U.D.C. 699.842

清水建設研究所報
第4号昭和39年10月

振動を発する機械の基礎について

大築　志夫

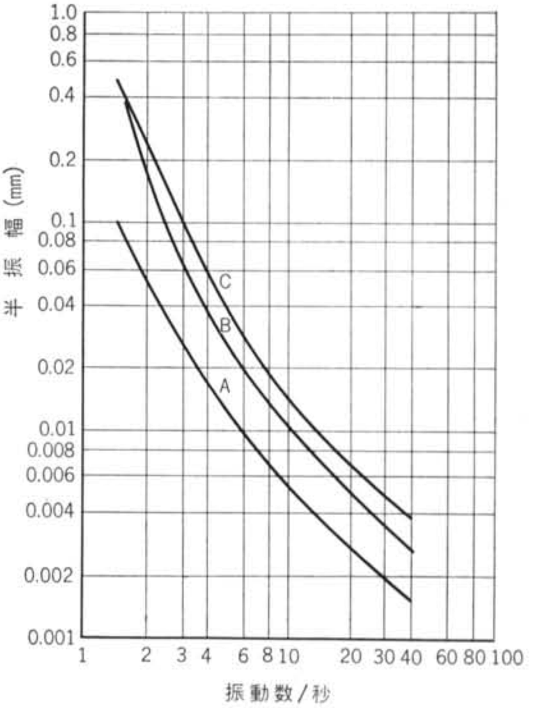
§1. 概　説

我々の日常の建設工事において，機械の基礎を設計したり，施工したりすることは非常に多い．機械に運動部分があれば，必ず大なり小なりの振動を発する．そして基礎の設計や施工が正しくない場合には，機械そのものが使用に差支えのあるほど振動したり，また，それほどでない場合でも，その振動が他所へ伝わって，他所に障害をあたえることがある．

十年くらい前までは，自家発電装置や空調機械をすえ付けると，必ずといってよいほどこの種の問題が起ったが，弾性支持法が確立され普及すると共に，この種の障害は非常に少なくなった．今日ではむしろ，工場の機械の基礎に，このような問題が残されている．それは一つには，弾性支持，すなわち振動絶縁法を適用しがたい機械があることと，もう一つは，現在でも工場側に新しい方法を忌避する傾向があるからでもある．しかし，この後者は多くの人の理解によって，次第に解消してゆくものと思われる．[1)]

振動による障害の多くは他所に対するものであって，他所にある機械や計測装置に障害を及ぼすとか，他所で生活する人に不快感をあたえるとかいうものである．この中で，機器に対する障害は，機器の性質によって異なるから， case-by-case で考えねばならないが，人に及ぼす影響の方はほぼ調査がなされていて，**図—1** に示してある．一番下の線から左下の領域は，普通の人ならば振動を感じない範囲であるから，問題の場所の振幅がこの領域にあるように基礎を作ればよいことになる．

一般に，機械が運動部分をもっていると，その運動状態や，その製作精度によって異なるが，振動させようとする力，すなわち加振力を出す．そしてその加振力によって，機械およびそれに直接固定されている架台または基礎が振動させられる．この基礎が直接地盤に接している場合は，基礎に接している地盤の部分は基礎と共に振動させられると考えられる．そうすると，地盤のこの部分が第2の振源となって，この振動が波動の形となって他所へ伝播してゆき，問題の場所を振動させることになる．この伝播の途次，大局的には波動は拡がってゆき，



C：明らかに振動障害をともなう限界
B：防振設計の許容限界
A：防振設計の目標限界

図—1　日本建築学会振動分科会で定めた防振設計の標準図

また，土そのものにも幾分の減衰性はあるから，距離が大きくなれば振幅が小さくなってはゆくが，地盤の成層状態や，近隣の障害物（基礎等）の配置によっては，局部的には増幅されることもあって，必ずしも一様に減小してゆかない方が普通である.[2]

そこで，実用的には基礎の振幅を a_0 とし，基礎から r(m) はなれた所の振幅を a_r とかくとき，

$$a_r < \frac{2a_0 e^{-0.06r}}{\sqrt{r}} \qquad r > 1\text{m} \quad \cdots\cdots(1)$$

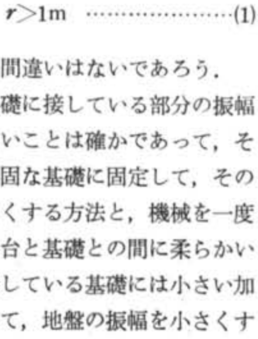
程度に考えておけば，大きな間違いはないであろう.

