

# Wiener-Lee 変換を用いて地震動波形の Fourier 振幅から原波形を再現する 試み

壇 一 男  
(大崎研究室)

渡 辺 孝 英  
(大崎研究室)

神 田 順\*  
(東京大学)

## § 1. はじめに

地震動波形の振幅と位相の関係について調べた研究が、政尾ら<sup>1)</sup>や辰巳ら<sup>2)</sup>などによって行なわれている。政尾らは、1940年 Imperial Valley 地震 (El Centro, NS 成分) および 1957年 San Francisco 地震 (Golden Gate, NS 成分) の加速度波形の Fourier 変換の振幅と位相の関係を Hilbert 変換<sup>3)</sup>を用いて考察しているが、相互間の変換は極めてむずかしいと述べている。辰巳らは、Fourier 振幅の回帰表現式と Wiener-Lee 変換<sup>3)</sup>を用いて、1940年 Imperial Valley 地震 (El Centro, NS 成分) および 1968年十勝沖地震 (八戸, EW 成分) の変位波形に対応する最小位相推移関数<sup>3)</sup>を推定し、それが伝播経路のシステムにかかわるものを表わし、残余の関数が発震にかかわる情報を多くもっていることを示している。

本研究は、振幅と位相の関係を表わす Wiener-Lee 変換の近似表現式を導き、それを用いて地震動波形の Fourier 振幅から位相を推定し原波形を再現しようというものである。計算の対象とした地震動波形は、1979年 Imperial Valley 地震 (El Centro Array No.2, 140° 成分) および 1983年 Coalinga 地震 (Pleasant Valley Pumping Plant Basement, 315° 成分) の本震と余震の加速度波形と、それを積分して求めた速度波形である。

## § 2. 最小位相推移関数と Wiener-Lee 変換

実数の因果関数  $h(t)$  の片側 Laplace 変換  $H_I(p)$  が  $\text{Re } p \geq 0$  でゼロ点も極も有しない、すなわち  $\ln H_I(p)$  が  $\text{Re } p \geq 0$  で正則のとき、 $h(t)$  を最小位相推移関数と呼ぶ。

最小位相推移関数  $h(t)$  の Fourier 変換  $H(\omega)$  は、

$t < 0$  で  $h(t) = 0$  だから、 $j = \sqrt{-1}$  として

$$H(\omega) = \int_0^{\infty} h(t) \exp[-j\omega t] dt \quad \dots\dots(1)$$

である。ここで、減衰量  $\alpha(\omega)$  と位相量  $\theta(\omega)$  を用いて  $H(\omega) = \exp[-\alpha(\omega) - j\theta(\omega)]$  とおき、 $\omega = -\tan[\delta/2]$  の変数変換を行なうと、 $h(t)$  は実関数だから減衰量  $\alpha(\omega)$  は偶関数、位相量  $\theta(\omega)$  は奇関数であるので、

$$\ln H(\omega) = \ln H\left(-\tan \frac{\delta}{2}\right) \quad \dots\dots(2)$$

$$= -\alpha\left(\tan \frac{\delta}{2}\right) + j\theta\left(\tan \frac{\delta}{2}\right) \quad \dots\dots(3)$$

$$= A(\delta) - j\theta(\delta) \quad \dots\dots(4)$$

と書ける。 $\omega$  が  $-\infty$  から  $+\infty$  まで変化するとき、 $\delta$  は  $+\pi$  から  $-\pi$  までの値をとる。したがって、 $A(\delta)$  および  $\theta(\delta)$  は下のように Fourier 級数に展開できる。

$$A(\delta) = c_0 + c_1 \cos \delta + \dots + c_k \cos k\delta + \dots \quad \dots\dots(5)$$

$$\theta(\delta) = d_1 \sin \delta + \dots + d_k \sin k\delta + \dots \quad \dots\dots(6)$$

$$c_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(\delta) \cos k\delta d\delta \quad \dots\dots(7)$$

$$d_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \theta(\delta) \sin k\delta d\delta \quad \dots\dots(8)$$

一方、最小位相推移関数  $h(t)$  の片側 Laplace 変換  $H_I(p)$  は

$$H_I(p) = \int_0^{\infty} h(t) \exp[-pt] dt \quad \dots\dots(9)$$

である。ここで、

$$z = \frac{1-p}{1+p}, \quad p = \frac{1-z}{1+z} \quad \dots\dots(10)$$

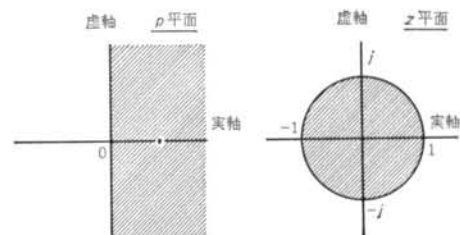


図-1 p 平面から z 平面への写像

\*東京大学工学部助教授

の変数変換を行なうと、この変換は図-1に示すように  $p$  平面の右半平面を  $z$  平面の単位円内部へ写す写像である。  $\ln H_I(p)$  は  $p$  平面の右半平面 および 虚軸上で正則だから、  $\ln H_I([1-z]/[1+z])$  は  $z$  平面の単位円内部 および円周上で正則である。したがって、  $H_I([1-z]/[1+z])$  は  $z$  平面の単位円内部および円周上で下のよう  
に、べき級数展開できる。

$$\ln H_I\left(\frac{1-z}{1+z}\right) = A_0 + A_1 z + \dots + A_k z^k + \dots \quad \dots(1)$$

さて、式(1)および式(9)から明らかのように、  $H_I(p)$  の  $p$  に  $j\omega$  を代入したものが  $H(\omega)$  である。  $H(\omega)$  を  $\delta$  で表わすと、

$$z = \frac{1-j\omega}{1+j\omega} = \frac{1+j \tan[\delta/2]}{1-j \tan[\delta/2]} = \exp[j\delta] \quad \dots(2)$$

であるから式(1)に代入して、

$$\begin{aligned} \ln H(\omega) &= A_0 + A_1 \exp[j\delta] + \dots \\ &+ A_k \exp[jk\delta] + \dots \quad \dots(3) \\ &= A_0 + A_1 \cos \delta + \dots + A_k \cos k\delta + \dots \\ &+ j(A_1 \sin \delta + \dots + A_k \sin k\delta + \dots) \quad \dots(4) \end{aligned}$$

となる。式(4)、(5)、(6)および式(4)の各係数を比較して、

$$A_0 = c_0, \quad A_k = c_k = -d_k \quad (k \geq 1) \quad \dots(5)$$

を得る。

以上より、最小位相推移関数  $h(t)$  の Fourier 変換  $H(\omega)$  を  $\exp[-\alpha(\omega) - j\theta(\omega)]$  と表わし変数交換を行なうと、  $A(\delta)$  および  $\Theta(\delta)$  の Fourier 級数展開の係数には  $c_k = -d_k$  ( $k \geq 1$ ) の関係があることが示された。これは、  $h(t)$  が最小位相推移関数であれば、その Fourier 変換の振幅から一意的に位相が定まることを意味している。なお、位相から振幅を求める場合は式(5)の  $c_0$  を定める必要がある。

