

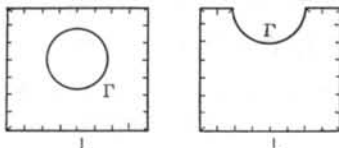
# 境界要素法の基本解に関する研究

—二次元等方および異方弾性問題について—

黄 弘 量\*  
(大崎研究室)

## § 1. はじめに

境界要素法では、一般に無限領域において定義された基本解(グリーン関数)が使われている。しかしながら、ある境界あるいは境界の一部の境界条件を満たす基本解を用いた場合には、この境界条件を満たした境界の近傍では精度の良い解が得られる。例えば、図-1の問題は円孔を有する領域の基本解を、図-2の問題はクラックを有する基本解を用いれば、それぞれの境界 $\Gamma$ の近傍では精度の良い解が得られる。一般に、図-3に示す問題については、孔の境界 $\Gamma$ でより良い精度の解を得るために、孔の境界条件を満たす基本解、すなわち孔の影響を考慮した基本解を用いればよい。その理由は、このような基本解は孔の境界条件を満たす境界には要素を配置する必要がなくなり、要素の近傍での解が乱れるような現象がなくなる。したがって、孔の近傍も、精度の良い解が得られる<sup>3)4)</sup>。このことは、特に開口問題の隅角の近傍の応力集中や、クラックの先端の近傍の挙動の解析にとって重要なことである。例えば、円孔やクラックを有する基本解や半無限領域の基本解を用いた境界要素法の研究があり、精度の良い結果が得られている<sup>3)4)</sup>。しかし、一般



Γ:要素を配置しない境界  
L:要素を配置する境界

図-1

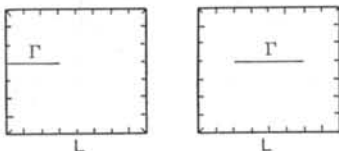


図-2

的に任意形の孔を有する場合について、特に異方弾性体についての研究はまだ見られないようである。したがって、このような基本解については系統的に研究する必要がある。

本研究は、二次元等方および異方弾性体の平面ひずみ問題についての、半無限領域および任意形の孔を有する場合について統一的な誘導方法を示す。また、得られた基本解は複素応力関数で表わされるので、複素関数より境界要素法の定式化を行なった。

## § 2. 二次元弾性体の基本公式

### 2.1 異方弾性体<sup>5)</sup>

二次元弾性体のひずみ-応力関係式は、

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_{11} &= a_{11}\sigma_{11} + a_{12}\sigma_{22} \\ \epsilon_{22} &= a_{21}\sigma_{11} + a_{22}\sigma_{22} \\ \epsilon_{12} &= \frac{1}{2}a_{66}\sigma_{12} \end{aligned} \right\} \dots\dots(1)$$

また、 $A_{krj}$  の応力関数は、

$$\sigma_{11} = \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \quad \sigma_{22} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad \sigma_{12} = -\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \dots\dots(2)$$

そして、支配方程式は、

$$a_{22} \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + (2a_{12} + a_{66}) \frac{\partial^2 U}{\partial x^2 \partial y^2} + a_{11} \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = 0 \dots\dots(3)$$

方程式(3)の解は、次のように表わされる。

$$U = 2\text{Re}(F_1(z_1) + F_2(z_2)) \dots\dots(4)$$

ここで、 $z_k = x + s_k y$ ,  $F_k(z_k)$  ( $k=1, 2$ ) は正則関数である。また、 $s_k = \alpha_k + i\beta_k$  は複素定数で、方程式

$$a_{11}s^4 + (2a_{12} + a_{66})s^2 + a_{22} = 0$$

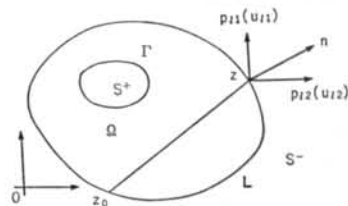


図-3

\* 大崎研究室客員研究員、中国同济大学副教授

から得られる。多くの材料にとって、弾性定数 ( $a_{11}, a_{12}, a_{26}, a_{66}$ ) の関係式

$$(2a_{12} + a_{66})^2 > 4a_{11}a_{22}, \quad 2a_{12} > a_{66}$$

を満すことになっている。このことによって、

$$\alpha_k = 0, \quad \beta_1 > \beta_2 > 0$$

とおくことができる。すなわち、

$$s_k = i\beta_k \quad \dots\dots(5)$$

と表わすことができる。

## 2.2 等方弾性体<sup>2)6)</sup>

等方弾性体の支配方程式およびその解は、

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2 U = 0 \quad \dots\dots(6)$$