いずれにしても，地盤の基礎に接している部分の振幅を充分に小さくしてやればよいことは確かであって，その方法として，機械を直接強固な基礎に固定して，その基礎自身の振幅を充分に小さくする方法と，機械を一度架台に固定はするが，その架台と基礎との間に柔らかい物質を介して，地盤に直接接している基礎には小さい加振力しか伝わらないようにして，地盤の振幅を小さくする方法とがある．前者を振動抑止法と呼び，後者を振動絶縁法と呼ぶ．そして，この両者を如何に使いわけるかが，考え方のポイントになる.

§2. 基礎の振幅の制御

定常の加振力を発する機械の場合について，簡単のために減衰項は無視して考えることにする.

図—2 に示すような，質量mが，ばね常数kなるばねに支えられ，これが図の上下方向にはたらく加振力 $F=F_0 \sin \omega t$ をうける場合を考える.



図—2

この場合の運動方程式は次のようになる.

$$m\ddot{x} + kx = F_0 \sin \omega t \quad \cdots\cdots(2)$$

いま，$\nu^2 = k/m$，ν はこの系の固有円振動数，とかけば，(2)式の定常解は次式であたえられる.

$$x = \frac{F_0 \sin \omega t}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{-1+\frac{\nu^2}{\omega^2}} \quad \cdots\cdots(3)$$

したがって，質量 m の振幅 a は，

$$a = \frac{F_0}{m\omega^2} \cdot \frac{1}{-1+\frac{\nu^2}{\omega^2}} \quad \cdots\cdots(4)$$

であたえられる.

(4)式は二つの項の積の形になっている.

第1の因子は，F_0，ω といずれも機械の方から定まる量と，基礎に関係のある m とから成立っている．第2の因子は，加振力の振動数と基礎自身の固有振動数の関係から成っている.

昔は基礎の設計には，この中の第1因子しか考えていなかったから，基礎の質量 m を大きくさえすれば，基礎の振幅は小さくなるものとされていた.[3] たしかに，mを n 倍にすれば，第1因子は $1/n$ になる．しかし，実際には第2因子があるから，基礎の剛さ k との関係で $\nu=\omega$ の場合を考えると，式の上からは第2因子は分母が0になるので無限大となり，折角 m をn倍しても，振幅としてはかえって大きくなる結果になる．そして実際にも，これに類した例は数多くある．$\nu=\omega$ の場合は共振と呼ばれる現象で，機械の基礎を設計する時は，原則として避けなければならない.

基礎の振幅には，第2因子が重要な働きをすることがわかったから，次に，第2因子を含めた性質を考えてみよう.

まず，$\nu \neq \omega$ とすると，$\nu > \omega$ か，$\nu < \omega$ かのいずれかの場合にすべての場合が含まれる.

$\omega > \nu$ の場合.

この場合は，第2因子の分母の中の，ν^2/ω^2 は常に1より小さい．ω は機械による常数であるから，mを支えるばねが充分kが小さくて，k-m 系の固有振動数の低い，いわゆる柔らかい場合である．$0 < \nu^2/\omega^2 < 1$ であるから第2因子は常に負で，その絶対値は常に1より大きい．符号が負であるということは，m の振動が加振力と位相が逆(180° おくれる）であることを意味するだけで，振幅は第1因子で与えられるものより必ず大きい．しかし，この場合は k をそのままにしておいてmを増加すれば，それだけ第1因子は小さくなり，第2因子も $k/m=\nu^2$ が小さくなるから，第2因子の絶対値も小さくなる.

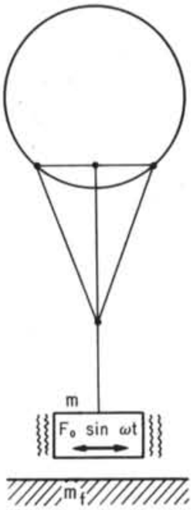
したがって，基礎を重くすれば振幅は小さくなる.

しかし，この方法を一般の基礎に適用しようとなると，地盤がそれほど柔らかくないので非常に大きな基礎を必要とし，不経済なことが多い.

そこで一般には，このような場合には振動絶縁法を行なって，kには柔らかいばねを用い，mは機械と架台のみを考え，基礎は別に軽微なものを作り，kを介して基礎に伝わる力を小さくし，基礎としては F_0 が小さくなったものとして設計をする.