これまで述べてきた諸量の関係を図-2に示す。

### § 3. 位相の推定と原波形の再現の方法

Wiener-Lee 変換を用いた既知の Fourier 振幅に対応する位相の推定、すなわち最小位相推移関数の推定は、図-2に対応して図-3のようになる。

ある関数  $g(t)$  の Fourier 変換を  $G(\omega)$  とすると、その減衰量は  $\alpha(\omega) = -\ln|G(\omega)|$  で定義される。  $\omega = -\tan[\delta/2]$  の変数変換を行ない、  $A(\delta) = -\alpha(\tan[\delta/2])$  とおく。そこで  $A(\delta)$  の Fourier 級数展開の係数  $c_k$  を式(7)を用いて求める。この係数  $c_k$  を用いて係数  $d_k$ 、  $\Theta(\delta)$ 、  $\theta(\omega)$  の順で位相量を計算し、  $\alpha(\omega)$  と  $\theta(\omega)$  とから  $H(\omega)$  を求め、最後に  $H(\omega)$  に Fourier 逆変換をほ

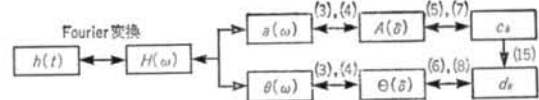


図-2 最小位相推移関数  $h(t)$  と Wiener-Lee 変換

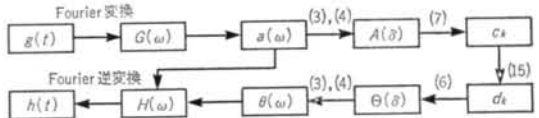


図-3 最小位相推移関数  $h(t)$  の推定

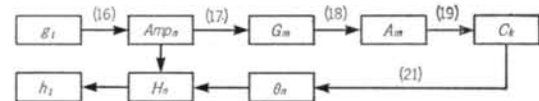


図-4 最小位相推移列  $h_i$  の推定

どこして最小位相推移関数  $h(t)$  を推定する。

この方法を応用して、本研究では地震動波形の Fourier 振幅から位相を図-4のように推定し、原波形の再現を試みた。

まず、地震動波形  $g(t)$  の離散型データを  $g_l$  ( $l = -L/2+1, \dots, L/2$ ) とすると、  $n$  次の角振動数  $\omega_n = 2\pi n/Ldt$  ( $n = -L/2+1, \dots, L/2$ ) に対する Fourier 係数  $G_n$  は、

$$G_n = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^{L/2} g_l \exp[-j2\pi nl/L] \quad \dots(6)$$

であり、 Fourier 振幅  $Amp_n$  は  $|Ldt \cdot G_n|$  で与えられる。ただし、因果関数として取り扱えるように  $l \leq 0$  のとき  $g_l = 0$  としている。このとき、  $g(t)$  の Fourier 変換  $G(\omega)$  の絶対値  $|G(\omega)|$  は、 Sampling 定理(付録参照)を用いて、

$$\begin{aligned} |G(\omega)| &\simeq \left| Ldt \sum_{n=-L/2+1}^{L/2} G_n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\omega Ldt}{2}\right)}{n\pi - \frac{\omega Ldt}{2}} \right| \\ &\simeq \left| \sum_{n=-L/2+1}^{L/2} Amp_n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\omega Ldt}{2}\right)}{n\pi - \frac{\omega Ldt}{2}} \right| \quad \dots(7) \end{aligned}$$

と近似できる。

ここで、  $\delta$  の区間  $[-\pi, \pi]$  を  $M$  等分して  $\delta_m = 2\pi m/M$  ( $m = -M/2+1, \dots, M/2$ ) での  $A(\delta)$  を  $A_m$  とおくと

$$A_m = \ln \left| G\left(-\tan \frac{\delta_m}{2}\right) \right| \quad \dots(8)$$

となる。以上より、  $A(\delta)$  の Fourier 級数展開の係数  $C_k$  は、

$$C_k \simeq \frac{2}{M} \sum_{m=-M/2+1}^{M/2} A_m \cos k\delta_m \quad \dots(9)$$

で与えられ、 $n$ 次の角振動数  $\omega_n = 2\pi n/L\Delta t$  に対する位相量  $\theta_n$  は次式のようになる。

$$\theta_n \approx -\sum_{k=1}^{M/2} C_k \sin k\delta n \quad \dots\dots(17)$$

$$= -\sum_{k=1}^{M/2} C_k \sin [k2 \tan^{-1}(-\omega_n)] \quad \dots\dots(18)$$

最後に、Fourier 振幅  $Amp_n$  と位相量  $\theta_n$  とから  $H_n$  を計算し、 $H_n$  に Fourier 逆変換をほどこして最小位相推移列  $h_l$  を推定する。

ここで、本方法を用いるときの留意点を二つあげておく。

(i)式(17)、(18)および式(20)が近似表現であること。

(ii)式(18)で、 $m=M/2$  のとき  $G(\infty)$  の値が必要となるが、ここでは  $m=M/2-1$  の値で代用していること。

#### § 4. 位相差分および相互相関係数

波形に含まれる各周波数の成分波が、お互いにどのように重なり合い、全体としてどのような形状あるいは包絡線を形づくっているかを表現する一つの方法は、各周波数の成分波の位相の差分、すなわち位相差分  $\Delta\theta_n = \theta_{n+1} - \theta_n$  ( $n = -L/2+1, \dots, L/2$ ,  $\theta_{L/2+1} = -\theta_{-L/2+1}$ ,  $|\Delta\theta_n| \leq \pi$ ) をとることである<sup>4)</sup>。本研究では、原波形  $g_l$  の位相差分  $\Delta\theta_n^* = \theta_{n+1}^* - \theta_n^*$  と、推定した最小位相推移列  $h_l$  の位相差分  $\Delta\theta_n = \theta_{n+1} - \theta_n$  の差をとって比較した。

また、原波形とそれから推定される最小位相推移列の似具合を定量的に把握するために、相互相関係数  $R_l$  ( $l = -L/2+1, \dots, L/2$ ) を用いた。

関数  $g(t)$  と  $h(t)$  の相互相関関数  $C_{gh}(\tau)$  および相互相関係数  $R_{gh}(\tau)$  は、

$$C_{gh}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \cdot h(t+\tau) dt \quad \dots\dots(19)$$

$$R_{gh}(\tau) = \frac{C_{gh}(\tau)}{\sqrt{C_{gg}(0)} \cdot \sqrt{C_{hh}(0)}} \quad \dots\dots(20)$$

で定義される。したがって、離散型データの場合、 $dt$  を  $\Delta t$ 、 $T$  を  $L\Delta t$ 、 $\int$  を  $\sum$  に代えて、

$$C_{gh,l} = \frac{1}{L} \sum_{i=-L/2+1}^{L/2} g_i \cdot h_{l+i} \quad \dots\dots(21)$$

$$R_{gh,l} = \frac{C_{gh,l}}{\sqrt{C_{gg,0}} \cdot \sqrt{C_{hh,0}}} \quad \dots\dots(22)$$

