

有限要素法による津波波動シミュレーション

高 梨 和 光
(大崎研究室)
清 川 哲 志
(大崎研究室)

§ 1. はじめに

一般に、外洋での津波は微小振幅波を対象とした浅海長波方程式によって記述される。通常、この方程式を解くのに差分法^{1)~7)}が用いられているが、複雑な海底形状や変化に富んだ海岸線を表現するには有限要素法が有利であると考えられる。しかしながら、有限要素法による浅海長波方程式の解析⁸⁾は膨大な計算時間を要することと解析上の数値的な減衰、いわゆる人工粘性を生じることによって、現在は実用段階には至っていないものと考えられる。

本研究の目的は、人工粘性の生じない時間積分法を用いた実用的な有限要素法による津波解析法を提案することにある。そして、解析精度の検討を踏まえて、水深の変化や水路幅の変化による津波の変形と水底の変動による津波の放射について理論解との比較を行ない、提案した解析法の有効性を検討する。さらに、日本海中部地震津波のシミュレーションを行ない、実測値との比較によって十分実用に耐えうるシミュレーションが行なえることを明らかにする。

§ 2. 有限要素法による津波解析の問題点と解決法

2.1 基礎方程式と離散化

平均水面上に $x-y$ 平面、鉛直上向きに z 軸をとり、

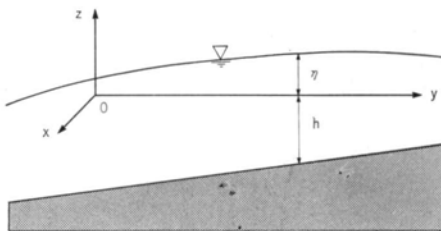


図-1 座標系

座標系を図-1のように設定する。連続の方程式とオイラーの運動方程式を水底から水面まで積分し、線形長波近似を用いると次式が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(hU) + \frac{\partial}{\partial y}(hV) = 0 \quad \dots\dots(1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \quad \dots\dots(2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots(3)$$

ここで、 g は重力加速度、 h は水深、 η は水位上昇量、 U と V は断面平均流速である。断面平均流速 U と V は、 x と y 方向の水粒子速度 u と v を用いて次式で定義される。

$$U = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 u \, dz \quad \dots\dots(4)$$

$$V = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 v \, dz \quad \dots\dots(5)$$

初期条件は、時刻 t_0 で水位上昇量 η あるいは断面平均流速 U と V を定め、海底には断層によって生じた海底変形量を与える。

海岸に接している境界では断面平均流速 U 、 V の法線方向成分 $U_n = V_n = 0$ を与えれば良い。一方、解析領域として覆ったところ以外の海域と接している境界では、波動は進行性の長波として振る舞うものとし、次式のように与える。

$$\pm h(U^2 + V^2)^{\frac{1}{2}} = \eta(g h)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots(6)$$

ここで、正負の符号は座標の取り方と関連して選ばなければならない。これが外界との境界における境界条件である。

浅海長波方程式を有限要素法によって解く場合、空間方向の離散化に重み付き残差法が用いられる⁹⁾。式(1)~(3)の重み付き残差方程式は次のようになる。

$$\int_{\Omega} \eta^* \frac{\partial \eta}{\partial t} \, d\Omega + \int_{\Omega} \eta^* \frac{\partial}{\partial x}(hU) \, d\Omega + \int_{\Omega} \eta^* \frac{\partial}{\partial y}(hV) \, d\Omega = 0 \quad \dots\dots(7)$$

$$\int_{\Omega} U^* \frac{\partial U}{\partial t} d\Omega + g \int_{\Omega} U^* \frac{\partial \eta}{\partial x} d\Omega = 0 \quad \dots\dots(8)$$

$$\int_{\Omega} V^* \frac{\partial V}{\partial t} d\Omega + g \int_{\Omega} V^* \frac{\partial \eta}{\partial y} d\Omega = 0 \quad \dots\dots(9)$$

ここで、 η^* は仮想水位上昇量、 U^* と V^* は仮想断面平均流速、 Ω は解析領域である。

そして、式(7)~(9)の重み付き残差方程式に内挿補間関数を用いて離散化を行なう。このとき、水位上昇量 η 、断面平均流速 U と V と水深 h に内挿補間関数として1次多項式を用いる。また、仮想水位上昇量 η^* と仮想断面平均流速 U^* と V^* についても同様に取り扱うものとする。離散化された方程式を、マトリクスを用いて表わすと次のようになる。

$$[M]\{\phi\}_{,t} + [H]\{\phi\} = \{0\} \quad \dots\dots(10)$$

ここで、 $[M]$ は質量マトリクス、 $[H]$ は剛性マトリクスと呼ばれ、 $\{\phi\}$ は水位上昇量 η と断面平均流速 U と V によるベクトルである。また、第1項の $(,t)$ は時間 t による微分を表わす。以下、必要に応じて同様の表示を用いる。

2.2 従来の解析法の問題点

式(10)のような重み付き残差法による離散化は、差分法による離散化と異なり左辺第1項に質量マトリクス $[M]$ が作用する。このために、時間方向への離散化に関して適合性等の問題が起こる。さらに、方程式を解くのに大次元逆行列を求めなければならないので、解析を行なうのに膨大な計算時間を要することになる。

式(10)を効率良く解く試みは、川原・竹内・首藤⁹⁾によって行なわれた。彼らは時間積分法として2段階ラックス・ヴェンドロフ法を用いた。式(10)に2段階ラックス・ヴェンドロフ法を用いると次のようになる。

$$[M]\{\phi\}^{n+\frac{1}{2}} = [M]\{\phi\}^n - \frac{1}{2}\Delta t[H]\{\phi\}^n \quad \dots\dots(11)$$

$$[M]\{\phi\}^{n+1} = [M]\{\phi\}^n - \Delta t[H]\{\phi\}^{n+\frac{1}{2}} \quad \dots\dots(12)$$