たとえば，**図—3** に示す如く，m は空中に吊られてい

て基礎 m_f との間には何もない時を考えると，m 自身がいくら動こうと，m_f には何等の力も作用しない．すなわち m と m_f とをつなぐばねのばね常数 $k=0$ の場合と考えてよく，機械 m は $a_f=F_0/m\omega^2$ の振幅で振動するが，m_f に伝わる力 $T_0=k\cdot a_f$ は $k=0$ であるから，$T_0=0$ である．これが完全振動絶縁の場合で，この時の振幅 a_f を自由振幅とよぶ．そして $T_0/F_0=\tau$ を力の伝達率と名付ける．



図—3

一般に $k \neq 0$ の場合は，$T_0=k\cdot a$ であるから，

$$\tau=\frac{k}{m\omega^2}\cdot\frac{1}{-1+\frac{\nu^2}{\omega^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

となり，$k/m=\nu^2$ であるから，(5)式は，

$$\tau=\frac{\frac{\nu^2}{\omega^2}}{-1+\frac{\nu^2}{\omega^2}}=\frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\nu^2}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

の如く変形される．　$\omega>\nu$　であるから，(6)式は常に負で，その絶対値は　$1<\omega/\nu<\sqrt{2}$ の間は　$|\tau|>1$，$\sqrt{2}$ となると，はじめて $|\tau|=1$ となることがわかる．$\omega/\nu>\sqrt{2}$ となってはじめて振動絶縁的な効果が出てくる．(6)式から，$\omega/\nu=3$ で $|\tau|=\frac{1}{8}$ の如く，$\omega/\nu>3$ 程度になれば，容易に機械本来の加振力 F_0 を1桁下げて基礎に伝えることが可能になる．ただし，機械および架台の振幅を許容値（これはその機械自身の問題から定まるもので図—1 とは関係がない）以内におさめるためには，架台の重量はある程度以上必要となる．

この方法は，加振力の振動数の大きい時に特に有効である．しかし，この方法を行なう場合でも，地盤に接する方の基礎については，固定基礎と同様の考慮が必要なことは勿論である．

$\nu>\omega$ の場合．

この場合は，第2因子の分母の中の ν^2/ω^2 は常に1より大きい．したがって，第2因子は常に正である．この場合には(4)式をかき直して，

$$a=\frac{F_0}{-m\omega^2+k} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

とかいた方がわかりやすい．

前提により $\nu>\omega$ であるから　$k/m>\omega^2$，　$\therefore$ $k>m\omega^2$ である．ω は機械の方から定まる定数であるから，(7)式から定まる振幅は m と k の関係からきまり，k が一定ならば m が小さいほど，m が一定なら k の大きいほど振幅は小さくなる．地盤が一定ならば，なるべく底面積を大きくして，しかも基礎をできるだけ軽量につくることが，振幅を小さくする唯一の方法である．

古い機械の基礎で，振動があったので基礎を打足したところ少しも効果がなかったとか，かえって悪くなったという例は多数にあるが，これ等は上記の理由によるものと考えられる．

いま，非常に剛な基礎ができたと仮定すれば，それは $k=\infty$ に相当し，重量の如何にかかわらず，振幅は0である．これはちょうど振動絶縁の場合の図—3 の場合に相当し，完全振動抑止の場合である．機械の加振力の振動数が比較的小さい場合に有効な方法であって，できるだけ固有振動数の高い軽量の基礎を作ることが大切になる．

いずれの場合にも，$\nu \fallingdotseq \omega$，すなわち共振点附近はさけることは必要であるが，振動抑止形の場合には，相手が地盤であって，単純なばねのようなものとは性質が異なることを巧みに利用すれば，たとえ $\nu \fallingdotseq \omega$ であっても，基礎に伝わる加振力さえ小さければ，実害のない設計が行ないうる．振動絶縁を行なった場合の地盤に接する側の基礎は，この性質を利用して設計しているのである．

要するに，基礎の振幅の制御は，地盤の一部，すなわち基礎に接する部分の振幅を充分に小さくすればよいのであって，この場合，どれだけの力が地盤に伝わるかということは，振動障害の現象とは関係がない．

