

基礎—地盤系の相互作用解析における簡易的解析手法に関する研究

福 和 伸 夫
(大崎研究室)中 井 正 一
(大崎研究室)

§ 1. はじめに

構造物の地震時応答は構造物と地盤との力のやり取りに支配され、構造物が地盤から受ける力の大きさ、固有振動特性、減衰特性などは、地盤と構造物の相互作用効果を無視しては決定できない。しかし、我が国の一般構造物の耐震設計では、地震時の地盤増幅特性を除いては相互作用効果は考慮されていない。これは、設計法が静的解析に立脚していること、簡易な相互作用評価法が欠如していることなどが原因していると考えられる。一方、原子力構造物などの重要構造物では相互作用効果を考慮した動的設計が行なわれており、相互作用に関する研究も精力的にされている。しかし、研究の動向はより高精度な相互作用解析手法の確立に向けられ、一般構造物の耐震設計に適用する方向には必ずしも結び付いていない。相互作用問題の本質を究明することの重要性も高いが、本論では実際の設計に結び付けるという観点で、直接基礎および杭基礎の簡易な相互作用解析法を示す。

直接基礎に関しては、Reissnerの研究¹⁾を嚆矢として、半無限地盤上基礎の加振問題を中心に研究されてきた²⁾³⁾。その後、境界要素法の適用などにより、地盤の成層性、基礎形状の任意性、埋込みなどを考慮した解析が入射波問題を含めて検討されている^{4)~6)}。これらの多くは弾性波動論に基づいており、数学的な取り扱いが煩雑である。一方、いくつかの簡易的な解析手法も提案されている。田治見⁷⁾は変位関数を指数関数で近似して、地表面基礎のインピーダンスを求める方法を示した。また、Lysmer⁷⁾は半無限地盤上の円形基礎の上下インピーダンスを、静的ばね定数と粘性減衰係数で近似的に表わした。その後、Hall⁸⁾が水平および回転インピーダンスについて同様の近似式を導いた。同時期に、山原⁹⁾は波動リアクタンスと称する粘性減衰係数とばね定数を用いた近似式を示している。また、Meekら¹⁰⁾は基礎にダッシュポットを介して取付けた質点を導入し、より適合度のよい近似解を示した。この考え方はWolfら¹¹⁾によ

って一般化され、埋込み基礎にも適用されている。これらの多くは既往の解析解に適合するように定められているので、半経験的な側面を持っており、対象とする基礎が限定されている。また、インピーダンスに対する近似式しか得られておらず、他の重要な相互作用因子である基礎入力動に関する近似解法は認められない。

一方、擬似三次元効果の検討¹²⁾¹³⁾から、速度比例型減衰が半無限地盤かつ単独基礎の場合に有効であることが示された。そこで、速度比例型減衰を一次元土柱に適用した擬似三次元土柱を考え、埋込み基礎周囲に擬似三次元土柱を配することにより、簡易にインピーダンスを求める方法を提案する。また、サブストラクチャー法を適用して基礎入力動を算定する方法についても提示する。本解析法は、経験的な洞察を必要としないこと、基礎入力動を含めて計算できることに特徴がある。

杭基礎に関しては、杭と地盤という弾性体間の相互作用問題であり、多くの場合杭は群杭として、地盤は成層地盤として取り扱う必要がある。この厳密な解析は非常に難解さを伴うために、既往の研究の多くは何らかの簡略化を行なっている。Novakら¹⁴⁾は、地盤を平面ひずみ状態として地盤反力係数を求め、単杭の加振問題を解いた。Penzien¹⁵⁾は、地盤をばね—ダッシュポット系でモデル化した質点系モデルを示した。これらは解析的取り扱いが容易であり、実務レベルでもよく用いられている。Tajimi¹⁶⁾は、基盤上の一様弾性層を対象に、地盤の上下変位を拘束して地盤反力を求める方法を示した。単杭の厳密な解析としては、波動論によるKoboriら¹⁷⁾、薄層法による田治見ら¹⁸⁾、地中点加振解を用いた松岡ら¹⁹⁾の研究がある。また、群杭効果も含めた解析はWolfら²⁰⁾、Waasら²¹⁾、長谷川ら²²⁾を数えるのみである。連成ばねを用いた解析や群杭としての解析は、膨大な演算時間と煩雑さを必要とする。そこで、本論ではNovakら¹⁴⁾の方法を成層地盤に拡張し、単杭の加振問題と入射波問題を動的サブストラクチャー法の概念に基づいて統一的に効率よく解析する方法を示す。

§ 2. 直接基礎の簡易解析手法

2.1 解析法の基本概念

擬似三次元効果に関する検討¹²⁾¹³⁾によれば、速度比例型減衰を二次元場の支配方程式に導入すると、二次元場の動特性が三次元場のそれに改善される。とくに、半無限一様地盤かつ単独基礎の場合には有効性が高い。そこで、速度比例型減衰を一次元土柱に導入し、簡易的にインピーダンスを求める方法を示す。さらに、動的サブストラクチャー法¹⁴⁾の概念を適用して、容易に入射波問題が解析できることを示す。

図-1のように、半無限地盤上の地表面基礎に水平方向に加振された問題を考える。加振力は地盤内に逸散され、高振動数域では逸散波のほとんどがS波として鉛直下方に伝播する。したがって、半無限地盤をせん断一次元土柱で表わすことは地盤の第一次近似となる。しかし、一次元土柱で半無限地盤をモデル化すると、土柱周辺地盤への波動の逸散が表わせない。水平加振時には、地盤の動きも水平方向変位が卓越するので、加振方向の側面地盤には圧縮力が、直交方向の側面地盤にはせん断力が作用し側面地盤へと逸散される。そこで、土柱側面にも加振方向に圧縮一次元土柱を、直交方向にせん断一次元土柱を連続的に付加する。これは、基礎直下の一次元土柱に速度比例型の粘性減衰を導入することに相当し、二次元場の擬似三次元効果を一次元場に適用したものである。そこで以後、擬似三次元土柱と呼ぶことにする。

埋込み基礎の場合には、半無限地盤を図-2のように五つの半無限土柱でモデル化する。すなわち、基礎直下の土柱の他に基礎側面の地盤を表わす土柱を設ける。これは、基礎直下の地盤の考え方を基礎側面地盤にも適用したものである。水平加振問題では、加振方向の側面土柱は両側面にS波のダッシュポットを取付けた圧縮一次元土柱で、直交方向の側面土柱はP波のダッシュポットを取付けたせん断一次元土柱でモデル化する。なお、基礎側面地盤を土柱でモデル化する考え方は、静的問題において Pauw²³⁾が幅柱として用いている。また、基礎の埋込み効果を基礎底面と基礎側面との寄与に分離する方法は、Novak²⁴⁾により行なわれている。

入射波問題に関しては、基礎入力動を簡易的に求める方法を示す。これは、擬似三次元土柱によるインピーダンスと自由地盤の入射波場とから、動的サブストラクチャー法を適用することにより求められる²⁵⁾。鉛直下方からS波が入射する場合には、入射波場は三角関数で表わされるので、この計算は非常に容易に行なわれる。