ここで、 Δt は時間刻みである。また、肩付添字 n は時間ステップを表わす。さらに、彼らは高速計算を行なうために式(11)と式(12)の左辺の質量マトリクス $[M]$ の集中化を行なった。集中化⁹⁾は非対角項の成分を対角項に集めることによって達成され、集中化されたマトリクス $[\bar{M}]$ の成分は次のようになる。

$$\bar{M}_{ij} = \sum_j M_{ij} \quad (i=j) \quad \dots\dots(13)$$

$$\bar{M}_{ij} = 0 \quad (i \neq j) \quad \dots\dots(14)$$

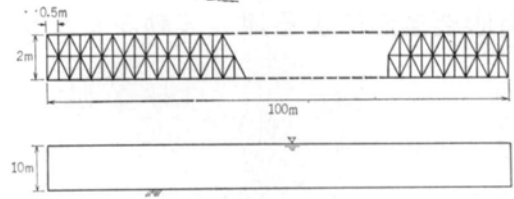


図-2 1次元水路の要素分割図

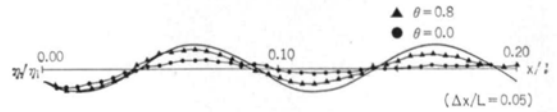


図-3 数値的な減衰がある波の伝播

ここで、 M_{ij} は質量マトリクス $[M]$ の成分、 \bar{M}_{ij} は集中化された質量マトリクス $[\bar{M}]$ の成分である。質量マトリクス $[M]$ は集中化することによって対角マトリクスになる。このために、方程式を解くのに大次元逆行列を求める必要がなくなり、高速計算が可能になる。式(11)と式(12)の左辺の質量マトリクス $[M]$ の集中化を行なうと次のようになる。

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+\frac{1}{2}} = [M]\{\phi\}^n - \frac{1}{2}\Delta t[H]\{\phi\}^n \quad \dots\dots(15)$$

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+1} = [M]\{\phi\}^n - \Delta t[H]\{\phi\}^{n+\frac{1}{2}} \quad \dots\dots(16)$$

しかしながら、式(15)と式(16)を用いることによって高速計算が可能になったものの、数値的な減衰が生じるという実用上の問題を残した。

そこで、川原¹⁰⁾¹¹⁾は数値的な減衰を取り除くために式(15)と式(16)の右辺の質量マトリクス $[M]$ を、質量マトリクス $[M]$ と集中化された質量マトリクス $[\bar{M}]$ を混合したマトリクス $[\tilde{M}]$ に置き換えている。川原らによって提案された2段階ラックス・ヴェンドロフ法は次のようになる。

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+\frac{1}{2}} = [\tilde{M}]\{\phi\}^n - \frac{1}{2}\Delta t[H]\{\phi\}^n \quad \dots\dots(17)$$

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+1} = [\tilde{M}]\{\phi\}^n - \Delta t[H]\{\phi\}^{n+\frac{1}{2}} \quad \dots\dots(18)$$

ここで、混合マトリクス $[\tilde{M}]$ は次のように定義される。

$$[\tilde{M}] = \theta[\bar{M}] + (1-\theta)[M] \quad \dots\dots(19)$$

川原らは重み $\theta (0 \leq \theta \leq 1)$ を混合比と呼び、 θ の値が0.7~0.9を用いる場合に良い結果が得られると報告している。そして、 θ の値として0.8を用いて解析を行なっている。これによって、数値的な減衰はかなり減ったものの、十分に取り除くことはできなかった。なお、 θ の値に0を用いると先に述べた川原・竹内・首藤の方法にな

る。

図-2は水深 $h=10\text{m}$ 、水路幅 $b=2\text{m}$ 、水路長 $l=100\text{m}$ の1次元水路の要素分割図である。図-3は、この水路を用い、川原・竹内・首藤の方法および川原らの方法で波長 $L=10\text{m}$ の波を伝播させ、9秒後の波形を入口から2波長分だけで取り出して理論解と比較したものである。ここで、時間刻み $\Delta t=0.01\text{秒}$ 、要素幅 $\Delta x=0.5\text{m}$ として解析を行なった。丸印が川原・竹内・首藤の方法、三角印が川原らの方法、実線が理論解である。これから分かるように、川原・竹内・首藤の方法では数値的な減衰が大きく波がほとんど伝わらない。また、川原らの方法でも波はかなり減衰しながら伝播している。

2.3 数値的な減衰が生じている原因¹²⁾

数値的な減衰が生じている原因は、重み付き残差法を用いた弱形式による定式化であると考えられる。そこで水深を一定とした1次元問題を考え、数値的な減衰が生じている原因が弱形式による定式化であることを明らかにする。式(7)~(9)を1次要素を用いて離散化すると次のような漸化式が得られる。

$$(1/6)(\eta_{j-1}+4\eta_j+\eta_{j+1})_t + (h/2\Delta x)(-U_{j-1}+U_{j+1})=0 \quad \dots(20)$$

$$(1/6)(U_{j-1}+4U_j+U_{j+1})_t + (g/2\Delta x)(-\eta_{j-1}+\eta_{j+1})=0 \quad \dots(21)$$