と表現できる。ここで  $h_l$  は、

$$h_l = \sum_{n=-L/2+1}^{L/2} H_n \exp[j2\pi nl/L] \quad \dots\dots(23)$$

と書くことができ、周期が  $L$  の周期列であるから、 $-L/2 \leq l+i < -L/2+1$  のとき  $h_{l+i} = h_{l+i+L}$ 、 $L/2 < l+i \leq L$  のとき  $h_{l+i} = h_{l+i-L}$  である。

相互相関係数の最大値  $\text{Max}\{R_{gh,l}\}$  が 1 に近いほど  $g_l$  と  $h_l$  は似ていることを示し、もし  $h_l$  が  $l$  だけずれて  $g_l$  と完全に一致している、すなわち  $g_l = h_{l+i}$  ( $l = -L/2+1, \dots, L/2$ ) であるならば  $\text{Max}\{R_{gh,l}\} = 1$  である。

#### § 5. 1 質点系の応答波形の計算例

はじめに、計算の検証のために固有角振動数  $\omega_0$ 、減衰定数  $\beta$  の 1 質点系に、2 種類の外力が作用したときの応答波形を例として計算を行なった。

外力を  $-100\delta(t) + 50\delta(t-10)$  とした場合の系の応答波形を  $g_l(t)$  とすると、運動方程式は下のようになる。ここに、 $\delta(t)$  は面積が 1 のデルタ関数である。

$$\frac{d^2 g_1}{dt^2} + 2\beta\omega_0 \frac{dg_1}{dt} + \omega_0^2 g_1 = 100\delta(t) - 50\delta(t-10) \quad \dots\dots(24)$$

両辺に Laplace 変換をほどこして、片側 Laplace 変換

$$G_{11}(p) = \frac{100 - 50 \exp[-10p]}{p^2 + 2\beta\omega_0 p + \omega_0^2} \quad \dots\dots(25)$$

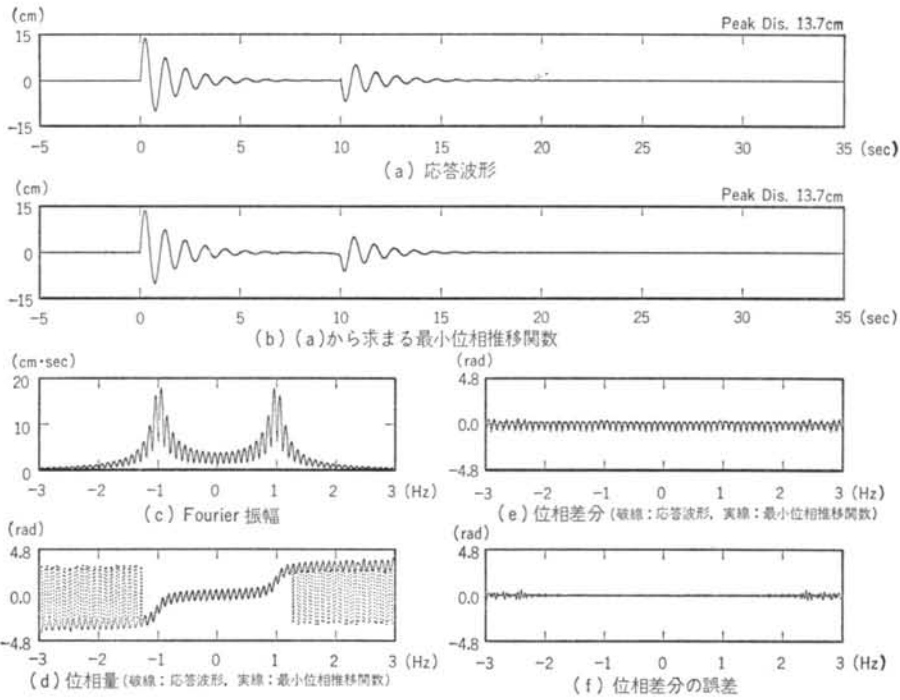
を得る。この式のゼロ点および極は、 $n$  を整数として

$$p = \frac{-\ln 2 + j2n\pi}{10}, \quad p = -\beta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\beta^2} \quad \dots\dots(26)$$

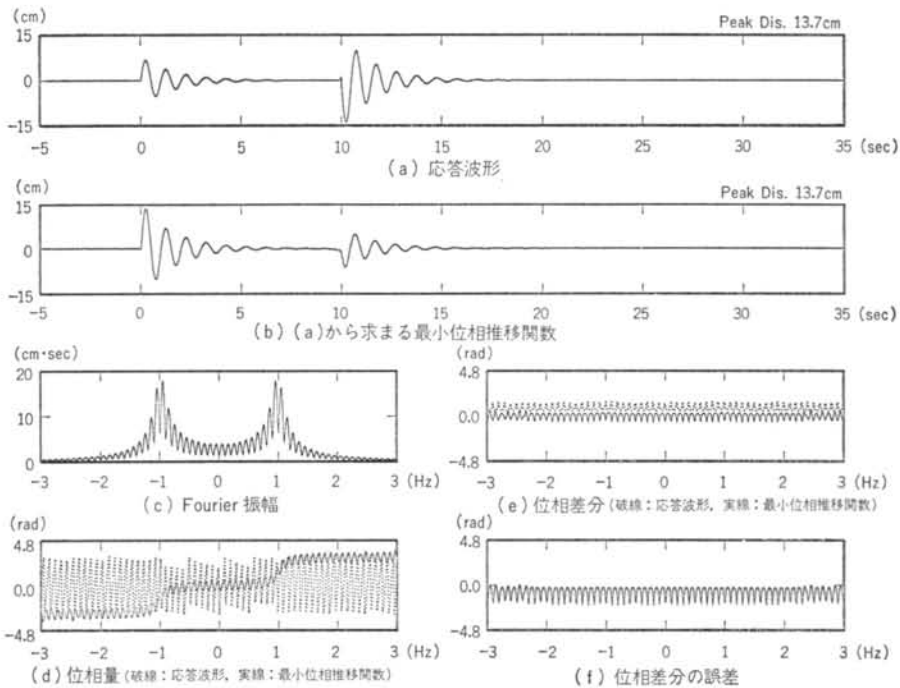
であるから、 $G_{11}(p)$  は  $\text{Re } p \geq 0$  でゼロ点も極も有しない。したがって、 $g_l(t)$  は最小位相推移関数であり、 $g_l(t)$  の Fourier 振幅  $|G_l(\omega)|$  から求まる最小位相推移関数  $h_l(t)$  は  $g_l(t)$  と一致するはずである。なお、 $g_l(t)$  の Fourier 変換  $G_l(\omega)$  は、式(25)に  $p = j\omega$  を代入して下のようになる。

$$G_l(\omega) = \frac{100 - 50 \exp[-j10\omega]}{-\omega^2 + j2\beta\omega_0\omega + \omega_0^2} \quad \dots\dots(27)$$