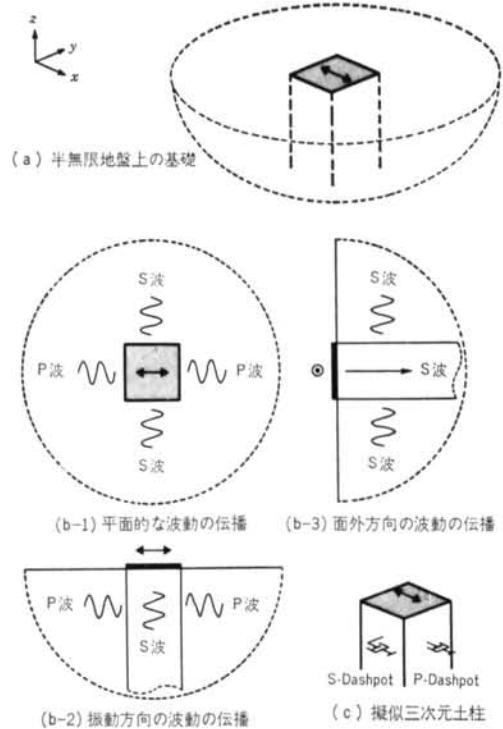


図-1 擬似三次元土柱の概念図

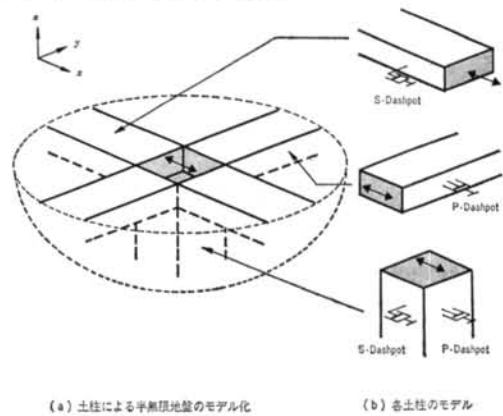


図-2 擬似三次元土柱による地盤のモデル化

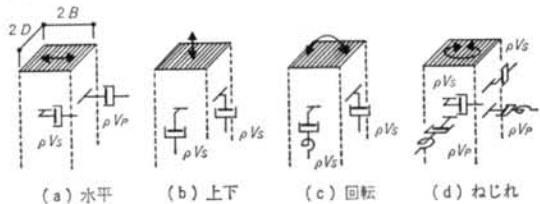


図-3 擬似三次元土柱の速度比例型減衰の考え方

2.2 擬似三次元土柱のインピーダンス

図-3のように、周囲にダッシュポットを有する半無限一次元土柱を考え、水平、上下、回転、ねじれの各イ

インピーダンスを求める。これは、地表面基礎のインピーダンスに相当する。一例として、水平(x方向)インピーダンスについて示す。一次元土柱のせん断変形モードを想定することにより、以下の釣合方程式が得られる。

$$V_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad \dots\dots(1)$$

ここに、 V_s はせん断波速度、 ρ は質量密度、 η はダッシュポットによる速度比例型の粘性減衰係数である。

インピーダンスは単位調和変位加振に対する地盤反力であるので、式(1)を地表面での境界条件および無限遠条件のもとで解き、基礎下端の地盤反力を求めることにより、インピーダンスは以下のように決定される。

$$K_{B1} = -\rho V_s^2 A \left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{z=0} \\ = \rho V_s^2 A \sqrt{-(\omega/V_s)^2 + i\omega\eta/\rho V_s^2} \quad \dots\dots(2)$$

ここに、 ω は円振動数、 $A(=4BD)$ は基礎底面積、 B, D は基礎半幅および半奥行である。下添字は、 i 基礎底面の i 方向($i=1\sim 6$, 各々 $x, y, z, \theta_x, \theta_y, \theta_z$)インピーダンスを示す。減衰係数 η は、図-3(a)に示すように振動方向にP波の、直交方向にS波のダッシュポットを考慮することにより、

$$\eta = \frac{\rho \bar{V}_P}{B} + \frac{\rho V_S}{D} \quad \dots\dots(3)$$

と与えられる¹²⁾。ここに、 \bar{V}_P は縦波速度であり、本論では以下のように定義された二種の縦波速度を用いる。

$$\bar{V}_P = \begin{cases} V_P = V_s \sqrt{2(1-\nu)/(1-2\nu)} \\ V_L = 3.4 V_s / \pi(1-\nu) \end{cases} \quad \dots\dots(4)$$

V_P は通常の縦波速度、 V_L はLysmer⁷⁾が提案した等価縦波速度であり、地表面基礎の上下インピーダンスの減衰係数から得られたものである。 V_L を用いる理由は、ポアソン比が $\nu=0.5$ の場合にも \bar{V}_P が有限値となること、地盤の半無限性を反映した量であることにある²⁰⁾。

方 向	釣合方程式	複素インピーダンス	ばね定数	減衰係数	η (二次元)	η (三次元)
水 平(x)	$V_s^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$i\omega\rho V_s A \sqrt{1 - \frac{i\eta}{\rho\omega}}$	$\frac{V_s}{2} \eta A$	$\rho V_s A$	$\frac{\rho \bar{V}_P}{B}$	$\frac{\rho \bar{V}_P}{B} + \frac{\rho V_S}{D}$
上 下(z)	$\bar{V}_P^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$	$i\omega\rho \bar{V}_P A \sqrt{1 - \frac{i\eta}{\rho\omega}}$	$\frac{\bar{V}_P}{2} \eta A$	$\rho \bar{V}_P A$	$\frac{\rho \bar{V}_S}{B}$	$\frac{\rho V_S}{B} + \frac{\rho V_S}{D}$
回 転(θ_y)	$\bar{V}_P^2 \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial z^2} - \frac{6}{5} \frac{A}{I_y} V_s^2 \phi_y \\ = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial \phi_y}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$	$i\omega\rho \bar{V}_P I_y \sqrt{1 - \frac{18V_s^2}{5B^2\omega^2} - \frac{i\eta}{\rho\omega}}$	$1.9 \frac{\rho V_S \bar{V}_P}{B} I_y$	$\rho \bar{V}_P I_y$	$\frac{3\rho V_S}{B}$	$\frac{3\rho V_S}{B} + \frac{\rho V_S}{D}$
ねじれ(θ_z)	$V_s^2 \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial z^2} = \frac{\eta}{\rho} \frac{\partial \phi_z}{\partial t} + \frac{\partial^2 \phi_z}{\partial t^2}$	$i\omega\rho V_s I_z \sqrt{1 - \frac{i\eta}{\rho\omega}}$	$\frac{V_s}{2} \eta I_z$	$\rho V_s I_z$	$\frac{3\rho V_S B^2 + \rho \bar{V}_P D^2}{(B^2 + D^2)B}$	$\frac{3\rho V_S(B+D)}{(B^2 + D^2)} + \frac{\rho \bar{V}_P(B^2 + D^2)}{(B^2 + D^2)BD}$