ここで、 Δx は要素幅である。また、 η_j や U_j は節点 j における η および U の値を表わしている。

このとき、式(20)と式(21)は次のように変形することができる。

$$\eta_{j,t} + (h/2\Delta x)(-U_{j-1}+U_{j+1}) + (1/6)(\eta_{j-1}-2\eta_j+\eta_{j+1})_t = 0 \quad \dots(22)$$

$$U_{j,t} + (g/2\Delta x)(-\eta_{j-1}+\eta_{j+1}) + (1/6)(U_{j-1}-2U_j+U_{j+1})_t = 0 \quad \dots(23)$$

ここで、次の関係式を用いている。

$$\eta_{j-1}+4\eta_j+\eta_{j+1}=6\eta_j+(\eta_{j-1}-2\eta_j+\eta_{j+1}) \quad \dots(24)$$

$$U_{j-1}+4U_j+U_{j+1}=6U_j+(U_{j-1}-2U_j+U_{j+1}) \quad \dots(25)$$

そして、式(22)と式(23)において Δx を0に近づけると(0にはならない)、次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^3 \eta}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad \dots(26)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{1}{6} \Delta x^2 \frac{\partial^3 U}{\partial t \partial x^2} = 0 \quad \dots(27)$$

このように、有限要素近似で得られた漸化式には式(26)と式(27)の第3項のような、本来の微分方程式系(1)~(3)に存在しない水位勾配や流速勾配の空間、および時間変化

率に相当する項が付け加わっている。これは、有限要素近似が差分近似のような強い近似ではなく、重み付き残差法に基づく弱形式による弱い近似であることによると考えられる。そして、この付加された項が数値的な減衰をもたらしているものと考えられる。これらの項は式(22)と式(23)の第3項に対応するものであるから、付加項を取り除くためには形式的に第3項を0と置けば良い。すなわち、式(22)と式(23)を次のように変形すれば良い。

$$\eta_{j,t} + (h/2\Delta x)(-U_{j-1}+U_{j+1})=0 \quad \dots(28)$$

$$U_{j,t} + (g/2\Delta x)(-\eta_{j-1}+\eta_{j+1})=0 \quad \dots(29)$$

これには、式(24)と式(25)から分かるように、次のような置き換えを行なえば良い。

$$\eta_{j-1}+4\eta_j+\eta_{j+1} \Rightarrow 6\eta_j \quad \dots(30)$$

$$U_{j-1}+4U_j+U_{j+1} \Rightarrow 6U_j \quad \dots(31)$$

これは、質量マトリクスの集中化に他ならない。このように、質量マトリクス $[M]$ の集中化は高速計算を行なうために振動問題とのアナロジーによって導入されたものであるが、同時に数値的な減衰を完全に取り除くことができる。

$$[\bar{M}]\{\phi\}_t + [H]\{\phi\} = \{0\} \quad \dots(32)$$

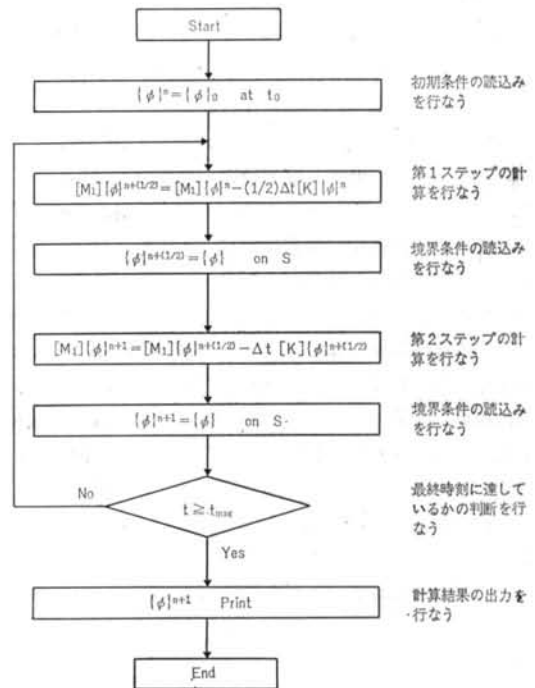


図-4 2段階ラックス・ヴェンドロフ法のアルゴリズム

2.4 数値的な減衰を取り除いた時間積分法¹²⁾

時間積分法に2段階ラックス・ヴェンドロフ法を用いて、式(32)を時間方向へ離散化を行なうと次のようになる。

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+\frac{1}{2}} = [\bar{M}]\{\phi\}^n - \frac{1}{2}\Delta t[H]\{\phi\}^n \quad \dots\dots(33)$$

$$[\bar{M}]\{\phi\}^{n+1} = [\bar{M}]\{\phi\}^n - \Delta t[H]\{\phi\}^{n+\frac{1}{2}} \quad \dots\dots(34)$$

これは、式(17)と式(18)における混合マトリクス $[\bar{M}]$ の定義式(19)で θ を1にした場合に他ならない。このとき、本解析法のアルゴリズムは図-4のようになる。

次に、時間積分法によって、従来提案されているスキームにどのような項が付加しているかを前節と同様に漸化式を用いて検討すると、川原・竹内・首藤の方法は次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{6} c \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots(35)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{6} c \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots(36)$$

川原らの方法は次のようになる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + h \frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{6} (1-\theta) c \Delta x \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots(37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + g \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{1}{6} (1-\theta) c \Delta x \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad \dots\dots(38)$$