および

$$U = \text{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] \quad \dots\dots(7)$$

である。ここで、 $\varphi(z), \chi(z)$  は正則関数である。

## § 3. 複素関数で表わされた境界積分方程式

複素数  $z_0$  および  $z$  はソース点およびコントロール点を表わす (図-3 参照)。直接法による境界積分方程式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} c_{1k}(z_0)u_k(z_0) + \int_L p_{1k}(z_0, z)u_k(z) |dz| \\ = \int_L u_{1k}(z_0, z)p_k(z) |dz| \\ + \int_D u_{1k}(z_0, z)b_k(z') d\Omega(z') \quad \dots\dots(8) \end{aligned}$$

ここで、 $c_{1k}(z_0) = -\int_L p_{1k}(z_0, z) |dz|$

$$(z_0, z \text{ on } L, z' \text{ on } \Omega)$$

$$z_0 = x_0 + iy_0, \quad z = x + iy, \quad z' = x' + iy'$$

$u_{1k}, p_{1k}$  は変位および表面力の基本解で、 $b_k$  は体積力である。

## § 4. 等方弾性体の場合

### 4.1 基本解の複素関数表現

境界積分方程式(8)の表面力および変位基本解は、次のように複素応力関数  $\varphi_l(z), \psi_l(z)$  で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} p_{11} &= \sigma_{111}n_1 + \sigma_{112}n_2 \\ p_{12} &= \sigma_{121}n_1 + \sigma_{122}n_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(9)$$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{111} &= \text{Re}[2\varphi_l'(z) - \bar{z}\varphi_l''(z) - \psi_l'(z)] \\ \sigma_{122} &= \text{Re}[2\varphi_l'(z) + \bar{z}\varphi_l''(z) + \psi_l'(z)] \\ \sigma_{112} &= \sigma_{121} = \text{Im}[\bar{z}\varphi_l''(z) + \psi_l'(z)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(10)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= \frac{1}{2G} \text{Re}[\chi\varphi_l(z) - \bar{z}\varphi_l'(z) - \psi_l(z)] \\ u_{12} &= \frac{-1}{2G} \text{Im}[\chi\varphi_l(z) - \bar{z}\varphi_l'(z) - \psi_l(z)] \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(11)$$

ここで、 $\chi = 3 - 4\nu$ ,  $n$  は表面の外向き法線の方向余弦である。また、 $(\quad)' = d(\quad)/dz$  である。

### 4.2 無限領域の基本解

無限領域において、ある一点  $z_0$  の  $l$  方向に単位集中力を作用させた場合、 $z$  点の表面力  $p_{1k}(z_0, z)$  および変位  $u_{1k}(z_0, z)$  を表面力および変位の基本解 (グリーン関数) という。これは Kelvin 解で与えられ、複素応力関数で次式のように表わされる<sup>4)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{pl}(z) &= A_1 \ln(z - z_0) \\ \psi_{pl}(z) &= B_1 \ln(z - z_0) - \bar{A}_1 \bar{z}_0 / (z - \bar{z}_0) + \bar{A}_1 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots(12)$$

ここで、 $A_1 = -1/8 \pi(1 - \nu)$ ,  $A_2 = iA_1$ ,

$$B_1 = (3 - 4\nu)/8 \pi(1 - \nu), \quad B_2 = -iB_1$$

### 4.3 任意形の孔を有する基本解

4.2は無限領域で基本解が定義されたが、ある領域で定義することも考えられる。一般に、図-4に示す任意形の孔  $D^+$  の外部領域  $D^-$  で定義された基本解  $p_{1k}(z_0, z)$ ,  $u_{1k}(z_0, z)$  を表面力境界条件:

$$p_{1k}(z_0, z) = \tilde{p}_{1k}(z) \quad (z \text{ on } \Gamma) \quad \dots\dots(13)$$

あるいは、変位境界条件:

$$u_{1k}(z_0, z) = \tilde{u}_{1k}(z) \quad (z \text{ on } \Gamma) \quad \dots\dots(14)$$