(注) $A=4BD, I_y=4B^3D/3, I_z=4BD(B^2+D^2)/3$

表-1 擬似三次元土柱のインピーダンス一覧

上下、回転、ねじれの各方向についても、同様の手順でインピーダンスが得られる。以上の結果を、表-1に一覧して示す。表中には、ばね定数 K と減衰係数 C の値も示してあるが、回転ばね定数を除いて振動数が無限大のときの収束値である。回転インピーダンスは、静的値が存在するので静的値を採用する。減衰係数は波動インピーダンスそのものになり、実部は粘性減衰項により表わされる。なお、表中には二次元場に対する粘性減衰係数 η も示してある。以後の検討では非線形問題への適用を考慮して、ばね定数と減衰係数を用いることとする。

表-2に、ポアソン比による簡易地盤ばねの適用性把握のために、正方形剛基礎のばね定数と減衰係数を、境界要素解と比較して示す。境界要素解のばね定数は静的値、減衰係数は無次元振動数 $a_0(=\omega B/V_s)=3.0$ で算定した値である。境界要素解は簡易地盤ばねの $\bar{V}_P=V_P$ と $\bar{V}_P=V_L$ の結果の間にあり、全般に \bar{V}_P として V_L を用いた場合の方が対応がよい。したがって、以下では \bar{V}_P として V_L を用いる。

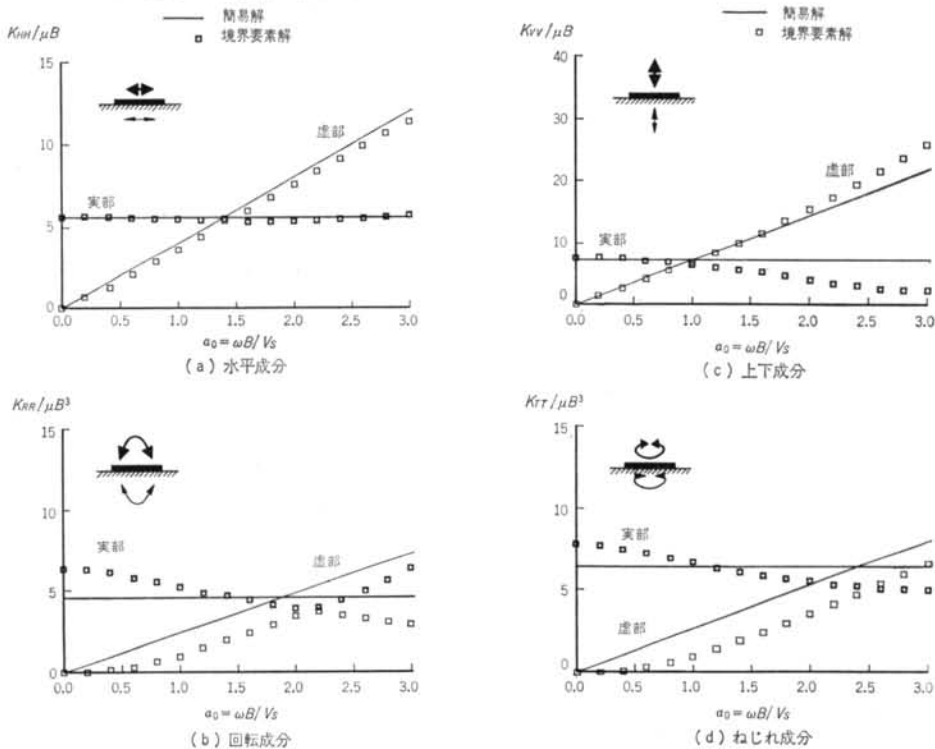
図-4に、簡易地盤ばねと三次元境界要素法による地表面剛基礎のインピーダンスを比較して示す。基礎形状は正方形とし、地盤のポアソン比は $\nu=0.4$ とする。

簡易地盤ばねは、その簡便さに比して境界要素解によく対応している。とくに、耐震解析上重要な水平インピーダンスは両解ともよく一致している。上下インピーダンスは、無次元振動数が $a_0<1.0\sim 1.5$ でよい対応を示しているもの、高振動数域では実部を大きめに評価している。とくに、ポアソン比が $\nu=0.5$ に近づくと境界要素解は高振動数域で負の値になるので、 $\nu=0.4$ を越える場合には無次元振動数 $a_0<1.5$ 程度を適用範囲と考えることができる。ただし、一般の構造物-地盤連成系の固有振動数の多くは、この条件を満足していると予想される。一方、回転およびねじれインピーダンスは、並進成

ν	解析方法	K_{B1} (水平)		K_{B3} (上下)		K_{B5} (回転)	
		$K/\mu B$	$C/\rho V_s B^2$	$K/\mu B$	$C/\rho V_s B^2$	$K/\mu B^3$	$C/\rho V_s B^4$
0.2	BEM	5.08	3.79	5.71	6.33	5.07	1.89
	簡易ばね ($V_P=1.63V_s$)	5.27	4.00	6.53	6.53	4.36	2.18
	簡易ばね ($V_L=1.35V_s$)	4.71	4.00	5.41	5.41	3.42	1.81
0.3	BEM	5.38	3.85	6.53	7.26	5.79	2.12
	簡易ばね ($V_P=1.73V_s$)	5.74	4.00	7.48	7.49	4.99	2.49
	簡易ばね ($V_L=1.44V_s$)	5.09	4.00	6.19	6.18	3.65	2.06
0.4	BEM	5.72	3.89	7.62	8.71	6.76	2.36
	簡易ばね ($V_P=2.45V_s$)	6.90	4.00	9.80	9.80	6.53	3.27
	簡易ばね ($V_L=1.80V_s$)	5.61	4.00	7.22	7.21	4.56	2.40
0.5	BEM	6.10	4.04	9.14	9.20	8.10	2.59
	簡易ばね ($V_P=\infty V_s$)	—	—	—	—	—	—
	簡易ばね ($V_L=2.17V_s$)	6.33	4.00	8.66	8.66	5.50	2.89

(注) BEM のばね定数は静的値, 減衰係数はいずれも $a_0=3.0$ で算定

表一 2 地表面上の正方形基礎のばね定数, 減衰係数とポアソン比の関係



図一 4 地表面基礎のインピーダンス

分ほど対応がよくない, とくに, 虚部については傾きは対応しているものの, 低振動数域で減衰を過大に評価する傾向がある. これは, 擬似三次元境界要素解析¹²⁾においても指摘されたことである. 三次元場の回転系のインピーダンス虚部は低振動数域で二次曲線的に増加するので, これを直線近似の減衰係数で表わすには限界がある. 解析の簡便さを考慮すれば, 本解析法は簡易解析手法

として十分な有効性を有していると考えられる. ただし, 構造物—地盤系の固有振動数が $a_0 < 1.5$ を満足する問題に対して, 回転インピーダンスの減衰の大きさを念頭に置いて適用することが好ましい.