§3. 基礎の固有振動数

基礎の振幅を制御するためには，ν，すなわち基礎の固有振動数をできるだけ正確にしることが必要であることがわかった．

振動絶縁法を用いる場合には，使用するばねの k は既知であるから，ν は非常に正確に求めることができるので，そのような架台の振幅や，ばねを介して基礎に伝わる力等も，相当的確に予想することが可能である．そして，この伝達される力が人間数名の重量程度になるならば，通常の構築物としては，何等振動的の考慮を払わなくても差支えがない．

ところが，直接地盤に接している基礎の振動数を求める場合には，相手が無限の拡がりをもつ地盤であり，その k をどのように定めるかということが問題となる．そして，少なくとも今日では，地盤のばね常数という問題

は，有限な系の単なる振動として扱うのは誤りで，どうしても波動効果を無視することはできないと考えられていることは，前出の山原の論文[2]からも明らかである．

地盤の振動を波動問題として取扱ったものには，鳥海[4]や田治見[5]の報告がある．前記山原の取扱いは，これ等に比して格段に簡素化したもので，しかも結果的には同じような傾向を示しているので，以下は主として山原の誘導にしたがって考えて行くことにする．

一般の機械振動において，その強制振動をあたえる式は，1自由度の場合，

$$m\ddot{x}+c\dot{x}+kx=F_0e^{i\omega t} \qquad \cdots\cdots(8)$$

の形であたえられ，この式の右辺を0においた

$$m\ddot{x}e+c\dot{x}e+kx=0 \qquad \cdots\cdots(9)$$

が自由振動の式で，この式を解いてえられる振動数が，いわゆる固有振動数である．同様な考え方を山原の(57)式に適用して，右辺の加振力を0とおいた式を考えると，

$$m\ddot{x}-\int_s(p_t)_{z=0}+kx=0 \qquad \cdots\cdots(10)$$

がえられる．(9)式と比較すると，$-\int_s(p_t)_{z=0}$ の項が減衰項に相当する．簡単のために底面圧力分布を均等とし，底面積を S，地盤の変位を x_t，基礎底面の変位を x，土の質量密度を ρ，土中の横波速度を V とし，

$$x_t=Ae^{\lambda(t-\frac{\kappa}{V}z)} \qquad \cdots\cdots(11)$$

とすると，$p_t=\rho V^2\frac{\partial x_t}{\partial z}$，$x=(x_t)_{z=0}$ を考慮すると，(10)式は，

$$(\lambda^2+\rho V\kappa S\lambda/m+k/m)Ae^{\lambda t}=0 \qquad \cdots\cdots(12)$$

となるから，$\alpha=\rho V\kappa S/2m$，$\nu_0{}^2=k/m$ とかくと，

$$\lambda=-\alpha\pm i\sqrt{\nu_0{}^2-\alpha^2} \qquad \cdots\cdots(13)$$

となり，全く機械振動の場合と同形の解がえられる．

$\nu_0=\alpha$ の場合が critical damping に相当し，$\nu_0>\alpha$ の場合に，

$$\nu=\sqrt{\nu_0{}^2-\alpha^2} \qquad \cdots\cdots(14)$$

なる固有振動数をもち，また ν_0 に比して α が小さい場合には，共振倍率は近似的に $\nu_0/2\alpha$ であたえられる．

そこで必要なのは，ν_0 を合理的に求めることである．一般の場合，基礎は長方形の場合が多く，また地中の圧力は Boussinesq 分布をなすものと仮定すると，各方向の非減衰振動数 ν_0 は**表—1** の如くあらわされる．

ν_0 が求まれば，各方向の基本振動数 ν は(14)式から求まる．この場合，α を求めるのに定数 κ の数値が必要であるが，田治見[5]にしたがい，上下とローリングの場合には，

$\kappa_1=1.33$

を，その他の場合には，

$\kappa_2=0.92$

をとることにきめておく．

振動方向	ν_0	記号の意味
上下	$2V_s\sqrt{\dfrac{\gamma a\psi_1}{\pi(1-\mu)W}}$	V_s＝地中の横波速度（m/s） γ＝土の密度（kg/m^3） a＝振動方向の辺長（m） b＝a に直角の辺長（m） μ＝土のポアソン比 W＝機械および基礎の重量(kg) $r_{x,y,z}$＝x,y または z 軸まわりの慣性半径（m） h＝基礎底面から重心までの高さ(m) $\rho=\gamma/9.8$（kg-s^2/m^4）
水平	$2V_s\sqrt{\dfrac{\gamma a\psi_1}{\pi\left(1-\frac{\mu}{2}\right)W}}$	
ローリング	$2V_s\dfrac{a}{r_{x,y}}\sqrt{\dfrac{\gamma a}{\pi W}\left(\dfrac{\psi_2}{3(1-\mu)}+\dfrac{\psi_1}{1-\frac{\mu}{2}}\cdot\dfrac{h^2}{a^2}\right)}$	
ヨーイング	$2V_s\dfrac{a}{r_z}\sqrt{\dfrac{\gamma a\psi_3}{3\pi\left(1-\frac{\mu}{2}\right)W}}$	