を満すようにすることを考える。ここで、 $\tilde{p}_{1k}(z), \tilde{u}_{1k}(z)$  は境界  $\Gamma$  上で規定された値である。境界値問題(13)および(14)は、4.1の関係式によって正則関数の境界値問題に帰着される。まず、表面力境界値問題(13)を考えると、次の境界値問題に帰着される。

$$\begin{aligned} \varphi_l(z) + z\overline{\varphi_l'(z)} + \overline{\psi_l(z)} \\ = \int_{s_0}^z (\tilde{p}_{11} + i\tilde{p}_{12}) ds \quad (z \text{ on } \Gamma) \quad \dots\dots(15) \end{aligned}$$

境界値問題(15)の解  $\varphi_l(z), \psi_l(z)$  は、式(12)の無限領域の基本解  $\varphi_{pl}(z), \psi_{pl}(z)$  に未知の影響関数  $\varphi_{al}(z), \psi_{al}(z)$

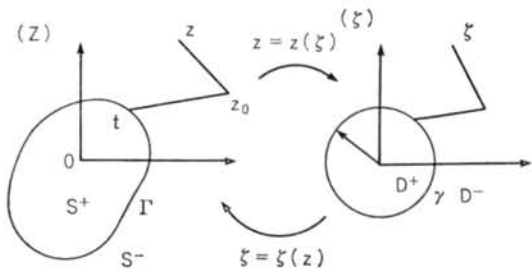


図-4

を重ね合せによるものとする。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_l(z) &= \varphi_{pl}(z) + \varphi_{al}(z) \\ \psi_l(z) &= \psi_{pl}(z) + \psi_{al}(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots(16)$$

である。式(16)を境界条件(15)に適用すれば

$$\begin{aligned} \varphi_{al}(z) + z\overline{\varphi'_{al}(z)} + \overline{\psi_{al}(z)} \\ = f_l(z) - f_{pl}(z) \quad (z \text{ on } \Gamma) \end{aligned} \dots\dots(17)$$

になる。ここで、

$$f_l(z) = \int_{z_0}^z (\tilde{p}_{11} + i\tilde{p}_{12}) ds \dots\dots(18)$$

$$f_{pl}(z) = \varphi_{pl}(z) + z\overline{\varphi'_{pl}(z)} + \overline{\psi_{pl}(z)} \dots\dots(19)$$

図-4に示す $z$ 平面的孔の外部領域 $S^+$ から単位円の外部領域 $D^+$ への写像関数は、

$$z = A\zeta + \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \zeta^{-k} \dots\dots(20)$$

である。ここで $A, \alpha_k$ は複素定数である。

写像関数(20)を式(17)に代入し、両辺に

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\sigma - \zeta}$$

を掛けて、境界 $\gamma$ に沿って積分すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i\pi} \int_{\gamma} \frac{\Phi_{al}(\sigma) + G(\sigma)\overline{\Phi'_{al}(\sigma)} + \overline{\Psi_{al}(\sigma)} d\sigma}{\sigma - \zeta} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{F_l(\sigma) - F_{pl}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \end{aligned} \dots\dots(21)$$

および、共役関数：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{\Phi_{al}(\sigma)} + \overline{G(\sigma)}\Phi'_{al}(\sigma) + \Psi_{al}(\sigma)}{\sigma - \zeta} d\sigma \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{\overline{F_l(\sigma)} - \overline{F_{pl}(\sigma)}}{\sigma - \zeta} d\sigma \end{aligned} \dots\dots(22)$$

が得られる。ここで、

$$\begin{aligned} \Phi_{al}(\zeta) &= \varphi_{al}(z(\zeta)), \quad \Psi_{al}(\zeta) = \psi_{al}(z(\zeta)) \\ F_l(\zeta) &= f_l(z(\zeta)), \quad F_{pl}(\zeta) = f_{pl}(z(\zeta)) \\ G(\zeta) &= \frac{z(\zeta)}{\zeta^2 \left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \quad (\gamma) = \frac{d(\quad)}{d\zeta} \end{aligned}$$

$\Phi_{al}(\zeta), \Psi_{al}(\zeta)$ は領域 $S^+$ において極を持つ正則関数の主要部とすれば、鏡像原理により $\overline{\Phi_{al}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \overline{\Psi_{al}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \overline{\Phi'_{al}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}, \overline{\Psi'_{al}\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$ は $S^-$ において極を持つ正則関数である。したがって、コーシ積分定理により、