2.3 埋込み基礎のインピーダンスの略算法

図一 2 に示したように, 地盤を基礎直下の土柱と基礎

方向成分	底面土柱		x方向土柱		y方向土柱	
	K_B	C_B	K_X	C_X	K_Y	C_Y
x	$2\mu(B+\nu D)$	$\rho V_S A_B$	$\mu\nu E$	$\rho \bar{V}_P A_X$	$\mu\nu E$	$\rho V_S A_Y$
y	$2\mu(D+\nu B)$	$\rho V_S A_B$	$\mu\nu E$	$\rho V_S A_X$	$\mu\nu E$	$\rho \bar{V}_P A_Y$
z	$2\mu\nu(B+D)$	$\rho \bar{V}_P A_B$	μE	$\rho V_S A_X$	μE	$\rho V_S A_Y$
θ_x	$2.53\rho\nu BD^2$	$\rho \bar{V}_P I_{Bz}$	$\mu E(12D^2+\nu E^2)/12$	$\rho V_S I_{Xz}$	$0.63\rho\nu BE^2$	$\rho \bar{V}_P I_{Yz}$
θ_y	$2.53\rho\nu B^2 D$	$\rho \bar{V}_P I_{By}$	$0.63\rho\nu DE^2$	$\rho \bar{V}_P I_{Xy}$	$\mu E(12B^2+\nu E^2)/12$	$\rho V_S I_{Yz}$
θ_z	$2\mu\{3BD(B+D)+\nu(B^3+D^3)\}/3$	$\rho \bar{V}_P I_{Bz}$	$1.26\rho\nu D^2 E$	$\rho \bar{V}_P I_{Xz}$	$1.26\rho\nu B^2 E$	$\rho \bar{V}_P I_{Yy}$
備考	$A_B=3BD, I_{Bz}=\frac{4BD^3}{3}$ $I_{By}=\frac{4DB^3}{3}, I_{Bz}=I_{Bz}+I_{By}$ $\nu=\bar{V}_P/V_S$		$A_X=2DE, I_{Xz}=\frac{2ED^3}{3}$ $I_{Xy}=\frac{DE^3}{6}, I_{Xz}=I_{Xz}+I_{Xy}$		$A_Y=2BE, I_{Yz}=\frac{BE^3}{6}$ $I_{Yy}=\frac{2EB^3}{3}, I_{Yz}=I_{Yz}+I_{Yy}$	

表-3 基礎各部に取付く擬似三次元土柱のインピーダンス一覧

方向成分	ばね定数	減衰係数
水平	$2\mu B(1+\nu)+2\nu E$	$4\rho V_S B\{B+(1+\nu)E\}$
上下	$4\mu(\nu B+B)$	$4\rho V_S B\{\nu B+2E\}$
回転	$\mu\left\{2.53\nu B+4B^2 E+\frac{7}{6}\nu E^3+(1.26\nu BE^2)\right\}$	$\frac{4\rho V_S B}{3}\{\nu B^3+(1+\nu)E^2+4B^2 E\}$
ねじれ	$\frac{4\mu}{3}\{(3+\nu)B^3+6.79\nu B^2 E\}$	$\frac{8\rho V_S B^3}{3}\{B+(3+\nu)E\}$
水平・回転連	$2\mu\nu E^2$	$2\rho V_S(1+\nu)BE^2$

(注) $\nu=\bar{V}_P/V_S=3.4\pi(1-\nu)$

表-4 正方形埋込み基礎のインピーダンス一覧

側面に取付く四つの土柱で表わす。側面土柱の両側には平面的広がりを考慮してダッシュポットを付加する。したがって、基礎直下の土柱については表-1の三次元用の結果を、基礎側面の土柱に関しては二次元用の結果を用いる。このようにして得られた各土柱のインピーダンスを、表-3に一覧して示す。

埋込み基礎のインピーダンスは、基礎底面および基礎側面のインピーダンスを用い、基礎の幾何学的形状を考慮することにより、以下のように示される。

$$K_{Gii}=K_{Bi}+2(K_{Xi}+K_{Yi}): (i=1\sim 3)$$

$$K_{G44}=K_{B4}+2\{K_{X4}+K_{Y4}+E^2(K_{X2}+K_{Y2})/4+D^2K_{Y3}\}$$

$$K_{G55}=K_{B5}+2\{K_{X5}+K_{Y5}+E^2(K_{X1}+K_{Y1})/4+B^2K_{X3}\}$$

$$K_{G66}=K_{B6}+2(K_{X6}+K_{Y6}+B^2K_{X2}+D^2K_{Y1})$$

$$K_{G15}=E(K_{X1}+K_{Y1})$$

$$K_{G24}=E(K_{X2}+K_{Y2}) \quad \dots\dots(5)$$

このようにして得られた正方形埋込み基礎のインピーダンスを、表-4に一覧して示す。

本解析法の有効性を確認するために、図-5にポアソン比が $\nu=0.4$ の半無限地盤、埋込み比が $E/B=0.5$ および 1.0 の正方形基礎を対象に、インピーダンスを境界要素解²⁷⁾と比較して示す。地表面基礎の場合と同様に、簡易解は境界要素解とよい対応を示している。ただし、埋込みが増加すると側面地盤の質量効果によってインピーダンス実部が高振動数域で減少し、簡易解と境界要素解との差が増加する。また、低振動数域での回転インピーダンス実部の差も、埋込み深さの増加とともに拡大する傾向がある。しかし、全体的に見て簡易解は境界要素解をおおむね模擬している。

2.4 埋込み基礎の基礎入力力の略算法

埋込み基礎の基礎入力力 u_G は、インピーダンスと自由地盤の変位および表面力とから求められる²⁵⁾。

$$u_G = T_G \cdot (u^F + K_G^{-1} \cdot p^F) = T_G \cdot \left(\begin{Bmatrix} u_X^F \\ u_Y^F \\ u_B^F \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_X & 0 \\ & K_Y \\ 0 & K_B \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{Bmatrix} p_X^F \\ p_Y^F \\ p_B^F \end{Bmatrix} \right) \quad \dots\dots(6)$$