ただし、次の関係を用いている。

$$\Delta t = \left(\frac{1}{c}\right) \Delta x \quad \dots\dots(39)$$

ここで、 c は安定性に関するパラメータで、計算を安定に進めるためには要素幅 Δx に対して適切な時間刻み Δt を用いる必要がある。

式(35)~(38)の第3項は、形式上ナビエ・ストークス方程式の粘性項、あるいは拡散方程式の拡散項に対応している。このことから、この項の存在が波の伝播に伴う水位上昇量 η や、断面平均流速 U と V の数値的な減衰をもたらしていると考えられる。そして、川原らの方法で θ の値に0.8を用いたということは、見掛け上の粘性係数あるいは拡散係数を川原・竹内・首藤の方法に比べて80%小さくしたということに相当しており、このために数値的な減衰が改善されたのである。それでも数値的な減衰が完全に取り除かれたわけではなく、式(37)と式(38)から明らかなように θ の値を1と用いることによって、付加された粘性項あるいは拡散項を完全に取り除くことができる。このようにして得られた時間積分法が安定であることは実際の数値計算に基づいて検討する。

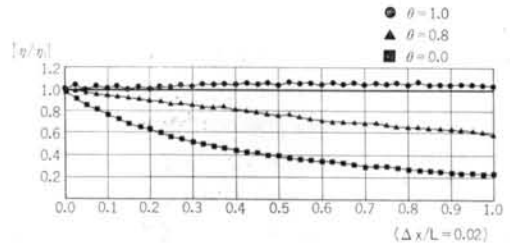


図-5 波の伝播特性

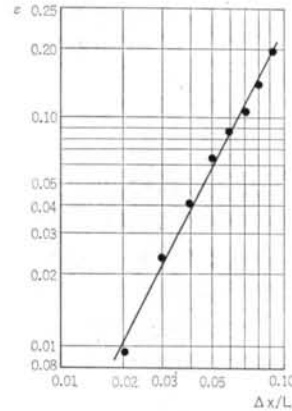


図-6 要素分割と解析精度

§ 3. 数値計算例による検討

3.1 波の伝播特性

数値的な減衰を取り除いた時間積分法を用いた有限要素法による波の伝播特性の検討を行なう。図-5は図-2の1次元水路を用い、波長 L が10mの正弦波を18秒間伝播させ、その水位上昇量 η を表わしたものである。ただし、時間刻み $\Delta t=0.01$ 秒、要素幅 $\Delta x=0.5$ mとして出口の部分に進行波の条件を与え、波が透過するようにして解析を行なった。丸印が本解析法、四角印が川原・竹内・首藤の方法、三角印が川原らの方法、実線が理論解である。実用上、要素幅 Δx は有限になるので、川原・竹内・首藤の方法や川原らの方法では形式的に粘性項を離散化した項が付け加わっている。このために、波が減衰した結果が得られている。本解析法では数値的な減衰を完全に取り除いたので、波の減衰は見られない。ただし、出口での計算誤差による若干の波の反射が見られる。

出口での計算誤差による水位上昇量 η の増加は、入射した波の波長を L として、波長に対する相対要素幅 $\Delta x/L$ が0.05の場合に10%、 $\Delta x/L$ が0.02の場合で5%程度である。また、この解析例から明らかなように、安定に計算が行なわれているのが分かる。

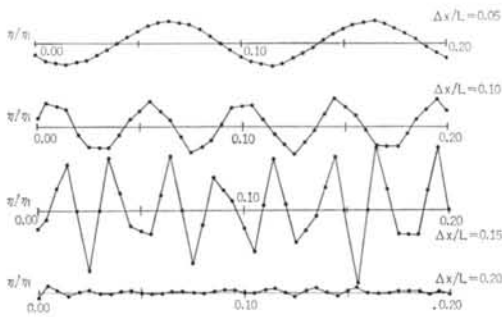


図-7 要素分割と波の伝播

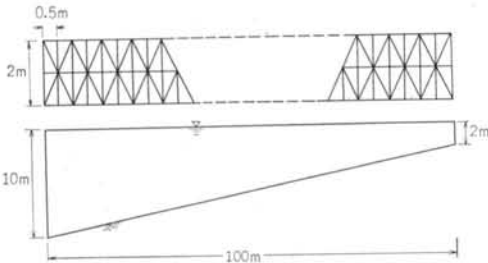


図-8 水深変化のある水路の要素分割図

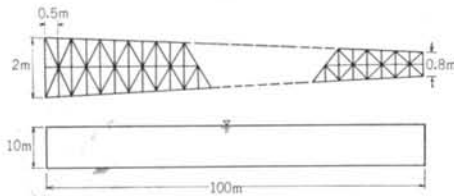


図-9 水路幅変化のある水路の要素分割図

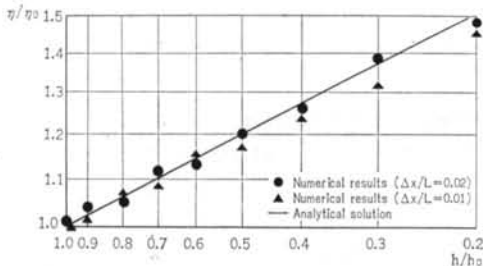


図-10 水深変化による波の変形

3.2 要素分割と解析精度

数値解析を行なう場合、要素分割を適切に行なわれないと正しい計算結果が得られない。図-6は、図-2の1次元水路に波を入れ、その第10番目に入れた波の波形を理論解と比較したときの要素分割と計算誤差の関係を示したものである。ここで、時間刻み $\Delta t = 0.01$ 秒、要素幅 $\Delta x = 0.5$ m にして解析を行なった。このとき、縦軸の計算誤差 ε は次のように定義した。

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\sum ((\eta_t - \bar{\eta}) / \eta_0)^2}{n}} \quad \dots\dots(4)$$