図-5の(a)に  $g_l(t)$  を、(b)に  $h_l(t)$  を示す。計算は固有角振動数  $\omega_0 = 2\pi(1 \text{ Hz})$ 、減衰定数  $\beta = 0.1$ 、 $\Delta t = 0.01$ 、 $L = 8192$ 、 $\delta$  の分割数  $M = 4096$  として行なった。



図一五 計算例(1): 外力を  $-100\delta(t)+50\delta(t-10)$  とした場合



図一六 計算例(2): 外力を  $-50\delta(t)+100\delta(t-10)$  とした場合

なお、応答計算には式(9)を用いた。両者の相互相関係数の最大値  $\text{Max}\{R_{g_1, h_1}\}$  は 0.987 であり、図に示す  $h_1(t)$  は  $g_1(t)$  にほぼ一致している。図-5の(c), (d), (e)および(f)にはそれぞれ Fourier 振幅  $\text{Amp}_n$ , 位相  $\theta_n^*$  および  $\theta_n$ , 位相差分  $\Delta\theta_n^*$  および  $\Delta\theta_n$ , 位相差分の誤差  $\Delta\theta_n - \Delta\theta_n^*$  を示す。位相差分の誤差はおおよそ 0 であり、原波形  $g_1(t)$  の位相が再現されていることが分かる。

もう一つの値として、同じ系に  $-50\delta(t) + 100\delta(t-10)$  を入力したときの応答波形  $g_2(t)$  について計算を行った。 $g_2(t)$  の片側 Laplace 変換  $G_{2I}(p)$  は、

$$G_{2I}(p) = \frac{50 - 100 \exp[-10p]}{p^2 + 2\beta\omega_0 p + \omega_0^2} \quad \dots\dots(31)$$

である。この式のゼロ点および極は、 $n$  を整数として

$$p = \frac{\ln 2 + j2n\pi}{10}, \quad p = -\beta\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\beta^2} \quad \dots\dots(32)$$

であるので、 $G_{2I}(p)$  は  $\text{Re } p \geq 0$  でゼロ点を有しており、 $g_2(t)$  は最小位相推移関数ではない。また、 $g_2(t)$  の Fourier 変換  $G_2(\omega)$  は

$$G_2(\omega) = \frac{50 - 100 \exp[-j10\omega]}{-\omega^2 + j2\beta\omega_0\omega + \omega_0^2} \quad \dots\dots(33)$$

となり  $|G_2(\omega)|$  は  $|G_1(\omega)|$  と等しい。したがって、 $g_2(t)$  の Fourier 振幅  $|G_2(\omega)|$  から求まる最小位相推移関数  $h_2(t)$  は  $g_2(t)$  とは一致せず、はじめの例としてあげた  $h_1(t)$  の方と一致するはずである。

図-6の(a)に  $g_2(t)$  を、(b)に  $h_2(t)$  を示す。 $g_2(t)$  と  $h_2(t)$  の相互相関係数の最大値  $\text{Max}\{R_{g_2, h_2}\}$  は 0.812、その符号は負である。図-6の(c), (d), (e)および(f)には、

それぞれ Fourier 振幅・位相・位相差分および位相差分の誤差を示す。位相差分の誤差は  $-3\pi/4$  から 0 までの範囲に分布しており、 $g_2(t)$  の位相と  $h_2(t)$  の位相とは明らかに異なっていることが分かる。

また、 $h_2(t)$  と図-5(a)の  $h_1(t)$  の相互相関係数を計算した結果、その最大値  $\text{Max}\{R_{g_1, h_1}\}$  は 1.0 となり、上で述べたようにこの両者は完全に一致しているのが分かった。

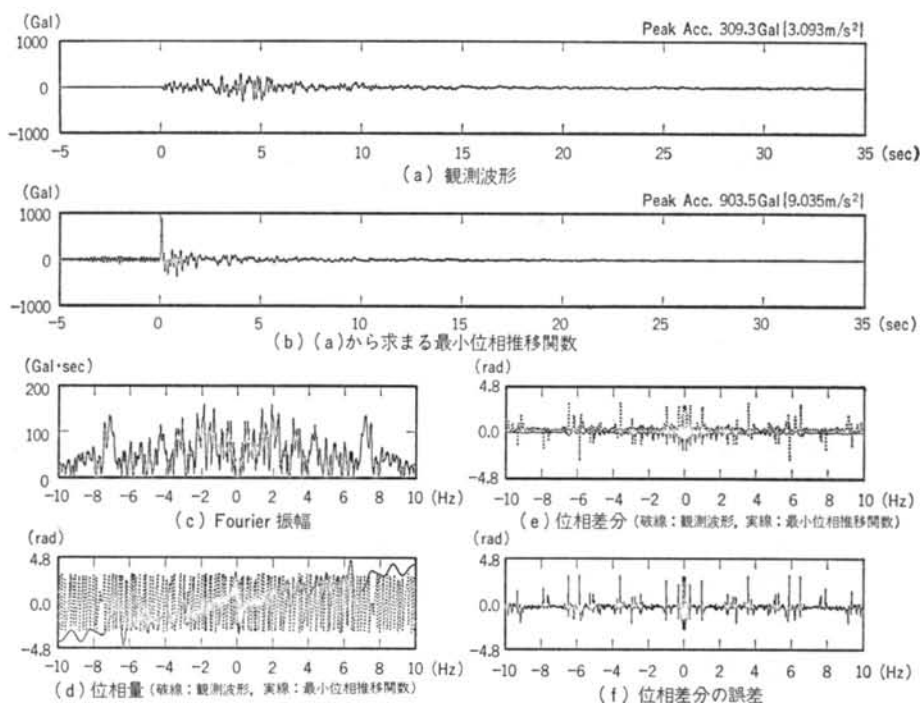
## § 6. 地震動波形の再現

次に、この方法を用いて本研究の目的である、地震動波形の Fourier 振幅から位相を推定し、原波形を再現することを試みた。ここで、計算の対象とした地震動波形は、1979年 Imperial Valley 地震の本震と余震の El Centro Array No. 2 (140°成分)における加速度波形とそれを積分して求めた速度波形、および1983年 Coalinga 地震の本震と余震の Pleasant Valley Pumping Plant の Basement (315°成分)における加速度波形とそれを積分して求めた速度波形の、全部で8波である。波形はいずれも主要動部分の始まりと考えられる時刻を0秒とし、それ以前の初期微動部分は除去して解析に用いた。なお、 $\delta$  の分割数  $M$  は 4096 として計算を行なった。