ここに、 u^F は自由地盤の変位ベクトル、 p^F は「切欠き力」であり、基礎-地盤境界面での自由地盤応力の積分値で

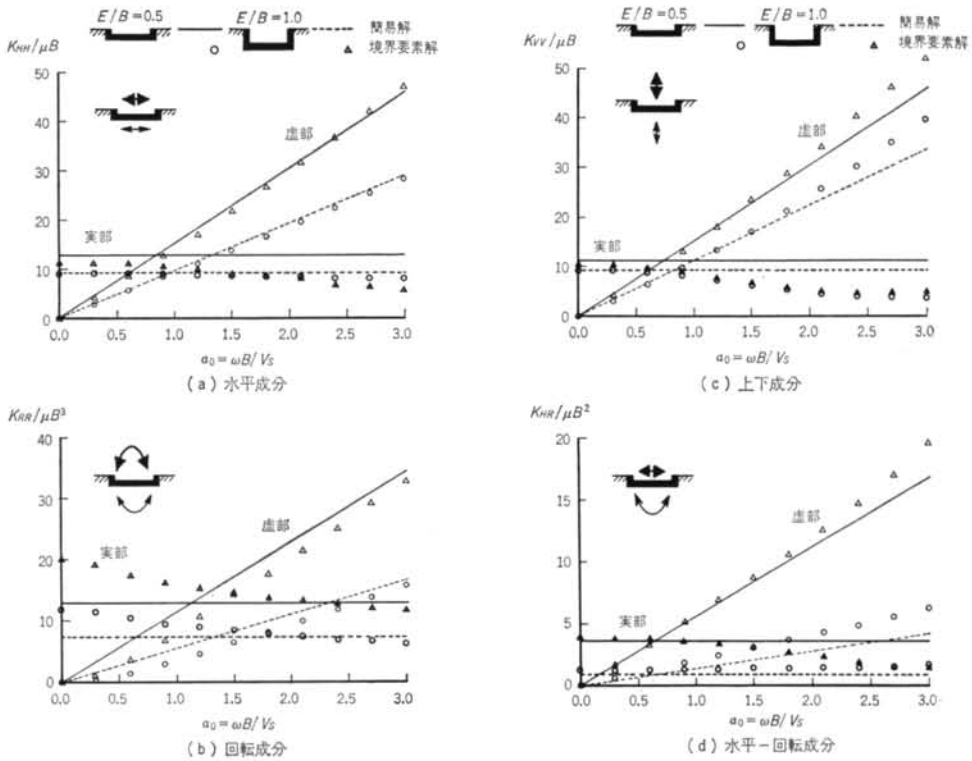


図-5 埋込み基礎のインピーダンス ($\nu=0.4$)

与えられる。 T_{α} は、基礎各部と基礎底面中心の変位を関係付ける変換マトリクスである。また、下添字 X, Y, B は各々 x 方向側壁, y 方向側壁, 基礎底面の寄与を表わす。

S波が鉛直下方入射(振動方向は x 方向)する場合を考えると、自由地盤の変位ベクトルは x 方向のみ存在し、

$$u_x^f = U \cos(\xi z) \quad \dots\dots(7)$$

と表わすことができる。ここに、 U は地表変位振幅、 z は地表からの深さ、 ξ は波数 ω/V_S である。図-6 のように基礎各部の変位の代表値として境界面上での平均値を採用すると、基礎各部の x 方向変位は下式で代表される。

$$u_{Bx}^f = U \cos(\xi E), \quad u_{Yx}^f = u_{Xx}^f = U \sin(\xi E)/\xi E \quad \dots\dots(8)$$

同様に、切欠き力は自由地盤の応力ベクトルの基礎底面および側面での積分値として評価する。

$$p_{Bx}^f = -4\mu U \xi B D \sin(\xi E), \quad p_{Yx}^f = 2\mu U D \{1 - \cos(\xi E)\}, \quad p_{Xx}^f = 0 \quad \dots\dots(9)$$

基礎入力動は、自由地盤応答式(8)および式(9)と表-3 に示したインピーダンスを、式(6)に代入することにより求められる。

図-7 に、ポアソン比 $\nu=0.4$ 、埋込み比 $E/B=0.5$ および 1.0 の正方形埋込み基礎に S波が鉛直下方から入射した場合の基礎入力動を、境界要素解²⁷⁾と比較して示す。本解析法は回転入力動をやや小さめに評価しているものの、水平入力動については境界要素解とよく一致している。しかし、埋込み比が $E/B=1.0$ の場合には、 $a_0 > 1.5$ で水平入力動に境界要素解と差異が認められる。これは、振動数が高くなると自由地盤の深さ方向変位分布の変化が激しくなり、式(9)による平均操作では限界があるためと推察される。 $E/B=1.0$ かつ $a_0 = \pi/2$ が、基礎側面での自由地盤応答が $1/4$ 波長になる振動数に相当するので、本解析法の適用範囲は構造物-地盤連成系の固有振動数が $a_0 = \pi B/2E$ を下回る範囲であると理解できる。

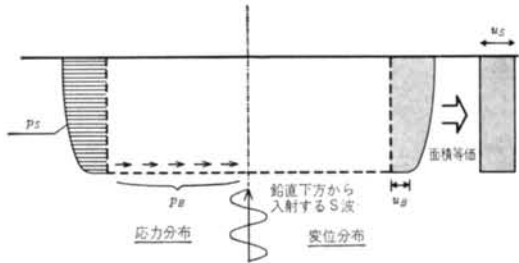


図-6 埋込み基礎の基礎入力動算定の考え方

§ 3. 杭基礎の簡易解析手法

3.1 基本概念

図-8に示すように、基盤上の N 層地盤に支持された単杭のインピーダンスと、基礎入力動を求める方法を示す。周辺地盤は Novak ら¹⁴⁾と同様に平面ひずみ状態と考へ、ウィングラー型の地盤反力係数でモデル化する。また、杭断面が変化する位置および層境界位置で杭を分

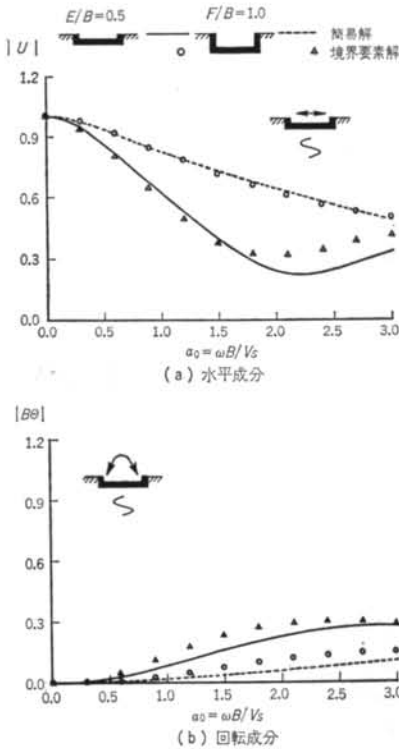


図-7 埋込み基礎の基礎入力動 ($\nu=0.4$)

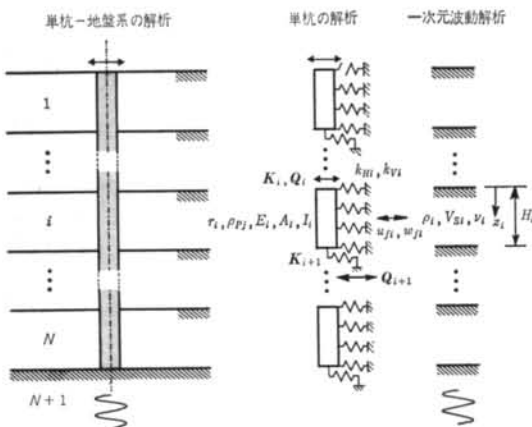


図-8 単杭-地盤系の解析概念図

割し、各杭要素下端にサブストラクチャー法を適用する。これにより、各杭要素間のインピーダンスとドライブングフォースの関係を求め、この操作を杭端から杭頭まで順次行なうことにより、杭頭のインピーダンスとドライブングフォースを求める。

3.2 杭の支配方程式と斉次解・非斉次解

杭の第 i 要素の支配方程式は、水平振動問題では、

$$E_i I_i \frac{\partial^4 u_i}{\partial z^4} + k_{H_i}(u_i - u_{f_i}) + \rho_{P_i} A_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots(10)$$

上下振動問題では、

$$E_i A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial z^2} - k_{V_i}(w_i - w_{f_i}) - \rho_{P_i} A_i \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} = 0 \quad \dots\dots(11)$$