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi_{al}(\zeta) &= F_l^+(\zeta) - F_{pl}^+(\zeta) \\ \Psi_{al}(\zeta) &= \overline{F_l^-\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - \overline{F_{pl}^-\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - \left(\overline{G\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - G_0\right)\overline{\Phi'_{al}(\zeta)} \end{aligned} \right. \dots\dots(23)$$

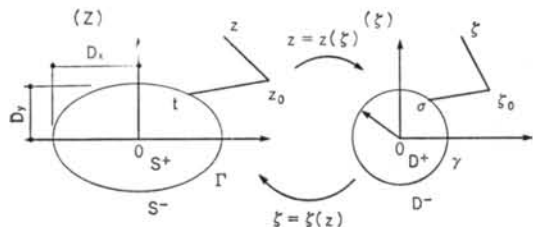


図-5

が得られる。ここで、 $F_l^+(\zeta), F_{pl}^+(\zeta)$  および  $F_l^-(\zeta), F_{pl}^-(\zeta)$  は正則関数  $F_l(\zeta), F_{pl}(\zeta)$  の領域  $S^+$  および  $S^-$  において極の主要部で、 $G_0$  は  $\overline{G\left(\frac{1}{\zeta}\right)}$  の  $\zeta = 0$  点において極の主要部である。

変位境界問題(14)からも、上述と同じ手順で次の解が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{al}(\zeta) &= \frac{1}{\chi} [E_l^+(\zeta) - E_{pl}^+(\zeta)] \\ \Psi_{al}(\zeta) &= -\overline{E_l^-\left(\frac{1}{\zeta}\right)} + \overline{E_{pl}^-\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \\ &\quad - \left(\overline{G\left(\frac{1}{\zeta}\right)} - G_0\right)\overline{\Phi'_{al}(\zeta)} \end{aligned} \right\} \dots\dots(24)$$

$$E_l(\zeta) = \tilde{u}_{11} + i\tilde{u}_{12}$$

$$E_{pl}(\zeta) = \chi\Phi_{pl}(\zeta) - G(\zeta)\overline{\Phi'_{pl}(\zeta)} - \overline{\Psi_{pl}(\zeta)}$$

ここで、 $E_l^+(\zeta), E_{pl}^+(\zeta)$  および  $E_l^-(\zeta), E_{pl}^-(\zeta)$  は正則関数  $E_l(\zeta), E_{pl}(\zeta)$  の領域  $S^+$  および  $S^-$  において極の主要部である。

したがって、写像関数(20)と境界条件(13)、あるいは境界条件(14)のみ与えられれば、式(23)あるいは式(24)より様々な形の孔を有する基本解が得られる。

#### 4.4 楕円孔(クラック)を有する場合

図-5に示す楕円孔(クラック)を有する場合については、4.3の一般解の式(23)あるいは式(24)より得られる。

例えば、境界条件は自由境界条件：

$$F_l(\zeta) = f_l(z(\zeta)) = 0 \quad (\zeta \text{ on } \gamma) \dots\dots(25)$$

の場合を考える。図-5に示す楕円孔(クラック)の外部領域から単位円の外部領域への写像関数は、

$$z = \frac{D}{2} \left( \zeta + \frac{e}{\zeta} \right) \dots\dots(26)$$

$$D = D_x + D_y, \quad e = (D_x - D_y)/D$$

である。式(25)、(26)を式(23)に代入すれば

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{al} &= -A_l \ln(\zeta - \zeta_0) - \overline{B_l} \ln(\zeta - \zeta_0) \\ &\quad + (A_l + \overline{B_l}) \ln \zeta - \overline{A_l} \alpha / (\zeta - \zeta_0) \\ \psi_{al} &= -\overline{A_l} \ln(\zeta - \zeta_0) - \overline{B_l} \ln(\zeta - \zeta_0) \\ &\quad + (\overline{A_l} + B_l) \ln \zeta - \overline{A_l} \beta \zeta_0 / (\zeta - \zeta_0) - \overline{G\left(\frac{1}{\zeta}\right)} \overline{\varphi'_{al}(\zeta)} \end{aligned} \right\} (27)$$