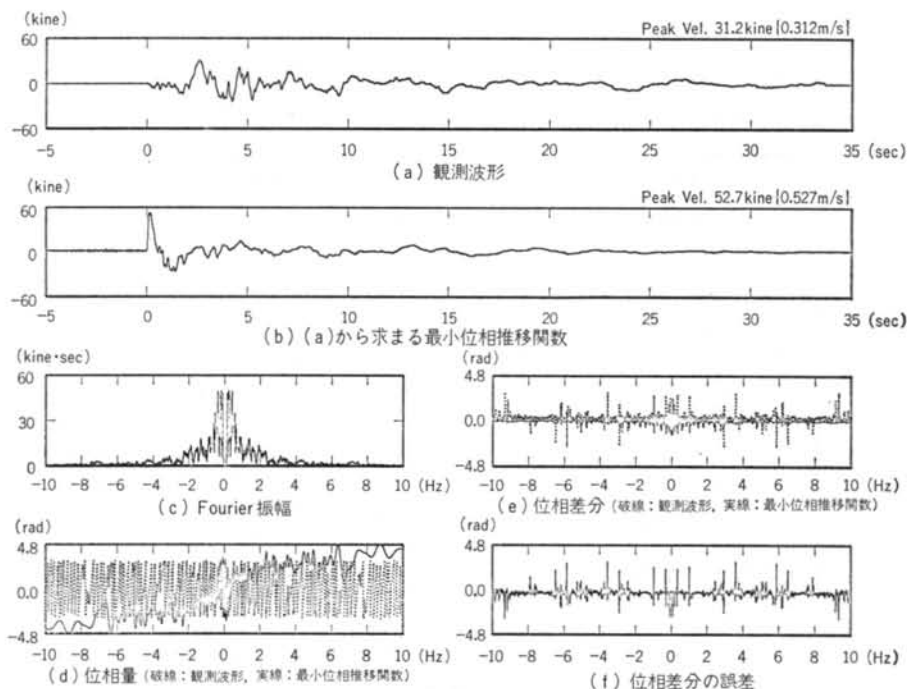
表-1に、観測点の位置、地震の震源時間・震源位置・規模および震央距離・震源距離・波形処理に用いられたフィルター・最大地動の値を示す。

観測点名	El Centro Array No.2 (140°成分)		Pleasant Valley Pumping Plant, Basement (315°成分)	
観測点位置	北緯 32° 54.96' 西経 115° 21.96'		北緯 36° 18.48' 西経 120° 14.94'	
地震名	1979年 Imperial Valley 地震 <sup>5)</sup>		1983年 Coalinga 地震 <sup>6)</sup>	
	本震	余震	本震	余震
震源時間 (G.M.T.)	10月15日 23時16分55.09秒	10月15日 23時19分29.98秒	5月2日 23時42分37.7秒	5月9日 2時49分11.2秒
震源位置	北緯 32° 38.37' N 西経 115° 19.68' W	北緯 32° 46.94' N 西経 115° 26.45' W	北緯 36° 13.8' N 西経 120° 19.2' W	北緯 36° 13.8' N 西経 120° 18.6' W
震源深さ	10km	10.5km	10km	13km
規模	$M_L=6.6$	$M_L=5.2$	$M_L=6.7$	$M_L=5.1$
震央距離	30.8km	16.4km	10.8km	10.2km
震源距離	32.4km	19.5km	14.7km	16.6km
波形処理に用いられたフィルター	(1/30Hz, 0), (1/6Hz, 1), (23Hz, 1), (25Hz, 0) で表せる台形フィルター	$f_0=0.5\text{Hz}$ , $n=4$ の Butterworth フィルター	$f_0=0.1\text{Hz}$ , $n=4$ の Butterworth フィルター	$f_0=0.5\text{Hz}$ , $n=4$ の Butterworth フィルター
最大加速度	309.3Gal {3.093m/s <sup>2</sup> }	151.1Gal {1.511m/s <sup>2</sup> }	267.3Gal {2.673m/s <sup>2</sup> }	127.2Gal {1.272m/s <sup>2</sup> }
最大速度	31.2kine {0.312m/s}	10.4kine {0.104m/s}	21.7kine {0.217m/s}	6.5kine {0.065m/s}

表-1 解析に用いた地震動波形



図一七 1979年 Imperial Valley 地震の本震 ( $M_L=6.6$ ) の El Centro Array No. 2 ( $140^\circ$ ) における加速度波形



図一八 1979年 Imperial Valley 地震の本震 ( $M_L=6.6$ ) の El Centro Array No. 2 ( $140^\circ$ ) における速度波形

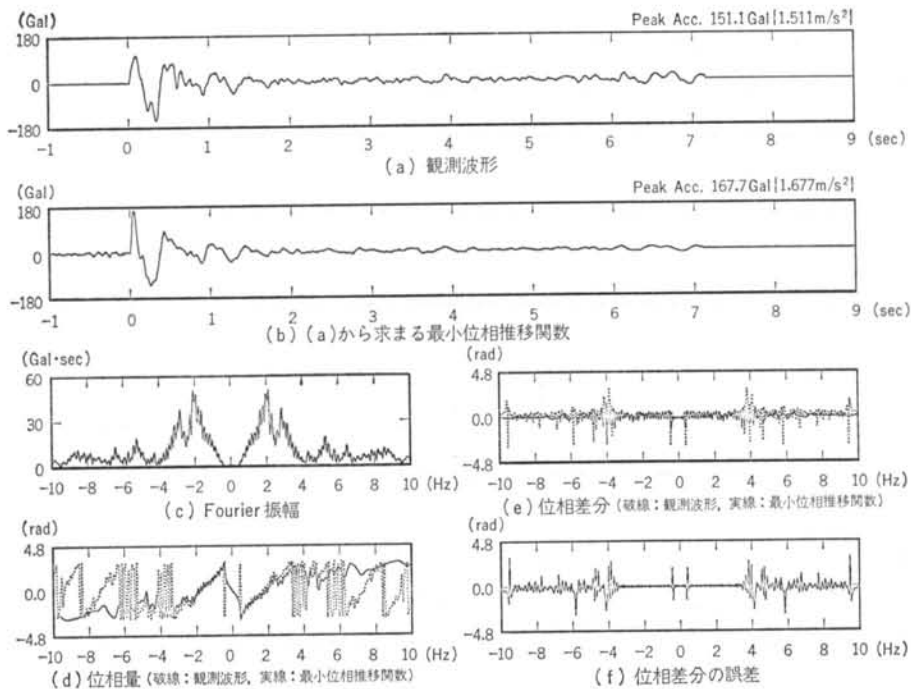


図-9 1979年 Imperial Valley 地震の余震 ( $M_L=5.2$ ) の El Centro Array No. 2 ( $140^\circ$ ) における加速度波形