と表わすことができる。ここに、 $E_i, I_i, \rho_{P_i}, A_i$ は杭のヤング係数、断面二次モーメント、質量密度、断面積であり、 u_i, w_i は杭の水平および上下変位である。また、下添字 i は杭の第 i 要素の諸量を示す。 k_{H_i}, k_{V_i} は水平および上下方向の地盤反力係数であり、以下のように Baranov²⁸⁾による平面ひずみ場の剛円板のインピーダンスを用いる。

$$k_H = 2\pi\mu\beta r \frac{\frac{V_P}{V_S} H_2^{(2)}(\beta r) H_1^{(2)}(\alpha r) + H_2^{(2)}(\alpha r) H_1^{(2)}(\beta r)}{H_2^{(2)}(\beta r) H_0^{(2)}(\alpha r) + H_2^{(2)}(\alpha r) H_0^{(2)}(\beta r)}$$

$$k_V = 2\pi\mu\beta r \frac{H_1^{(2)}(\beta r)}{H_0^{(2)}(\beta r)} \quad \dots\dots(12)$$

ここに、 α, β は $\alpha = \omega/V_P, \beta = \omega/V_S$ なる地盤の波数、 r は杭半径、 $H_j^{(2)}$ は j 次の第二種ハンケル関数である。また、式(10)~(11)中の u_{f_i}, w_{f_i} は自由地盤応答であり、入射波問題の場合にのみ存在し、S波入射の場合には、

$$u_{f_i} = u_{E_i} e^{i\beta_i z} + u_{F_i} e^{-i\beta_i z} \quad \dots\dots(13)$$

P波入射の場合には、

$$w_{f_i} = w_{E_i} e^{i\alpha_i z} + w_{F_i} e^{-i\alpha_i z} \quad \dots\dots(14)$$

となる。ここに、 $u_{E_i}, u_{F_i}, w_{E_i}, w_{F_i}$ は各々 S波および P波入射時の自由地盤の上昇波、下降波の変位振幅であり、第 i 層上境界で定義される。鉛直下方入射問題ではこれらの値は一次元波動論により容易に求められる。

式(10)の斉次解 u_{hi} および非斉次解 u_{si} は、

$$u_{hi} = e^{\lambda_H z} (a_i \cos \lambda_H z + b_i \sin \lambda_H z) + e^{-\lambda_H z} (c_i \cos \lambda_H z + d_i \sin \lambda_H z)$$

$$u_{si} = \frac{k_{H_i}}{E_i I_i \beta_i^4 + k_{H_i} - \omega^2 \rho_{P_i} A_i} (u_{E_i} e^{i\beta_i z} + u_{F_i} e^{-i\beta_i z}) \quad \dots\dots(15)$$

式(11)の斉次解 w_{hi} および非斉次解 w_{si} は、

$$w_{hi} = e^{\lambda_V z} + f_i e^{-\lambda_V z}$$

$$w_{si} = \frac{k_{V_i}}{E_i A_i \alpha_i^2 + k_{V_i} - \omega^2 \rho_{P_i} A_i} (w_{E_i} e^{i\alpha_i z} + w_{F_i} e^{-i\alpha_i z}) \quad \dots\dots(16)$$

と求められる。ここに、 $a_i \sim f_i$ は第 i 要素の境界条件により決定される未定定数である。また、 λ_{H_i} 、 λ_{V_i} は

$$\lambda_{H_i} = \left(\frac{1}{4E_i I_i} (k_{H_i} - \rho_{F_i} \omega^2 A_i) \right)^{1/4}, \quad \lambda_{V_i} = \left(\frac{1}{E_i A_i} (k_{V_i} - \rho_{F_i} \omega^2 A_i) \right)^{1/2} \quad \dots\dots(17)$$

と与えられる。

3.3 水平・回転連成振動問題

杭の第 i 要素と第 $i+1$ 要素のインピーダンスとドライビングフォースの関係を導き、これをもとに杭頭のインピーダンスとドライビングフォースを求める。水平・回転変位加振時の第 i 要素の境界条件は、サブストラクチャー法を適用して斉次解を用いることにより、

$$\begin{aligned} u_{H_i} \Big|_{z_i=0} &= 1 \text{ (水平加振問題)}, = 0 \text{ (回転加振問題)} \\ \frac{\partial u_{H_i}}{\partial z} \Big|_{z_i=0} &= 0 \text{ (水平加振問題)}, = 1 \text{ (回転加振問題)} \\ \left(-E_i I_i \frac{\partial^3}{\partial z^3} + K_{H_{H_{i+1}}} + K_{H_{\theta_{i+1}}} \frac{\partial}{\partial z} \right) u_{H_i} \Big|_{z_i=H_i} &= 0 \\ \left(-E_i I_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_{\theta_{H_{i+1}}} + K_{\theta\theta_{i+1}} \frac{\partial}{\partial z} \right) u_{H_i} \Big|_{z_i=H_i} &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots(18)$$

と表わされる。ここに、 $K_{H_{H_{i+1}}}$ 、 $K_{H_{\theta_{i+1}}}$ 、 $K_{\theta_{H_{i+1}}}$ 、 $K_{\theta\theta_{i+1}}$ は第 $i+1$ 要素のインピーダンスである。式(18)に式(15)を代入することにより、以下の連立方程式が得られる。

$$\left[A_i \cdot A_i + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{i+1} \cdot B_i \end{bmatrix} \right] \cdot E_{F_i} = D_{F_i} \quad \dots\dots(19)$$

式(19)から未定定数 E_{F_i} を決定し、要素上端の反力を求めることにより第 i 要素のインピーダンスが得られる。

$$K_i = -C_i \cdot \left[A_i \cdot A_i + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{i+1} \cdot B_i \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot D_{F_i} \quad \dots\dots(20)$$