が得られる。

ここで、 $\alpha = (\zeta_0^2 - 2z_0\zeta_0/D + e)/e(\zeta_0 - \zeta_b)$

$$\beta = (\zeta_0^2 - 2z_0\zeta_0/D + e)/e(\zeta_0 - \zeta_b)$$

$$\zeta_a = 1/\zeta_0, \quad \zeta_b = \zeta_0/e, \quad \zeta_c = e/\zeta_0$$

また、逆写像関数：

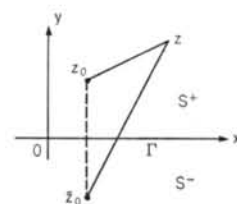


図-6

$$\zeta = \frac{1}{D}(z + \sqrt{z^2 - D^2 e}) \quad \dots\dots 29$$

を式27に代入すれば、 $z$ の関数で表わす基本解が得られる。式29, 30, 31に  $Dy=0$  をおけば、クラックを有する基本解になる。

#### 4.5 半無限領域の場合 (図-6)

半無限領域の基本解を用いた研究はいくつかある<sup>47)</sup>。これらの基本解は本誘導方法により、次の方程式に帰着される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\varphi_{ai}(t) + t\bar{\varphi}'_{ai}(t) + \bar{\varphi}_{ai}(t)}{t-z} dt \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f_i(t) - f_{pi}(t)}{t-z} dt \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{\varphi}_{ai}(t) + t\bar{\varphi}'_{ai}(t) + \varphi_{ai}(t)}{t-z} dt \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}_i(t) - \bar{f}_{pi}(t)}{t-z} dt \end{aligned} \right\} \dots\dots 29$$

鏡像原理およびコーシ積分定理により、式29から

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ai}(z) = f_i^-(z) - z\bar{\varphi}'_{pi}(z) - \bar{\varphi}_{pi}(z) \\ \varphi_{ai}(z) = \bar{f}_i^+(z) - \bar{\varphi}_{pi}(z) - z\bar{\varphi}'_{ai}(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots 30$$

が得られる。自由応力境界条件の場合は  $f_i(z)=0$  となる。すなわち、 $f_i^-(z) = \bar{f}_i^+(z) = 0$  である。式12を式30に代入すれば、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{ai}(z) = -\bar{B}_1 \ln(z - \bar{z}_0) + \bar{A}_1(z_0 - \bar{z}_0)/(z - \bar{z}_0) \\ \varphi_{ai}(z) = -\bar{A}_1 \ln(z - \bar{z}_0) + \bar{B}_1 \bar{z}_0/(z - \bar{z}_0) \\ + \bar{A}_1 z(z_0 - \bar{z}_0)/(z - \bar{z}_0)^2 + C_1 \end{aligned} \right\} 31$$

が得られる。ここで、

$$C_1 = -B_1 + i(1-2\nu)/2, \quad C_2 = -B_2 + (1-2\nu)/2$$

### § 5. 異方弾性体の場合

§ 4. の等方弾性体についての基本解の誘導方法を、異方弾性体へ拡張することができる。

#### 5.1 基本解の複素関数表現

異方弾性体の複素応力関数を、

$$\varphi_1(z_1) = \frac{dF_{11}(z_1)}{dz_1}, \quad \psi_1(z_2) = \frac{dF_{12}(z_2)}{dz_2}, \quad z_k = x + s_k y \quad 32$$

とおくと、式(1), (2), (4), 32から応力基本解  $\sigma_{11j}$  および変位基本解  $u_{1k}$  は次のように得られる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{111} &= 2 \operatorname{Re}[s_1^2 \varphi_1'(z_1) + s_2^2 \psi_1'(z_2)] \\ \sigma_{122} &= 2 \operatorname{Re}[\varphi_1'(z_1) + \psi_1'(z_2)] \\ \sigma_{112} = \sigma_{121} &= -2 \operatorname{Re}[s_1 \varphi_1'(z_1) + s_2 \psi_1'(z_2)] \end{aligned} \right\} \dots\dots 33$$

および、

$$\left. \begin{aligned} u_{11} &= 2 \operatorname{Re}[p_1 \varphi_1(z_1) + p_2 \psi_1(z_2)] \\ u_{12} &= 2 \operatorname{Re}[q_1 \varphi_1(z_1) + q_2 \psi_1(z_2)] \end{aligned} \right\} \dots\dots 34$$

である。

$$\text{ここで, } (\ )' = \frac{d(\ )}{dz_k}$$

$$p_k = a_{11}s_k^2 + a_{12}, \quad q_k = (a_{12}s_k^2 + a_{22})/s_k$$

#### 5.2 無限領域の基本解

無限領域の基本解  $u_{1k}(z_0, z)$ ,  $p_{1k}(z_0, z)$  に対して、複素応力関数は、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{pi}(z_1) &= A_1 \ln(z_1 - z_{10}) \\ \varphi_{pi}(z_2) &= B_1 \ln(z_2 - z_{20}) \end{aligned} \right\} \dots\dots 35$$