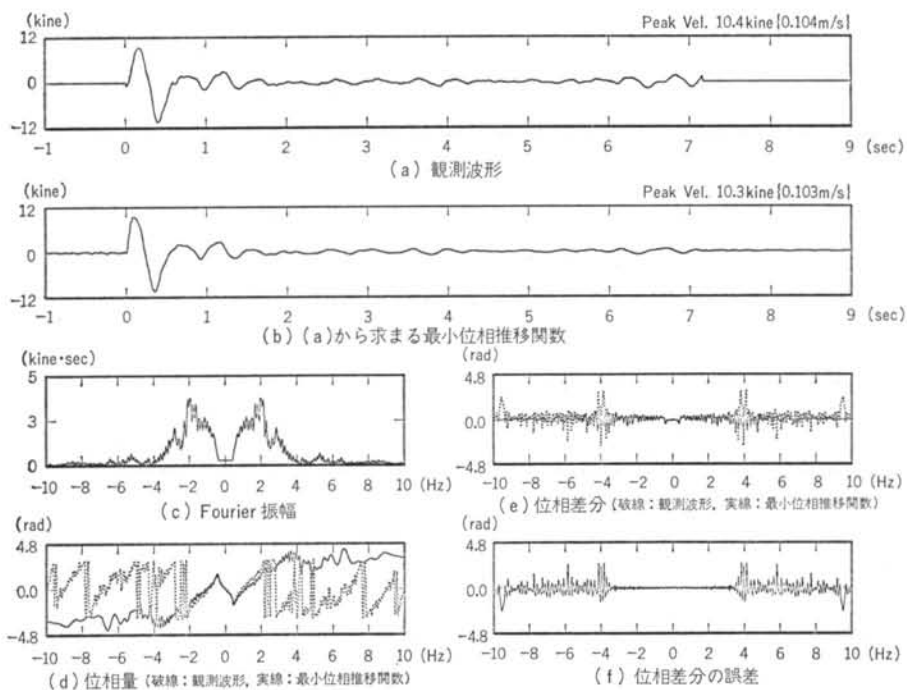
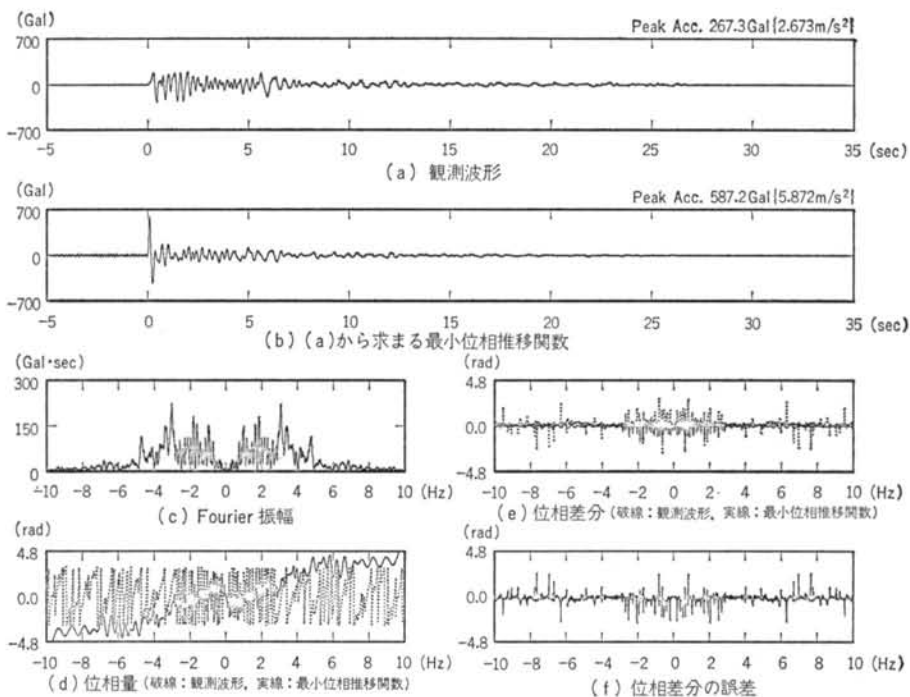
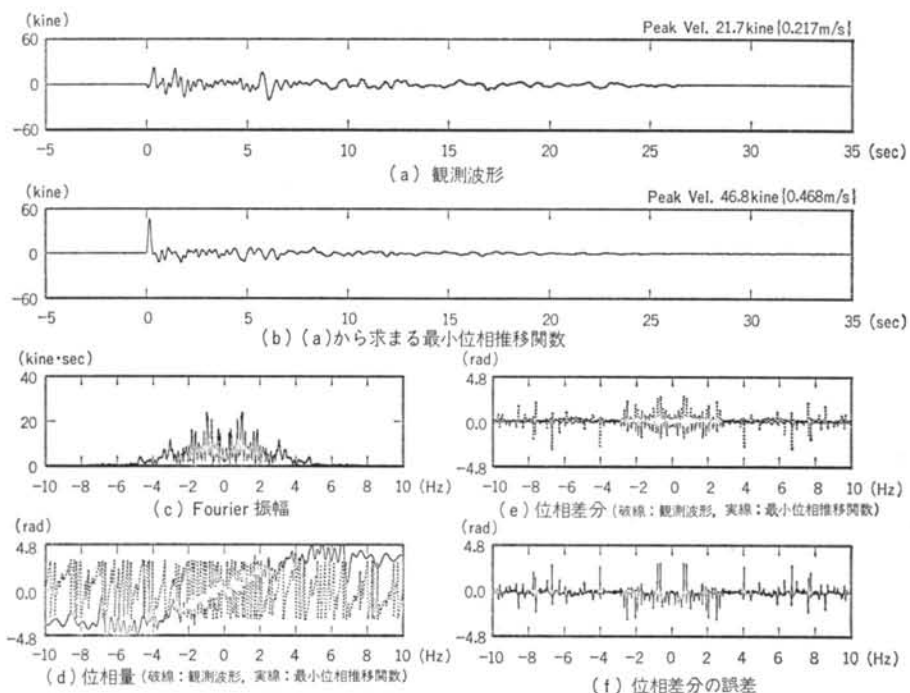


図-10 1979年 Imperial Valley 地震の余震 ( $M_L=5.2$ ) の El Centro Array No. 2 ( $140^\circ$ ) における速度波形

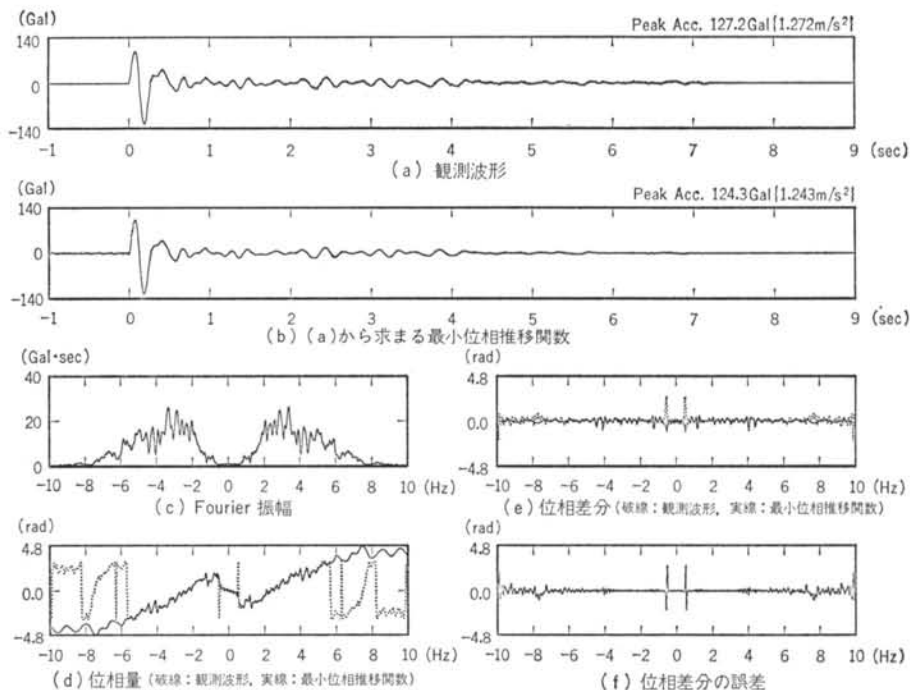


図—11 1983年 Coalinga 地震の本震 ( $M_L=6.7$ ) の Pleasant Valley Pumping Plant の Basement ( $315^\circ$ ) における加速度波形