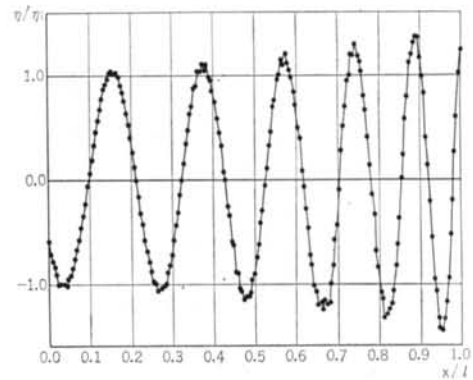


図-11 水深変化による波の伝播

ここで、 η_t は各点の水位上昇量、 $\bar{\eta}$ は各点での水位上昇量の理論値、 η_0 は入口での波の振幅、 n は1波長に含まれる節点数である。横軸は波長 L に対する相対要素幅 $\Delta x/L$ である。黒丸は計算結果で、実線は計算結果に基づいて決定したものである。計算誤差 ε は、波長に対する相対要素幅 $\Delta x/L$ が 0.05 の場合に 7%、 $\Delta x/L$ が 0.02 の場合で 1% 程度である。したがって、実用的な解析を行なう場合、波長に対する相対要素幅 $\Delta x/L$ が 0.05 以下、すなわち1波長を20分割以上する必要がある。また、要素分割と計算誤差 ε との間には次の関係があることが分かる。

$$\varepsilon \propto (\Delta x/L)^2 \quad \dots\dots(4)$$

これは、離散化誤差がほぼ波長に対する相対的な要素面積に比例することを表わしている。

図-7は波長に対する相対要素幅 $\Delta x/L$ を 0.05, 0.10, 0.15, 0.20 として正弦波を伝播させ、時刻9秒での波形を入口から水路長 l の $1/5$ までについて示したものである。このように、 $\Delta x/L$ を 0.05 程度にとれば波がきれいに伝播することが分かる。また、波長に対する相対要素幅 $\Delta x/L$ の値を大きくすると、計算誤差 ε が大きくなるだけでなく波の形が保たれなくなる。 $\Delta x/L$ が 0.10 の場合には波形が角々しくなり、0.15 の場合には激しく振動する。さらに、0.20 になると波が伝播しない。なお、時間刻み $\Delta t = 0.01$ 秒、要素幅 $\Delta x = 0.5$ m である。

3.3 漸変水路における波の変形

水深の変化や水路幅の変化によって波は変形する。このような波の変形をどの程度解析できるかを検討する。

図-8は、水深の変化による波の変形の解析に用いた要素分割図である。図-9は、水路幅の変化による波の変形の解析に用いた要素分割図である。図-10は、図-8の水路の出口に進行波の条件を与え、入口から波長25mと50mの正弦波を25秒間入れた場合の各点での無次元

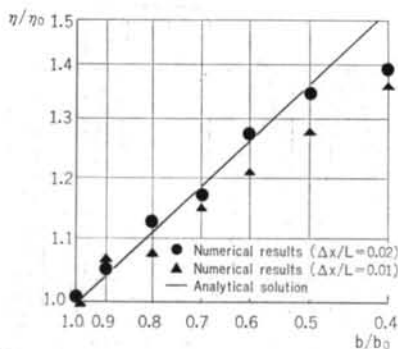


図-12 水路幅変化による波の変形

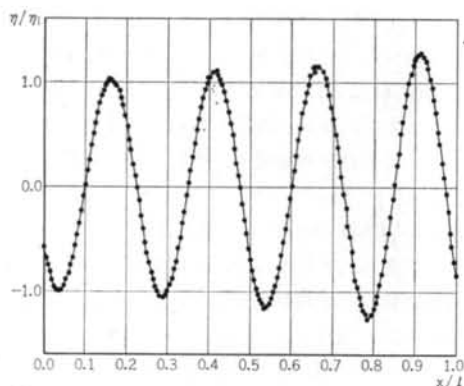


図-13 水路幅変化による波の伝播

化水位上昇量の最大値を表わしたものである。ここで、 h は水深、 h_0 は入口での水深、 $\bar{\eta}$ は水位上昇量の最大値、 $\bar{\eta}_0$ は入口での水位上昇量の最大値である。丸印は $\Delta x/L$ が0.02の場合、三角印は $\Delta x/L$ が0.01の場合の解析結果である。実線はグリーンの公式による理論解である。解析結果は、実用的な範囲で理論解と良く一致しているものと思われる。図-11は、時刻25秒、 $\Delta x/L$ が0.02の場合の波形を表わしたものである。水深変化によって波長 L が変化しているのが分かる。したがって、浅水域での波動の解析を行なう場合、 $\Delta x/L$ の設定に注意しなければならない。

同様に、図-12は図-9の水路の出口に進行波の条件を与え、入口から波長25mと50mの正弦波を25秒間入れた場合の各点での無次元化水位上昇量の最大値を表わしたものである。ここで、 b は水路幅、 b_0 は入口での水路幅、 $\bar{\eta}$ は水位上昇量の最大値、 $\bar{\eta}_0$ は入口での水位上昇量の最大値である。丸印は $\Delta x/L$ が0.02の場合、三角印は $\Delta x/L$ が0.01の場合の解析結果である。実線はグリーン¹³⁾の公式による理論解である。ここでも、解析結果は実用的な範囲で理論解と良く一致しているものと思われる。図-13は、時刻25秒、 $\Delta x/L$ が0.02の場合の波形を表わしたものである。水路幅の変化によって水位上昇量