である。ここで、

$$z_k = x + s_k y, \quad z_{k0} = x_0 + s_k y_0$$

$$A_1 = -iq_2/4 \pi D_a, \quad B_1 = iq_1/4 \pi D_a$$

$$A_2 = -ip_2/4 \pi D_b, \quad B_2 = ip_1/4 \pi D_b$$

$$D_a = \alpha_{22}(\beta_2/\beta_1 - \beta_1/\beta_2), \quad D_b = -D_a/\beta_1\beta_2$$

式35を式33, 34に代入すると表面力、変位の基本解  $p_{1k}$  および  $u_{1k}$  が得られる。文献8)と同じ結果である。

#### 5.3 任意形の孔を有する場合

4.2の問題は、異方弾性体の場合には次の境界値問題に帰着される。

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\varphi_{ai}(z_1) + \varphi_{ai}(z_2)] &= g_{11}(z) - f_{11}(z) \\ 2 \operatorname{Re}[s_1 \varphi_{ai}(z_1) + s_2 \varphi_{ai}(z_2)] &= g_{21}(z) - f_{21}(z) \end{aligned} \right\} 36$$

( $z_1, z_2, z$  on  $\Gamma$ )

$$\text{ここで, } g_{11} = -\int_{s_0}^z \bar{p}_{12} ds, \quad g_{21} = \int_0^z \bar{p}_{11} ds$$

$$f_{11} = 2 \operatorname{Re}[\varphi_{pi}(z_1) + \varphi_{pi}(z_2)]$$

$$f_{21} = 2 \operatorname{Re}[s_1 \varphi_{pi}(z_1) + s_2 \varphi_{pi}(z_2)]$$

図-7に示す、 $z$ 平面の孔の外部領域  $D^-$  から  $\zeta$ 平面の単位円の内部領域  $S^+$  への写像関数を  $z = z(\zeta)$  とすれば、 $z_k$ 平面の外部領域から  $\zeta$ 平面の単位円の内部領域への写像関数は、

$$z_k = \frac{1}{2} \left[ (1 - is_k) z(\zeta) + (1 + is_k) \bar{z} \left( \frac{1}{\zeta} \right) \right] \quad \dots\dots 37$$

になる。式37を式36に代入すれば、

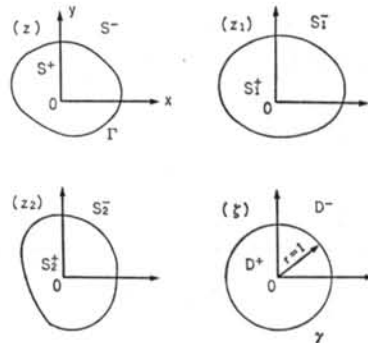


図-7

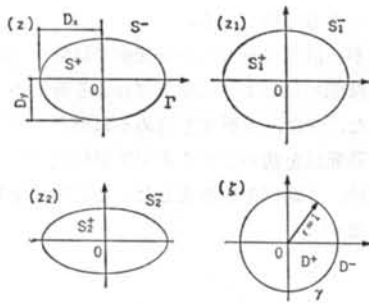


図-8

$$\left. \begin{aligned} 2 \operatorname{Re}[\Phi_{al}(\zeta) + \Psi_{al}(\zeta)] &= F_{11} + G_{11} \\ &(\zeta \text{ on } \gamma) \\ 2 \operatorname{Re}[s_1 \Phi_{al}(\zeta) + s_2 \Psi_{al}(\zeta)] &= F_{21} + G_{21} \end{aligned} \right\} \dots\dots(38)$$

ここで,  $F_{11} = -2 \operatorname{Re}[\phi_{pl}(\zeta) + \psi_{pl}(\zeta)]$

$$F_{21} = -2 \operatorname{Re}[s_1 \phi_{pl}(\zeta) + s_2 \psi_{pl}(\zeta)]$$

$$\phi_{pl}(\zeta) = \varphi_{pl}(z_1(\zeta)), \quad \psi_{pl}(\zeta) = \phi_{pl}(z_2(\zeta))$$

$$\Phi_{al}(\zeta) = \varphi_{al}(z_1(\zeta)), \quad \Psi_{al}(\zeta) = \phi_{al}(z_2(\zeta))$$

$$G_{11}(\zeta) = \theta_{11}(z(\zeta)), \quad G_{21}(\zeta) = \theta_{21}(z(\zeta))$$