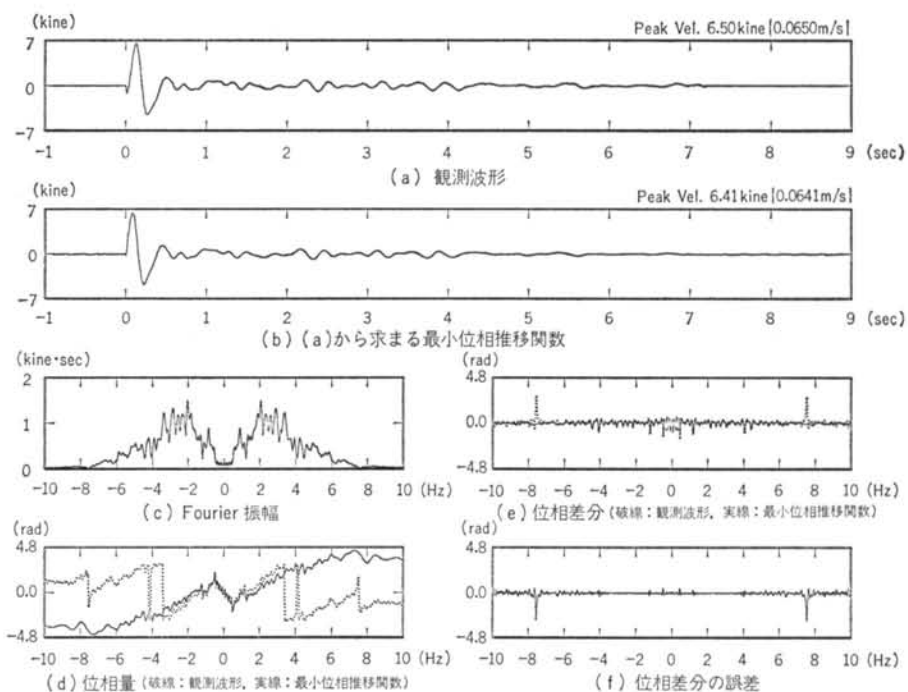


図—12 1983年 Coalinga 地震の本震 ( $M_L=6.7$ ) の Pleasant Valley Pumping Plant の Basement ( $315^\circ$ ) における速度波形





図—13 1983年 Coalinga 地震の余震 ( $M_L=5.1$ ) の Pleasant Valley Pumping Plant の Basement ( $315^\circ$ ) における加速度波形



図—14 1983年 Coalinga 地震の余震 ( $M_L=5.1$ ) の Pleasant Valley Pumping Plant の Basement ( $315^\circ$ ) における速度波形

図-7および図-8の(a)に El Centro Array No. 2 における本震 ( $M_L=6.6$ ) の加速度波形および速度波形を、(b)にそれから推定した最小位相推移関数を示す。(b)の波形の Fourier 振幅は(a)の波形の Fourier 振幅と全く等しく、Fourier 位相はその振幅に見合った値、すなわち最小位相推移関数となるように与えている。両者の Fourier 振幅は等しいにもかかわらず、相互相関係数の最大値  $\text{Max}\{R_{\rho h,t}\}$  は 0.383 (加速度波形) および 0.564 (速度波形) であり、異なった波形になっている。これは、観測波形が最小位相推移関数ではない、すなわち観測波形の片側 Laplace 変換が  $\text{Re } p \geq 0$  でゼロ点または極を有していることを意味している。図-7および図-8の(c), (d), (e)および(f)には、それぞれ振動数が  $-10.0 \text{ Hz}$  から  $10.0 \text{ Hz}$  までの領域での Fourier 振幅・位相・位相差分および位相差分の誤差を示す。位相差分の誤差は、Fourier 振幅が 0 か、0 に近い値をとる振動数の近傍で大きくなっている。

一方、図-9および図-10の(a)に El Centro Array No. 2 おける余震 ( $M_L=5.2$ ) の加速度波形および速度波形を、(b)にそれから推定した最小位相推移関数を示す。この場合、両者の相互相関係数の最大値  $\text{Max}\{R_{\rho h,t}\}$  は 0.900 (加速度波形) および 0.978 (速度波形) であり、(a)の観測波形と(b)の最小位相推移関数とはほぼ等しいものとなっている。したがって、観測波形は最小位相推移関数にかなり近いものであるということが出来る。図-9および図-10の(c), (d), (e)および(f)には、それぞれ振動数が  $-10.0 \text{ Hz}$  から  $10.0 \text{ Hz}$  までの領域での Fourier 振幅・位相・位相差分および位相差分の誤差を示す。位相差分の誤差は  $-3.5 \text{ Hz}$  から  $3.5 \text{ Hz}$  の振動数領域でほとんど 0 となっており、地震波の卓越振動数に相当する  $\pm 1 \text{ Hz}$  から  $\pm 3 \text{ Hz}$  の領域では原波形の位相差分をよく再現しているのが分かる。

図-11, 12, 13 および図-14 には、Pleasant Valley Pumping Plant の Basement における本震 ( $M_L=6.7$ ) と余震 ( $M_L=5.1$ ) の加速度波形と速度波形、およびそれから推定した最小位相推移関数、Fourier 振幅・位相・位相差分および位相差分の誤差を示す。El Centro Array No. 2 の観測波形と同じく、本震の場合推定した最小位相推移関数は観測波形と異なった波形になっているものの、余震の場合ほぼ原波形に近いものとなっ

ていることが分かる。相互相関係数の最大値  $\text{Max}\{R_{\rho h,t}\}$  は、本震の場合 0.541 (加速度波形) および 0.549 (速度波形)、余震の場合 0.983 (加速度波形) および 0.982 (速度波形) である。余震の観測波形に関しては、位相差分の誤差もわずかの振動数の点を除いて  $-10.0 \text{ Hz}$  から  $10.0 \text{ Hz}$  の領域でほとんど 0 であり、原波形の位相を非常によく再現しているといえる。