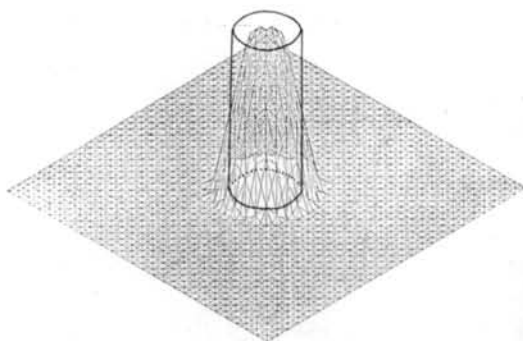


図-14 水底変動による波の放射の初期条件

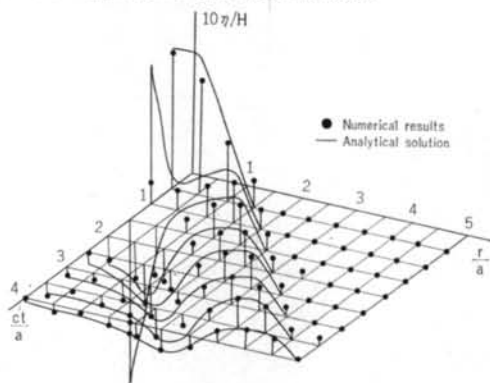


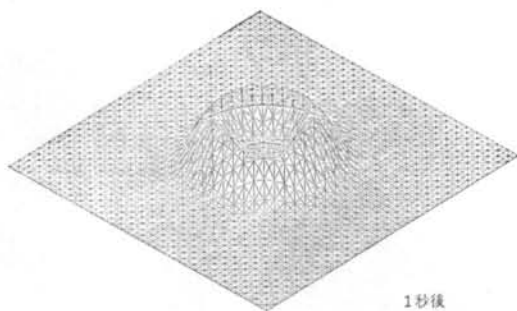
図-15 水底変動による波の放射

η が大きくなっているものの、波長 L は変化していないことが分かる。なお、これらの解析で、 $\Delta x/L$ が0.02の場合に比べて $\Delta x/L$ が0.01の場合の方が精度が若干悪くなっているが、これは水路出口に設けた透過境界からの反射が複雑に影響しているものと思われる。

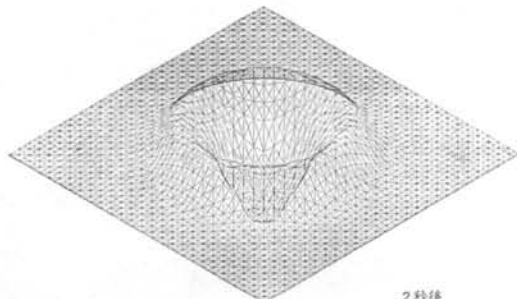
3.4 水底変動による波の放射

水底変動によって波の放射が起こる^{14)~16)}、このような波の放射がどの程度解析できるかを検討する。

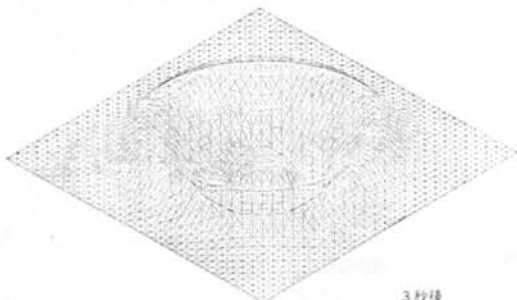
図-14は、水底変動による波の放射の解析に用いた要素分割図である。水深 h が10mの一定水深の水域で、瞬時に半径 a が10mの円筒形をした水底部分が、1m上昇することによって生じる波の2次元伝播解析を行なう。ここでは、水底変動による水位上昇量 η は水底変動量に等しいと仮定している。実線は半径 a が10mで、高さ H が1mの円筒形をした水柱である。解析を行なう場合1波長を表わすのに20分割程度必要なので、半径 a が10mの円筒形をした水柱を、上底の半径 a_u が5m、下底の半径 a_d が15mで高さ H が1mの円錐台に置き換えて解析を行なった。ここで、時間刻み $\Delta t = 0.01$ 秒、要素幅 $\Delta x = 2$ mにして解析を行なった。解析領域は100m四方とし、周囲の境界は波が進行性の長波として振る舞うものとして



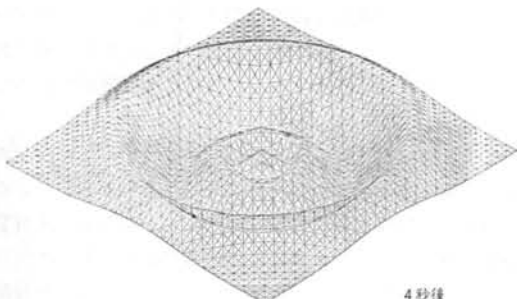
1秒後



2秒後



3秒後



4秒後

図-16 水底変動による波の放射のシミュレーション
いる。

図-15は、水底変動による波の放射をポテンシャル理論から求められた理論解¹⁵⁾¹⁶⁾と比較したものである。丸印は解析結果である。そして、実線はポテンシャル理論から求められた理論解である。X軸 ct/a は無次元時間、Y軸 r/a は円筒の中心から測った距離 r を円筒の半径で無次元化した無次元距離、そしてZ軸 $10\eta/H$ は無次元水位上昇量である。ただし、 c は波速である。これから

分かるように、解析結果はポテンシャル理論から求められた理論解と良く一致している。

図-16は、水底変動によって生じた波を $ct/a=1\sim 4$ まで表わしたものである。水底変動によって生じた波は、先端部分にゆきに従って中心部に比べて波長が長くなり波高は放射減衰によって減衰していくという、既往のポテンシャル理論による結果をよく再現していることが分かる。以上の結果から、津波現象に対応した初期値、境界値問題に対しても十分にシミュレーションが行なえるものと思われる。

3.5 日本海中部地震津波のシミュレーション

1983年5月26日12時00分、秋田県西方約100 km、東経139度4分6秒、北緯40度21分4秒、深さ14kmにマグニチュード $M=7.7$ の浅い地震が発生した。この地震による津波の発生と伝播を本解法を用いてシミュレートする。