$$\psi_1=\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)+\frac{b}{a}\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)$$

$$\psi_2=\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{b}{a}\right)+\frac{b^3}{a^3}\log_e\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{a}{b}\right)$$

$$\psi_3=2\frac{b}{a}\sqrt{1+\left(\frac{b^2}{a^2}\right)}+\psi_2$$

表—1 長方形基礎の非減衰（円）振動数 ν_0

さて，基本振動数が求まれば，連成振動数は通常の場合[6]と同様にして計算することができるから，あとは各系ごとに第2節の考え方で処理すればよいことになる．

註： 地盤の場合に，はたしてこのような合成をしてよいか否かには多少の疑点がないではないが，⑽〜⒁式の如く，式の上で全く機械振動系と同様な形になるので，あえてこのようにした．

以上の如く，固定基礎の固有振動数を求めるためには，その地盤中の横波の伝播速度 V_s を知ることが必要である．

最も簡単な方法は，その地盤の表面をハンマー等でたたき，そこから地表面を伝わる表面波の速度 V_R をはかってV_sを定める．V_RとV_sとの関係は土のポアソン比によって異なり，その状態は**表—2** に示す如くであるが，実用的には，

$$V_R=0.9V_s \qquad \cdots\cdots(15)$$

として充分であろう．

V_sの値は通常 50m/s から 200m/s までの間である．

土のポアソン比 μ	V_R/V_s
0	0.764
0.25	0.919
0.50	0.955

表—2

有効減衰性について．

前述の如く，機械振動の場合の方程式⑼と，波動圧を考えに入れた⑽式とを較べると，⑽式の第2項が，機械振動式の減衰項に相当する．そして，

$$\alpha=\frac{\rho V_s \kappa S}{2m} \qquad \cdots\cdots(16)$$

とおくことにより，機械振動の場合の減衰自由振動の解に相当する

$$u=e^{-\alpha t}\left(c_1\sin\sqrt{\nu_0{}^2-\alpha^2}\,t+c_2\cos\sqrt{\nu_0{}^2-\alpha^2}\,t\right) \cdots\cdots(17)$$

を得，その自由円振動数が⒁式の

$$\nu=\sqrt{\nu_0{}^2-\alpha^2}$$

であたえられることをのべた．

⒃式中の ρ と m は，それぞれ土の密度，基礎の重量を重力の加速度gで除した商であるから，これをもとに戻し，さらに簡単のために $\kappa=1$ とおくと，⒃式は，

$$\alpha=\frac{\gamma V_s}{2(W/S)} \qquad \cdots\cdots(18)$$

とかくことができる．

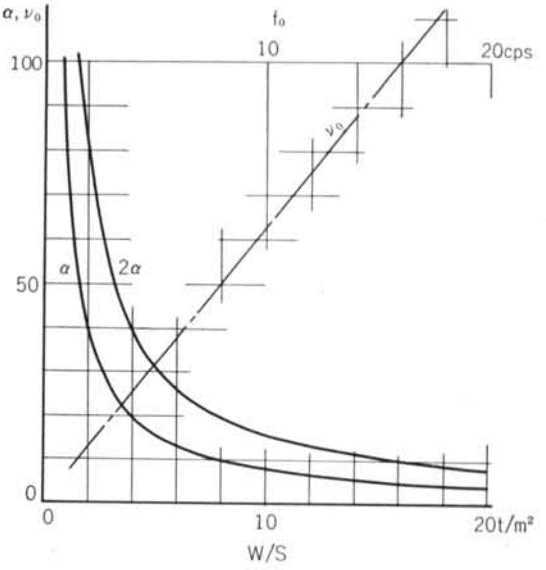
さらにここで，概数として，

$$\gamma=1600\ \mathrm{kg/m^3}, \qquad V_s=100\ \mathrm{m/s}$$

を入れると，

$$\alpha=\frac{8\times10^4}{W/S} \qquad \cdots\cdots(19)$$

となる．一方，ν_0 は毎秒の振動数を f_0(cps) とすると $\nu_0=2\pi f_0$ であるから，ν_0 と α との関係は**図—4** の如くあらわされる．