## § 7. おわりに

以上の解析結果から、1979年 Imperial Valley 地震の本震 ( $M_L=6.6$ ) および 1983年 Coalinga 地震の本震 ( $M_L=6.7$ ) のような、複雑な震源メカニズムと考えられる地震の加速度波形および速度波形は最小位相推移関数とはかなり異なり、これらの地震の余震のような  $M_L=5$  程度の比較的小規模で単純な震源メカニズムと考えられる地震に関しては、その観測波形は最小位相推移関数に近く、Fourier 振幅の情報のみか、位相を推定し原波形を再現することが可能であろうと考えられる。

また、観測波形が最小位相推移関数として取り扱えない理由として、

(i) いわゆる multiple event の地震あるいは広大な断層面をもつ地震に関しては、例題でも見たように、伝播経路が最小位相推移のシステムとして取り扱えても、震源から放出された地震波そのものが最小位相推移関数の性質を有していない可能性がある、

(ii) 短周期の地震波は伝播過程でかなり乱れて観測点に到達すると考えられ、その Laplace 変換は  $\text{Re } p \geq 0$  でゼロ点を有しやすい、  
の 2 点が考えられる。

今後、震源メカニズムを考慮した観測波形の解釈、短周期地震波の伝播過程における擾乱の評価などを行なうことにより地震波形の位相構造を把握し、より「地震動らしい」模擬地震動の作成手法を検討していきたいと考えている。

本研究は、模擬地震動研究会 (代表: 大崎順彦) の研究成果の一部を発展させたもので、ご討議頂いた岩崎良二 (東京大学)、政尾亨 (フジタ工業)、坂田光児 (東芝)、北田義夫 (日本原子力事業) の各氏に感謝します。

<参考文献>

- 1) 政尾亨・神田順・岩崎良二・坂田光児・北田義夫・大崎順彦・渡辺孝英: "Hilbert 変換を用いた地震動スペクトルの計算例" 昭和59年度日本建築学会大会学術講演梗概集, pp.647~648
- 2) 辰巳安良・佐藤忠信: "地震波の因果性についての考察" 土木学会第39回年次学術講演会講演概要集, pp.775~776
- 3) A. パボリス (大槻喬・平岡寛二訳): "工学のための応用フーリエ積分" オーム社
- 4) 大崎順彦・岩崎良二・大川出・政尾亨: "地震波の位相特性とその応用に関する研究" 第5回日本地震工学シンポジウム講演集 (1978年) pp.201~208
- 5) John G. Anderson, James N. Brune, Jorge Prince & Frank L. Vernon, III: "Preliminary Report on the Use of Digital Strong Motion Recorders in the Mexicali Valley, Baja California" Bull. of Seismol. Soc. Am., Vol. 73, No.5 (1983) pp.1451~1467
- 6) Waverly J. Pearson: "Seismological Notes—May-June 1983" Bull. of Seismol. Soc. Am. Vol. 74, No.2 (1984) pp.785~789

## 付 録: Sampling 定理

実際の地震動を  $g(t)$ , 継続時間を  $T(L\Delta t)$  とし,  $|t| > T/2$  で  $g(t) = 0$  とすると,  $g(t)$  の Fourier 交換  $G(\omega)$  は,

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega) \quad (\text{付1})$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \exp[-j\omega t] dt \quad (\text{付2})$$

$$= \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \exp[-j\omega t] dt \quad (\text{付3})$$

と表わせる。ここで,  $\omega_n = 2\pi n/T = 2\pi n/L\Delta t$  ( $n=0, \pm 1, \dots, \pm\infty$ ) での値を  $P_n$  とおくと,

$$P_n = G\left(\frac{2n\pi}{T}\right) = \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \exp[-j2n\pi t/T] dt \quad (\text{付4})$$

である。

一方,  $g(t)$  を区間  $[-T/2, T/2]$  で Fourier 級数展開すると,

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} Q_n \exp[j2n\pi t/T] \left(-\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2}\right) \quad (\text{付5})$$

$$Q_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} g(t) \exp[-j2n\pi t/T] dt \quad (\text{付6})$$

となるから, 式(付4), (付6)より

$$Q_n = \frac{P_n}{T} \quad (\text{付7})$$

を得る。

次に, 式(付6)の  $g(t)$  が周期的に繰り返したものを式(付8)の  $g^*(t)$  のようにおくと,  $g(t)$  は  $[-T/2, T/2]$  の矩形パルス  $P_{T/2}(t)$  を用いて式(付9)のように表わせる。

$$g^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{T} \exp[j2n\pi t/T] \quad (\text{付8})$$

$$g(t) = P_{T/2}(t) \cdot g^*(t) \\ = P_{T/2}(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{T} \exp[j2n\pi t/T] \quad (\text{付9})$$

この式の両辺を Fourier 変換して,

$$g(t) \leftrightarrow G(\omega)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} P_{T/2}(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{T} \exp[j2n\pi t/T] \exp[-j\omega t] dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \exp[j2n\pi t/T - j\omega t] dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [\cos(2n\pi t/T - \omega t) + j \sin(2n\pi t/T - \omega t)] dt$$

$$= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{T} \int_0^{T/2} \cos\{(2n\pi/T - \omega)t\} dt$$

$$= 2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{P_n}{T} \frac{\sin\left\{\left(\frac{2n\pi}{T} - \omega\right)\frac{T}{2}\right\}}{\frac{2n\pi}{T} - \omega}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\omega T}{2}\right)}{n\pi - \frac{\omega T}{2}} \quad (\text{付10})$$

を得る。特に,  $\omega_n = 2n\pi/T$  のところで,

$$G\left(\frac{2n\pi}{T}\right) = P_n \quad (\text{付11})$$

となっており, これは式(付4)の  $P_n$  の定義式に一致している。

一方, 式(付6)の Fourier の係数  $Q_n$  は,  $T$  を  $L\Delta t$ ,  $dt$  を  $\Delta t$ ,  $\int$  を  $\sum$  に代えて下のような近似で表せる。

$$Q_n \approx \frac{1}{L} \sum_{l=-L/2+1}^{L/2} g_l \exp[-j2\pi n l/L] \quad (\text{付12})$$

この式の右辺は,  $l \leq 0$  のとき  $g_l = 0$  とすると本文の式(10)の  $G_n$  と同じである。したがって,  $g_l$  から推定できる  $G(\omega)$  は,  $g_l$  の Fourier の係数  $G_n$  および式(付7)と式(付10)を組み合わせて下のように表わせる。

$$G(\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} T Q_n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\omega T}{2}\right)}{n\pi - \frac{\omega T}{2}} \\ \approx L\Delta t \sum_{n=-L/2+1}^{L/2} G_n \frac{\sin\left(n\pi - \frac{\omega T}{2}\right)}{n\pi - \frac{\omega T}{2}} \quad (\text{付13})$$

一般には式(付10)を Sampling 定理と呼んでいるが, 本文では離散型データ  $g_l$  ( $l = -L/2+1, \dots, L/2$ ) から求まる Fourier の係数  $G_n$  から  $G(\omega)$  を推定する式(付13)を Sampling 定理と呼んでいる。