シュワルツの公式を式(38)に用いれば,

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{al}(\zeta) + \Psi_{al}(\zeta) \\ = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} [F_{11}(\sigma) + G_{11}(\sigma)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \frac{d\sigma}{\sigma} \\ s_1 \Phi_{al}(\zeta) + s_2 \Psi_{al}(\zeta) \\ = \frac{1}{4\pi i} \int_{\gamma} [F_{21}(\sigma) + G_{21}(\sigma)] \frac{\sigma + \zeta}{\sigma - \zeta} \frac{d\sigma}{\sigma} \end{aligned} \right\} \dots\dots(39)$$

が得られる。式(39)の積分を行なえば

$$\left. \begin{aligned} \Phi_{al}(\zeta) &= [s_2(F_{11}(\zeta) + G_{11}(\zeta)) \\ &\quad - (F_{21}(\zeta) + G_{21}(\zeta))]/(s_2 - s_1) + c_1 \\ \Psi_{al}(\zeta) &= [s_1(F_{11}(\zeta) + G_{11}(\zeta)) \\ &\quad - (F_{21}(\zeta) + G_{21}(\zeta))]/(s_1 - s_2) + c_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots(40)$$

が得られる。ここで,

$$F_{11}(\zeta) = -\left[ \Phi_{pl}(\zeta) + \bar{\Phi}_{pl}^+\left(\frac{1}{\zeta}\right) + \Psi_{pl}(\zeta) + \bar{\Psi}_{pl}^+\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right]$$

$$F_{21}(\zeta) = -\left[ s_1 \Phi_{pl}(\zeta) - s_1 \bar{\Phi}_{pl}^+\left(\frac{1}{\zeta}\right) + s_2 \Psi_{pl}(\zeta) - s_2 \bar{\Psi}_{pl}^+\left(\frac{1}{\zeta}\right) \right]$$

である。 $\Phi_{pl}(\zeta)$ ,  $\Psi_{pl}(\zeta)$  および  $\bar{\Phi}_{pl}^+(\zeta)$ ,  $\bar{\Psi}_{pl}^+(\zeta)$  は正則関数  $\Phi_{pl}(\zeta)$ ,  $\Psi_{pl}(\zeta)$  の領域  $S^-$  および  $S^+$  における極の主要部で,  $G_{k1}(\zeta)$  は正則関数  $G_{kl}(\zeta)$  の領域  $S^-$  における極の主要部である。

### 5.4 楕円孔を有する場合 (図-8)

境界は自由境界条件とする。すなわち, 一般解(40)に

$$G_{1k} = 0$$

$$z = \frac{D}{2} \left( \frac{1}{\zeta} + e\zeta \right)$$

$$z_k = \frac{D_k}{2} \left( \frac{1}{\zeta} + e_k \zeta \right)$$

$$D = D_x + D_y \quad e = \frac{D_x - D_y}{D}$$

$$D_k = D_x - i s_k D_y \quad e_k = \frac{D_x + i s_k D_y}{D_k}$$

および,

$$\Phi_{pl}(\zeta) = A_1 \ln \left[ \frac{D_1 e_1}{2} \left( \zeta - \frac{1}{e_1 \zeta_{10}} \right) \right]$$

$$\Psi_{pl}(\zeta) = B_1 \ln \left[ \frac{D_2 e_2}{2} \left( \zeta - \frac{1}{e_2 \zeta_{20}} \right) \right]$$

$$\bar{\Phi}_{pl}^+\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \bar{A}_1 \ln[1 - \zeta \bar{\zeta}_{10}]$$

$$\bar{\Psi}_{pl}^+\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \bar{B}_1 \ln[1 - \zeta \bar{\zeta}_{20}]$$

を用いれば式(40)は楕円孔を有する基本解になる。また, 逆写像関数を式(40)に代入すれば,  $z$  の関数で表わす基本解となる。

### 5.5 半無限領域の場合 (図-6)

半無限領域の表面力境界条件は自由境界条件とする。

5.4と同じ手順で次の積分方程式に帰着される。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2 \operatorname{Re}[\varphi_{al}(t) + \phi_{al}(t)] dt}{t - z} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_{11}(t) dt}{t - z} \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{2 \operatorname{Re}[s_1 \varphi_{al}(t) + s_2 \phi_{al}(t)] dt}{t - z} \\ = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f_{21}(t) dt}{t - z} \end{aligned} \right\} \dots\dots(41)$$

$$\begin{aligned} f_{11}(t) &= -2 \operatorname{Re}[\varphi_{pl}(t) + \phi_{pl}(t)] \\ f_{21}(t) &= -2 \operatorname{Re}[s_1 \varphi_{pl}(t) + s_2 \phi_{pl}(t)] \end{aligned}$$