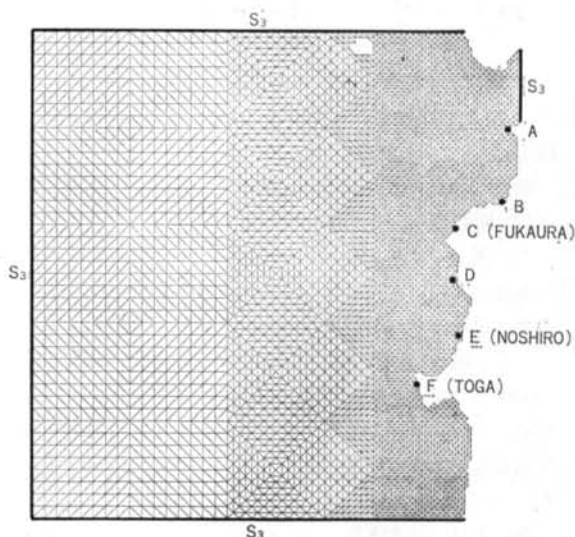


図-17 津波シミュレーションで用いた要素分割図

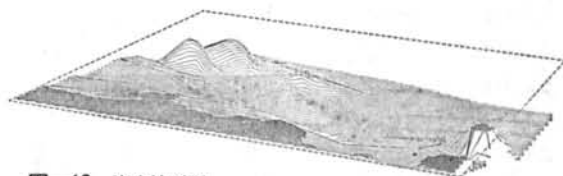


図-18 海底地形図

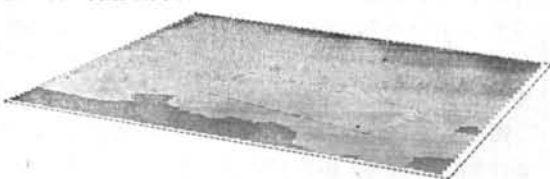
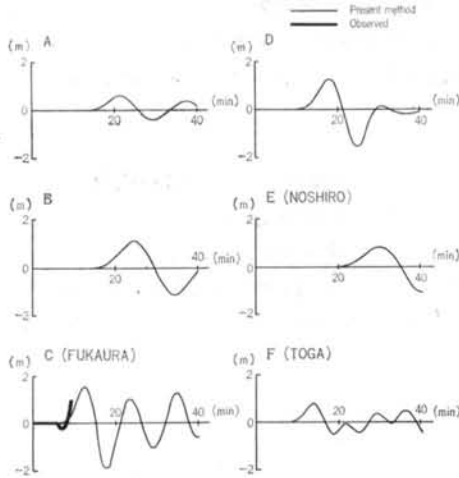


図-19 津波シミュレーションで用いた波源モデル

	A	B	C(深浦)	D	E(能代)	F(戸賀)
シミュレーション	0.7	1.3	2.1	1.7	1.2	0.9
実測値	0.8	2.4	2.8	4.3	3.0	3.5

(単位: m)

表一 最大水位上昇量の実測値と計算値の比較

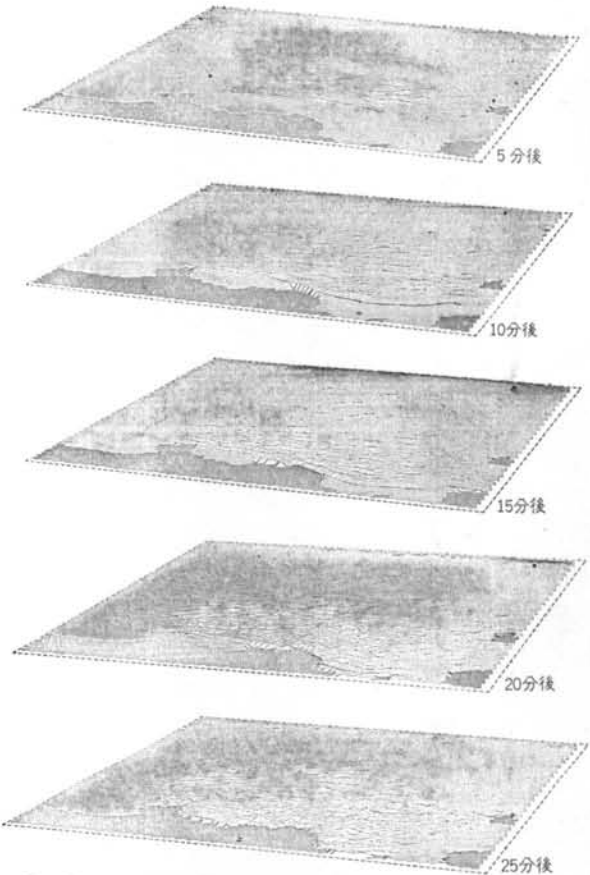


図一20 水位上昇量の時刻歴

解析は波源モデルを用い、250 km 四方の解析領域を設定し、時間刻み $\Delta t=1$ 秒、最小要素幅 $\Delta x=2.2$ kmで行なった。図一17は、シミュレーションに用いた要素分割図である。津波は水深が浅くなるにつれて波長が短くなるので、要素分割も沿岸に近づくに従い細い分割を行なっている。図一18は海底地形図である。一番深い場所では約4000mの深さがある。図一19は、シミュレーションに用いた波源モデルである。この波源モデルを初期水位上昇量として、実時間40分間のシミュレーションを行なった。