上式は、第 i 要素と第 $i+1$ 要素のインピーダンスを関係付けている。ここに、式(19)および(20)中のマトリクスは、

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{H_i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2E_i I_i \lambda_{H_i}^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2E_i I_i \lambda_{H_i}^2 \end{bmatrix} & D_{F_i} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\ A_i^T &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & e^{\lambda_{H_i} H_i} (\cos \lambda_{H_i} H_i + \sin \lambda_{H_i} H_i) & e^{\lambda_{H_i} H_i} \sin \lambda_{H_i} H_i \\ 0 & 1 & -e^{\lambda_{H_i} H_i} (\cos \lambda_{H_i} H_i - \sin \lambda_{H_i} H_i) & -e^{\lambda_{H_i} H_i} \cos \lambda_{H_i} H_i \\ 1 & -1 & -e^{-\lambda_{H_i} H_i} (\cos \lambda_{H_i} H_i - \sin \lambda_{H_i} H_i) & -e^{-\lambda_{H_i} H_i} \sin \lambda_{H_i} H_i \\ 0 & 1 & -e^{-\lambda_{H_i} H_i} (\cos \lambda_{H_i} H_i + \sin \lambda_{H_i} H_i) & e^{-\lambda_{H_i} H_i} \cos \lambda_{H_i} H_i \end{bmatrix} \\ B_i^T &= \begin{bmatrix} e^{\lambda_{H_i} H_i} \cos \lambda_{H_i} H_i & \lambda_{H_i} e^{\lambda_{H_i} H_i} (\cos \lambda_{H_i} H_i - \sin \lambda_{H_i} H_i) \\ e^{\lambda_{H_i} H_i} \sin \lambda_{H_i} H_i & \lambda_{H_i} e^{\lambda_{H_i} H_i} (\cos \lambda_{H_i} H_i + \sin \lambda_{H_i} H_i) \\ e^{-\lambda_{H_i} H_i} \cos \lambda_{H_i} H_i & -\lambda_{H_i} e^{-\lambda_{H_i} H_i} (\cos \lambda_{H_i} H_i + \sin \lambda_{H_i} H_i) \\ e^{-\lambda_{H_i} H_i} \sin \lambda_{H_i} H_i & -\lambda_{H_i} e^{-\lambda_{H_i} H_i} (\cos \lambda_{H_i} H_i - \sin \lambda_{H_i} H_i) \end{bmatrix} \\ C_i &= -EI \begin{bmatrix} -2\lambda_{H_i}^3 & 2\lambda_{H_i}^3 & 2\lambda_{H_i}^3 & 2\lambda_{H_i}^3 \\ 0 & 2\lambda_{H_i}^2 & 0 & -2\lambda_{H_i}^2 \end{bmatrix} & K_i &= \begin{bmatrix} K_{H_{H_i}} & K_{H_{\theta_i}} \\ K_{\theta_{H_i}} & K_{\theta\theta_i} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad \dots\dots(21)$$

である。

S波が鉛直下方から入射する場合の第 i 要素上端におけるドライビングフォースも、同様な手順で求められる。この場合には、斉次解に加えて非斉次解も考慮する必要がある。ドライビングフォースは、第 i 要素上端の変位を拘束したときの反力であるので、境界条件は、

$$\begin{aligned} (u_{H_i} + u_{S_i}) \Big|_{z_i=0} &= 0, \quad \frac{\partial (u_{H_i} + u_{S_i})}{\partial z} \Big|_{z_i=0} = 0 \\ \left(-E_i I_i \frac{\partial^3}{\partial z^3} + K_{H_{H_{i+1}}} + K_{H_{\theta_{i+1}}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_{H_i} + u_{S_i}) \Big|_{z_i=H_i} &= Q_{i+1} \\ \left(-E_i I_i \frac{\partial^2}{\partial z^2} + K_{\theta_{H_{i+1}}} + K_{\theta\theta_{i+1}} \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_{H_i} + u_{S_i}) \Big|_{z_i=H_i} &= M_{i+1} \end{aligned} \quad \dots\dots(22)$$

と表わされる。ここに、 Q_{i+1} 、 M_{i+1} は第 $i+1$ 要素の水平および回転ドライビングフォースである。加振問題の場合と同様に、式(23)から以下の連立方程式が得られる。

$$\left[A_i \cdot A_i + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{i+1} \cdot B_i \end{bmatrix} \right] \cdot E_{Di} = D_{Di} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{i+1} - K_{i+1} \cdot U_{Si} \end{bmatrix} \quad \dots\dots(23)$$

式(23)から未定定数 E_{Di} を決定し、第 i 要素上端における反力を求めるとドライビングフォースが得られる。

$$Q_i = C_i \cdot \left[A_i \cdot A_i + \begin{bmatrix} 0 \\ K_{i+1} \cdot B_i \end{bmatrix} \right]^{-1} \cdot \left(D_{Di} + \begin{bmatrix} 0 \\ Q_{i+1} - K_{i+1} \cdot U_{Si} \end{bmatrix} \right) + Q_{Si} \quad \dots\dots(24)$$

上式は第 i 要素と第 $i+1$ 要素のドライビングフォースの関係を示している。ここに、

$$\begin{aligned} D_{Di} &= \frac{-k_{Hi}}{E_i I_i \beta_i^4 + k_{Hi} - \omega^2 \rho_{Pi} A_i} \begin{bmatrix} (u_{Ei} + u_{Fi}) \\ i\beta_i(u_{Ei} - u_{Fi}) \\ E_i I_i i\beta_i^3 (u_{Ei} e^{\beta_i H_i} - u_{Fi} e^{-\beta_i H_i}) \\ E_i I_i i\beta_i^2 (u_{Ei} e^{\beta_i H_i} + u_{Fi} e^{-\beta_i H_i}) \end{bmatrix} \\ U_{Si} &= \frac{k_{Hi}}{E_i I_i \beta_i^4 + k_{Hi} - \omega^2 \rho_{Pi} A_i} \begin{bmatrix} u_{Ei} e^{\beta_i H_i} + u_{Fi} e^{-\beta_i H_i} \\ i\beta_i (u_{Ei} e^{\beta_i H_i} - u_{Fi} e^{-\beta_i H_i}) \end{bmatrix} \\ Q_{Si} &= \frac{E_i I_i k_{Hi}}{E_i I_i \beta_i^4 + k_{Hi} - \omega^2 \rho_{Pi} A_i} \begin{bmatrix} i\beta_i^3 (u_{Ei} - u_{Fi}) \\ i\beta_i^2 (u_{Ei} + u_{Fi}) \end{bmatrix} \quad Q_i = \begin{bmatrix} Q_i \\ M_i \end{bmatrix} \quad \dots\dots(25) \end{aligned}$$

である。式(20)および(24)の操作を杭端から杭頭まで順次行なうことにより、杭頭のインピーダンスとドライビングフォースが求められる。ただし、全体座標系と杭の座標系の回転方向が異なるので、杭頭の諸量を、

$$K_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot K_i \quad Q_P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot Q_i \quad \dots\dots(26)$$

のように座標変換する。また、基礎入力動は、

$$U_P = K_P^{-1} \cdot Q_P \quad \dots\dots(27)$$

と求められる。なお、杭頭のインピーダンスとドライビングフォースは、地表面円形剛基礎の静的ばね定数と表一から得られる減衰係数から算定する。すなわち、

$$\begin{aligned} K_{N+1} &= \begin{bmatrix} \frac{8\mu r}{2-\nu} + i\omega\rho V_S \pi r^2 & 0 \\ 0 & \frac{8\mu r^3}{3(1-\nu)} + i\omega\rho V_S \frac{3.4}{1-\nu} \frac{r^4}{4} \end{bmatrix} \\ Q_{N+1} &= \begin{bmatrix} K_{HN+1} (u_{EN+1} + u_{FN+1}) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots(28) \end{aligned}$$

3.4 上下振動問題

上下方向の振動問題についても、水平・回転振動問題と同様な手順で求められる。結果のみを示すと、上下インピーダンスおよび上下ドライビングフォースは、

$$\begin{aligned} K_{Vi} &= -C_{Vi} \cdot \left[A_{Vi} + K_{Vi} \cdot B_{Vi} \right]^{-1} \cdot D_{Vi} \\ P_i &= C_{Vi} \cdot \left[A_{Vi} + K_{Vi} \cdot B_{Vi} \right]^{-1} \cdot \left(D_{Vi} + \begin{bmatrix} 0 \\ P_{i+1} - K_{Vi} \cdot w_{st} \Big|_{z_i=H_i} \end{bmatrix} \right) + E_i A_i \frac{\partial}{\partial z_i} w_{st} \Big|_{z_i=0} \quad \dots\dots(29) \end{aligned}$$