鏡像原理および半無限領域に関するコーシ積分の定理を式(41)に用いれば,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{al}(z) + \phi_{al}(z) &= -\bar{\varphi}_{pl}(z) - \bar{\phi}_{pl}(z) \\ s_1 \varphi_{al}(z) + s_2 \phi_{al}(z) &= -s_1 \bar{\varphi}_{pl}(z) - s_2 \bar{\phi}_{pl}(z) \end{aligned} \right\} \dots\dots(42)$$

が得られる。したがって,

$$\left. \begin{aligned} \varphi_{al}(z_1) &= [(s_1 + s_2) \bar{\varphi}_{pl}(z_1) + 2s_2 \bar{\phi}_{pl}(z_1)] / (s_1 - s_2) \\ \phi_{al}(z_2) &= -[2s_1 \bar{\varphi}_{pl}(z_2) + (s_1 + s_2) \bar{\phi}_{pl}(z_2)] / (s_1 - s_2) \end{aligned} \right\} \dots\dots(43)$$

ここで,

$$\left\{ \begin{aligned} \bar{\varphi}_{pl}(z_k) &= \bar{A}_1 \ln(z_k - \bar{z}_{10}) \\ \bar{\phi}_{pl}(z_k) &= \bar{B}_1 \ln(z_k - \bar{z}_{20}) \end{aligned} \right.$$

## § 6. おわりに

以上, 複素関数論を用いて二次元弾性平面問題の基本解の誘導を示し, 複素応力関数で表わす基本解を用いた境界要素法の定式化を行なった。本方法は次の特徴を持つ。

(1)基本解の誘導方法を統一化した。すなわち, 今まで各種の基本解が互いに無関係な方法で導かれた。本研究によって, 統一的な境界値問題に帰着した。したがっ

て、様々な境界および様々な境界条件を満たす基本解は簡単に得られるようになった。

(2)本誘導方法は、空腔を有する三次元弾性体の基本解に関する研究へ拡張することができる。つまり、積分変換により、二次元問題の複素応力関数で三次元境界値問題は二次元境界値問題に帰着される。

(3)さらに、平板の曲げ、熱弾性、流れ問題などへ拡張

することもできると思われる。

謝辞 筆者が、清水建設大崎研究室で研究するに当たり、大崎順彦副社長および山原浩室長より特別のご配慮を頂きました。また、本研究を進めるに当たっては、伊藤哲次主任研究員を初めとする応用工学研究グループの方々のご援助、ご助言を頂きました。ここに、深甚なる謝意を表します。

#### <参考文献>

- 1) C.A. Brebbia: "Progress in Boundary Element Methods, Vol.1 & 2" Pentech Press (1981, 1983)
- 2) N.I. Muskhelishvili: "Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity (Tr. by J.R.M. Radok)" Noordhoff (1953)
- 3) S. Mukherjee: "Boundary Element Methods in Creep and Fracture" Applied Science (1982)
- 4) 黄 弘量: "複変関数的境界元方法 (第一報), (第二報)" 第一屆工程中的境界元方法會議文集, 中国重慶 (1985)
- 5) 黄 弘量: "複素関数論による境界要素法の基本解に関する研究—任意形の孔を有する場合について—" 日本建築学会大会学術講演梗概集 (1986年)
- 6) G.N. Savin: "Stress Concentration Around Holes" Pergamon Press (1961)
- 7) J.C.F. Telles & C.A. Brebbia: "Boundary Element Solution for Half-plane Problems" Int. J. Solid Structures, Vol.17, No.12 (1981) pp.1149~1158
- 8) F.J. Rizzo & D.J. Shippy: "A Method for Stress Determination in Plane Anisotropic Bodies" J. Composite Materials, Vol.4 (1970) pp.36~61
- 9) 黄 弘量: "二次元異方弾性体に対する境界要素法の基本解に関する研究 (半無限領域, 任意形及び楕円形 (クラック) の孔を有する場合について)" 第36回応用力学連合講演会講演予稿集 (昭和61年)