu)\pi^2\kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{1}{\eta^2}}} e^{i(\omega t - \phi)}$$

u を最大にする η を求めるため、分母を最大にする条件から、 $\omega/\omega_{st}=\eta_p$ として、

$$\eta_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(1-\nu)\pi^2\kappa^2}{8} \cdot \frac{\rho a^3}{M}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1.636 \frac{\rho a^3}{M}}} \quad \dots\dots\dots(9)$$

図-23は式(9)を図示したものである。

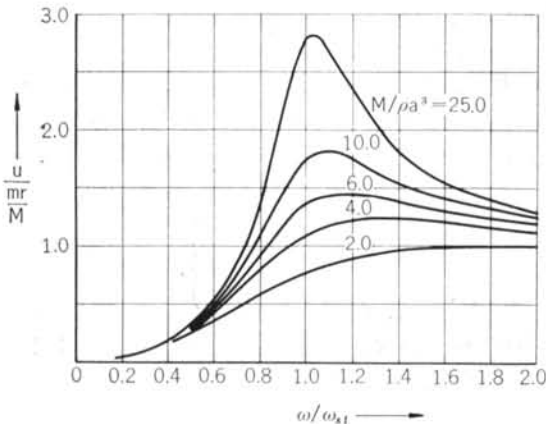


図-22 ω^2 加振型の共振曲線(上下動)

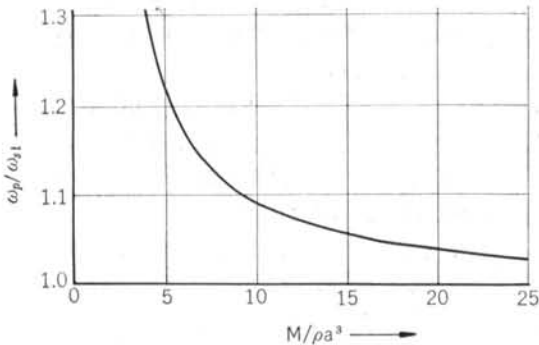


図-23 ω^2 加振型の共振振動数 ω_p と静的固有振動数 ω_{st} との比(上下動)

(水平動)

ω^2 加振型の場合、振動変位は式(9)より、上下動の場合と全く同様にして、

$$u = \frac{mr}{M} \frac{\omega^2/\omega_{st}^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{\pi^2\kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots(10)$$

$\nu=0.25$, $\kappa=0.92$ とすると、

$$u = \frac{mr}{M} \frac{\omega^2/\omega_{st}^2}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 2.086 \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \quad \dots\dots\dots(10)$$

図-24はこれを図示したものである。

つぎに、最大変位を与える振動数を ω_p とし、 $\omega_p/\omega_{st}=\eta_p$ とすると、

$$\eta_p = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\pi^2\kappa^2}{8} \cdot \frac{\rho a^3}{M}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 1.043 \frac{\rho a^3}{M}}} \quad \dots\dots\dots(10)$$

図-25はこれを図示したものである。

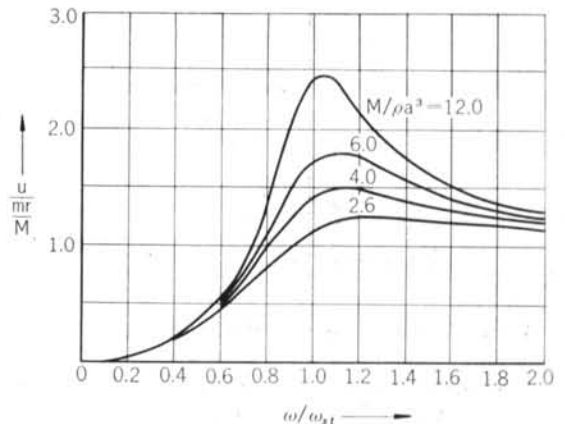


図-24 ω^2 加振型の共振曲線(水平動)

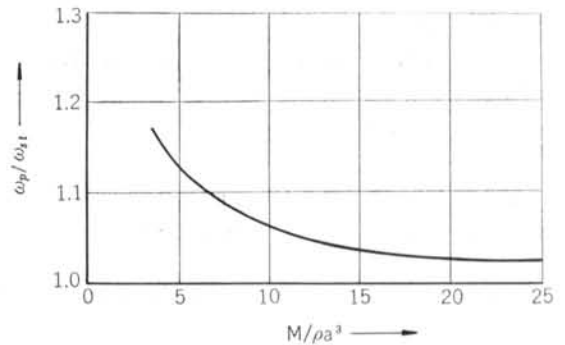


図-25 ω^2 加振型の共振振動数 ω_p と静的固有振動数 ω_{st} との比(水平動)

図-22、図-24で明らかなように、 ω^2 加振型の場合は一定加振型(図-13、図-15)の場合と異なって、 $M/\rho a^3$ に対して ω_p/ω_{st} はあまり変化しない。ただ本論では、 $M/\rho a^3$ が小さくなる時 ω_p/ω_{st} はやや大きい方に移行するのであるが、この点が田治見氏の導いた結果と差異を生じている。