図—4

一般には，一つの振動系の減衰性は減衰常数 c/c_c で表現するのが普通で，この場合も，この形にした方が他の場合と比較して考えるのに便利であろう．

α と c/c_c の関係は，

$$\frac{c}{c_c}=\frac{\alpha}{\nu_0} \qquad \cdots\cdots(20)$$

であらわされ，ν_0 は**表—1** であたえられている．

一例として，正方形基礎($\psi_1=1.756$)で $\mu=0.25$ の場合を考えると，上下振動については，**表—1** から，

$$\nu_0=2.44V_s\sqrt{\frac{a\gamma}{W}} \qquad \cdots\cdots(21)$$

の如くあらわされるから，⒅式と組合せると，

$$\frac{c}{c_c}=\frac{1}{4.88}\sqrt{\frac{\gamma a}{W/S}}, \qquad ただし，S=a^2 \quad \cdots\cdots(22)$$

となり，c/c_c，すなわち有効減衰常数は，底面圧力の平方根に反比例し，基礎の辺長の平方根に比例する．すなわち，基礎の底面圧力を小さくすれば減衰が大きくなると同一の効果を呈し，また同一の底面圧力ならば，辺長を大きくすれば同様の効果がある．

⒇式は少しかき直すと，

$$\frac{c}{c_c}=\frac{1}{4.88}\sqrt{\frac{\gamma a^3}{W}} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(22,\ a)$$

となり，山原の与えた表現と一致し，基礎と共に動くと考えてもよい土の重量と基礎重量の比と考えることができ，一種の virtual mass と考えてもよい．地盤は半無限であり，基礎から伝わったエネルギーはどこまでも伝わって行って，帰って来ない．そこで，γa^3 だけの土を基礎の振幅でゆすりつづけるためには絶えずエネルギーを補給しなければならない．この重量が大きくなれば，それだけ必要供給量がふえるのは当然である．

(22)式について，前と同様に $\gamma=1600\mathrm{kg/m^3}$ とすると，

$$\frac{c}{c_c}=8.2\sqrt{\frac{a}{W/S}}$$

となる．基礎板の厚さを仮に 60cm とすると，$W/S \fallingdotseq 1500\mathrm{kg/m^2}$ になるから，$c/c_c \fallingdotseq 0.2\sqrt{a}$ の程度になる．1辺の長さ $a=6\mathrm{m}$ ならば，$c/c_c \fallingdotseq 0.5$ の程度になり，共振倍率はおおよそ $1/2(c/c_c)$ とすると，共振倍率は1であり，共振時の心配は不要となる．

以上は，非常に粗っぽい略算であるが，振動絶縁を行なった場合に，ばね下の基礎を薄いマットにしておけば，たとえ，ばね下基礎が加振力と共振するおそれがあっても，これを無視して支障が生じない事実を裏付けていると考えられる．

また，振動絶縁を行なわない場合の固定基礎で，基礎の固有振動数を充分に加振力の振動数を上廻らせるような設計ができ難い時にも，この考え方は設計上の救いとなるであろう．

§4. 結 び

本論文では，振動を発する機械の基礎の設計上の考え方をむしろ解説的に記述し，鳥海，田治見，山原等によって導かれた波動論的基礎の計算法も，表現の方法によっては在来の振動論的に扱いうることを示して，具体的な設計式の形であらわしてみた．実用面で役に立てば望外の幸せである．執筆に当って種々助言を賜った山原君に謝意を表しておく．

<参考文献>

1) **大容量振動機械の弾性支持とその適用例**：山本鎮男：千代田技報，第2巻第3号，千代田化工建設(株)，1962.7
2) **地盤—基礎系における波動問題**：山原浩：本所報 p.41
3) 例えば，**機械工学便覧**：日本機械学会編：p.14—91，1951
4) **弾性地盤における機械基礎の水平振動の理論計算**：鳥海勲：日本建築学会研究報告，No.24，1953.10
5) **耐震理論に関する基礎的研究**：田治見宏：東京大学生産技術研究所報告，第8巻第4号，1959.3
6) 例えば，**防振基礎の設計法**：大築志夫：オーム社 p.60—62，1959.3