表一は、最大水位上昇量を実測と比較したものである。A地点とC地点(深浦)では、地震が発生してから7分後に、津波の第1波が深浦を襲っていることが分かる。そして、解析結果と実測値は良い一致を示している。しかしながら、B地点、D地点、E地点(能代)とF地点(戸賀)では必ずしも良い一致を示していない。これは、これらの付近の海底勾配が非常に緩いので津波の非線形性が卓越したものとわれ、線形理論の限界を示すものであろう。実際、この津波は波長が短く、能代付近では海底勾配が非常に緩いために津波の非線形性が生じたことが報告されている⁷⁾¹⁷⁾。

図一20は、各地点の水位上昇量 η の時刻歴である。縦軸は水位上昇量 η 、横軸は時間 t である。C地点では解析結果と実測値は良い一致を示している。ここで、実測



図一21 津波波動伝播図

値は1分間波高計のために10分以降は欠測となっている。そして、C地点では周期20分、F地点では周期10分の津波がシミュレーションされていることが分かる。図一21は津波波動伝播図である。複雑な海底地形によって津波が変形していることが分かる。

以上、本解析法によって実際の津波現象をある程度再現できることが分かった。そして、従来の差分法による津波解析では浅海域に近づくにつれて、何段階にも計算格子を除々に細くするための情報が必要であった⁷⁾のに対し、本解析法では格子幅を任意にとれるという有限要素法の特長を有効に利用し、余分な情報を必要としないで全領域を一度に解析を行なうことが可能になった。しかしながら、津波現象の再現性をさらに向上させるためには、津波の非線形性の影響等を系統的に検討していく必要があると思われる。

3.6 要素分割と計算時間

本解析法は、数値的な減衰を取り除くと同時に高速計算を行なうために、質量マトリクスの集中化を行なって

いる。図-2の要素分割を用いて900回の計算を行なうのに196.75秒(FACOM M-180ADII)を要した。したがって、1節点当り362マイクロ秒になる。これは、実用的な津波解析を行なう範囲内にあると思われる。

§ 4. おわりに

以上に述べたように、著者らは従来の津波解析法の問題点を理論的に検討し、これを解決する新しい津波波動シミュレーション法を提案した。これらの成果を要約すると以下ようになる。

(1)従来の有限要素解析では、形式上ナビエ・ストークス方程式の粘性項あるいは拡散方程式の拡散項に対応する項が付加され、この項の存在が波の伝播に伴う波高の数値的な減衰をもたらしていることを明らかにした。

(2)高速計算を行なうために導入された質量マトリクスの集中化によって数値減衰を除去した解析が行なえることを明らかにした。

(3)本解析法は、本質的に不規則格子の差分法と等価であり、複雑な境界形状に対応できる有限要素法の利点、高速計算が可能な差分法の利点の両方を同時に生かした解析法である。

(4)従来、解析精度等の基本的な問題についてほとんど検討がなされていなかったが、これらの問題を検討し本解析法が妥当な解析結果を与えることを明らかにした。

(5)日本海中部地震津波のシミュレーションを行ない、本解析法の適用性を検討した結果、従来の差分法による津波解析法では取り扱いの難しい深海域から浅海域へ伝播する津波現象に対しても有効であることが明らかとなった。これは、要素分割を任意に取れる有限要素法の特長を有効に利用した結果である。

〈参考文献〉

- 1) 相田 勇：“1923年関東地震津波の数値実験” 地震研究所彙報 Vol. 48 (1970年) pp.73~86
- 2) 岩崎敏夫・楊 沢民：“三陸大津波の数値実験” 第21回海岸工学講演会論文集(1974年) pp.83~89
- 3) 岩崎敏夫・真野 明：“三陸沖の断層地震による大津波の追算” 第23回海岸工学講演会論文集(1976年) pp.443~447
- 4) 相田 勇：“1944年東南海地震津波の波源モデル” 地震研究所彙報 Vol. 54 (1979年) pp.329~341
- 5) 相田 勇：“南海道沖の津波の数値実験” 地震研究所彙報 Vol. 53 (1981年) pp.713~730
- 6) 相田 勇：“東海道沖におこった歴史津波の数値実験” 地震研究所彙報 Vol. 56 (1981年) pp.367~390
- 7) 相田 勇：“1983年日本海中部地震津波の波源数値モデル” 地震研究所彙報 Vol. 59(1984年) pp.93~104
- 8) 川原睦人・竹内則雄・首藤伸夫：“2段階ラックス・ヴェンドロフ有限要素法による潮汐流解析” 第23回海岸工学講演会論文集(1976年) pp.498~501
- 9) O.C. Zienkiewicz: “The Finite Element Method (3rd ed.)” (1977) pp.529~534
- 10) M. Kawahara, et. al: “Selective Lumping Finite Element Method for Shallow Water Flow” Int. Num. Meth. Fluid, Vol. 2 (1982) pp.89~112
- 11) S. Nakazawa, et. al: “An Analysis of Explicit Finite Element Applications for Shallow Water Equations” Proc. 3rd Int. Conf. Finite Element Methods in Flow Problem, Vol. 2 (1980) pp.1~12
- 12) 高梨和光・清川哲志：“浅海長波方程式の有限要素法解析における問題点とその解決法” 第31回海岸工学講演会論文集(1984年) pp.118~122
- 13) 堀川清司：“海岸工学” 東京大学出版会(1979年) pp.145~155
- 14) 真野 明：“海底変動と発生津波との関係に関する数値計算” 第24回海岸工学講演会論文集(1977年) pp.60~64
- 15) K. Kajiura: “The Leading Wave of a Tsunami” Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. 41 (1963) pp.535~571
- 16) 梶浦欣二郎：“津波(水工学シリーズ66-13)” 土木学会水理委員会(1966年)
- 17) 羽島徳太郎：“1983年日本海中部地震津波の規模および波源域” 地震研究所彙報 Vol. 58 (1983年) pp.721~733