このように、基礎の共振振動数を論ずる場合に、静的な固有振動数 ω_{st} と、一定加振型の共振振動数 ω_n と、

ω^2 加振型の共振振動数 ω_p とは、値も物理的な意味も異なるのであるから、機械基礎等の設計に当っては、相互の意味を認識の上、対処しなければならないのである。

3.6 減衰振動との比較

本論のように、地盤—基礎系の振動を波動問題として解く場合、地盤の粘性を考えに入れなくても、エネルギーの地下逸散現象によって、あたかも粘性減衰があるかのような特性を示す。

そして地下逸散減衰を質点系の振動における粘性減衰に換算することは、両者の式の形からみて容易である。

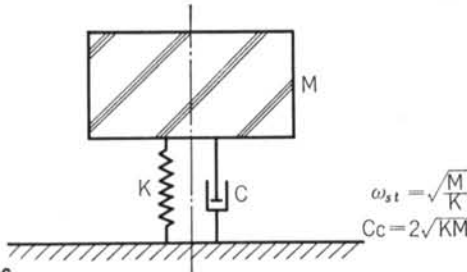


図-26

いま、図-26に示す振動系の解は、

$$u = u_{st} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 4 \frac{c^2}{c_c^2} \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} e^{i(\omega t - \phi)} \dots\dots(102)$$

ここで、 c/c_c は減衰定数と呼ばれ、一般に h なる記号で表わされている。

式(102)を式69、式79と比べて等価の減衰定数 h を求めると、上下動の場合、

$$4h^2 = 3.272 \frac{\rho a^3}{M}$$

ここで、 $\rho/M = \gamma/W$ (γ : 地盤の単位体積重量、 W : 基礎の重量)、 $a^3 = (S/\pi)^{3/2}$ を代入して h について整理すると、

$$h = \sqrt{\frac{3.272 \gamma}{4\pi^{3/2}}} W^{-\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{4}} \dots\dots(103)$$

$\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$ とすると、

$$h = 0.482 W^{-\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{4}} \dots\dots(104)$$

となる。田治見氏の結果では $h = 0.47 W^{-\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{4}}$ となり、ほぼ一致している。

つぎに、全く同様にして水平動の場合を考えると、式79および式(102)より、

$$h = \sqrt{\frac{2.086 \gamma}{4\pi^{3/2}}} W^{-\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{4}} \dots\dots(105)$$

$\gamma = 1.6 \text{ t/m}^3$ とすると、

$$h = 0.388 W^{-\frac{1}{2}} S^{\frac{3}{4}} \dots\dots(106)$$

となる。

このようにして、地下逸散減衰も式(104)、式(106)の換算によって粘性減衰の問題に置き換えられることは、今後の理論の展開において、甚だ便利なことでもあろう。

なお、critical damping は $h=1$ のときであるから、この条件を与える質量比を $(M/\rho a^3)_c$ と表わせば、

$$\left. \begin{aligned} \text{(上下動)} \quad \left(\frac{M}{\rho a^3}\right)_c &= 0.82 \\ \text{(水平動)} \quad \left(\frac{M}{\rho a^3}\right)_c &= 0.52 \end{aligned} \right\} \dots\dots(107)$$

であり、残念ながら、一般の基礎の範囲よりはるかに小さいのである。

註:

- 1) 防振基礎の設計法：大築志夫（オーム社）
- 2) 弾性地盤上の機械基礎強制振動の計算：鳥海勲（地震 Vol. 7, No. 4）
- 3) 耐震理論に関する基礎的研究（生研報告 Vol. 8, No. 4）
- 4) κ は平面波の場合 $\kappa=1$ であるが、半無限状の弾性地盤に逸散する場合、田治見氏の計算によって、上下動の場合は、ポアソン比にほとんど無関係に $\kappa=1.33$ 、水平動の場合は、 $\kappa=1.04$ ($\nu=0$)、 0.92 ($\nu=0.25$)、 0.86 ($\nu=0.5$) となっている。
- 5) 地盤を質量のないばねに置換し、機械的振動問題として行なう計算法を地盤係数法と呼ぶことにする。

<参考文献>

- ・防振基礎の設計法：大築志夫：オーム社
- ・耐震理論に関する基礎的研究：田治見宏：生研報告，Vol. 8 No. 4
- ・弾性地盤上の機械基礎強制振動の計算：鳥海勲：地震，Vol. 7 No. 4
- ・愛知県トヨタ自工製造工場における機械基礎の強制振動試験結果報告書：山原浩：清水建設研究所報告書
- ・振動学：妹沢克惟：岩波
- ・機械防振の基礎理論：西村源六郎：機械学会論文集，Vol. 28 No. 191
- ・建築学大系（地震・振動学）：金井清：彰国社
- ・基礎構造：大崎順彦：コロナ社
- ・弾性学：倉西正嗣：日本機械学会