と第 $i+1$ 要素の諸量と関係づけられる。なお、ドライビングフォースはP波入射の場合のみ存在する。ここに、

$$\begin{aligned} A_{Vi} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ E_i A_i \lambda_{Vi} e^{\lambda_{Vi} H_i} & -E_i A_i \lambda_{Vi} e^{-\lambda_{Vi} H_i} \end{bmatrix} \quad B_{Vi} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ e^{\lambda_{Vi} H_i} & e^{-\lambda_{Vi} H_i} \end{bmatrix} \\ C_{Vi} &= \begin{bmatrix} \lambda_{Vi} E_i A_i & -\lambda_{Vi} E_i A_i \end{bmatrix} \quad D_{Vi} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$D_{VSt} = \frac{-k_{Vt}}{E_L A_L \alpha_L^2 + k_{Vt} - \omega^2 \rho_P A_L} \left[E_L A_L \alpha_L (\omega_{E_L} e^{i \alpha_L H_L} - \omega_{F_L} e^{-i \alpha_L H_L}) \right]$$

$$K_{V_{N+1}} = \frac{4\mu r}{1-\nu} + i\omega \rho V_S \frac{3.4}{1-\nu} r^2 \quad P_{N+1} = K_{V_{N+1}} (\omega_{E_{N+1}} + \omega_{F_{N+1}}) \quad \dots\dots(8)$$

である。水平・回転振動問題と同様に、式(8)の操作を順次行なうことにより杭頭のインピーダンスとドライビングフォースが求められる。

$$K_{P_V} = K_{V_1} \quad P_P = P_1 \quad \dots\dots(9)$$

また、基礎入力動は、

$$W = P_P / K_{P_V} \quad \dots\dots(9)$$

となる。

3.5 解析結果と検証

本解析法の検証を目的として、薄層法¹⁵⁾による解との比較検証を行なう。図-9に示すように、半無限一様地盤に打設された摩擦杭と三層地盤に打設された支持杭を対象とし、杭頭のインピーダンスとS波が鉛直入射した場合の基礎入力動を示す。基礎入力動は、杭端位置の自由地盤入射波振幅の2倍に対する伝達関数として示す。薄層解は、杭は梁要素で、杭下の地盤は有限要素でモデル化し、杭一地盤間の回転抵抗を無視した結果である。なお、地盤の下方境界は粘性境界とした²⁹⁾。

図-10に、半無限地盤および成層地盤の杭頭インピー

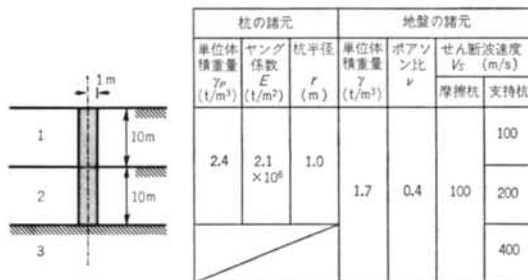


図-9 単杭一様地盤系の検証用解析モデル

ダンスを、図-11に基礎入力動を示す。本解析法は薄層法とよい対応を示しており、有効性が把握できる。ただ

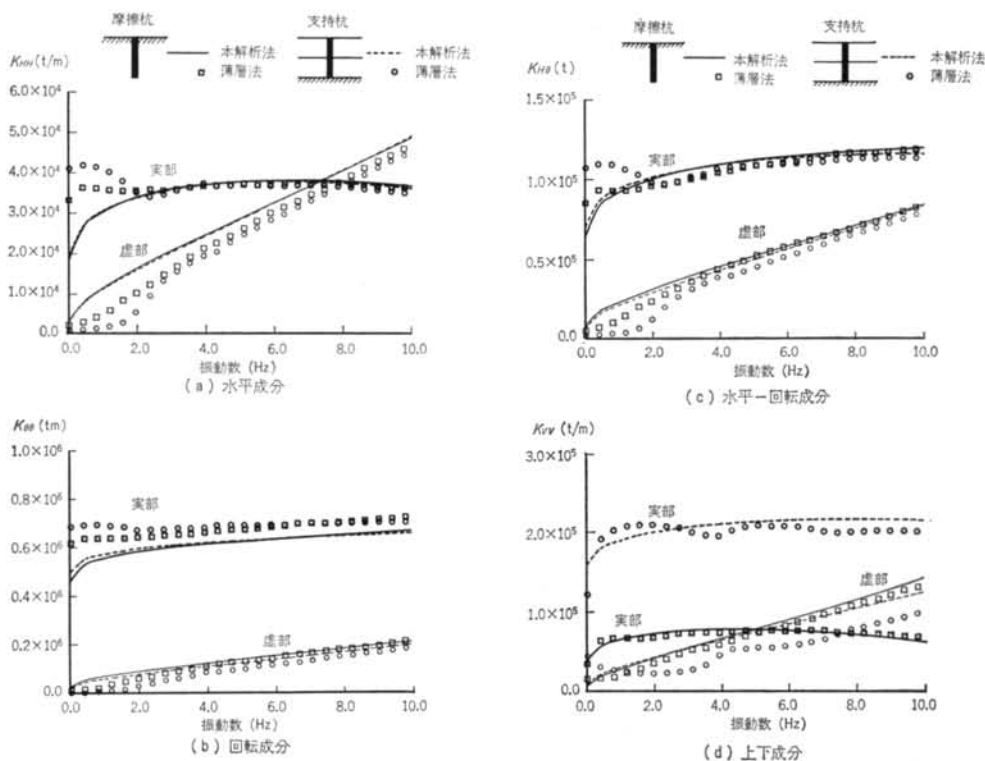
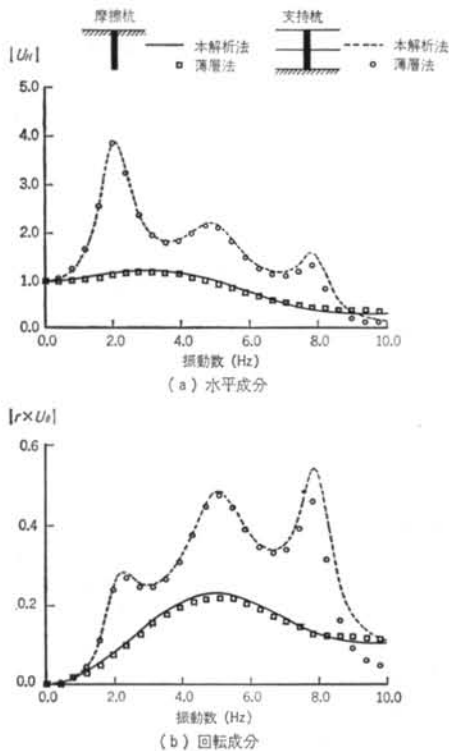


図-10 杭頭のインピーダンス



図一11 杭頭の基礎入力動

し、半無限地盤の場合には静的値近傍で式(4)に示した地盤反力係数がゼロとなるために、インピーダンスが過小評価されている。また、杭一地盤間の回転抵抗を無視した結果、回転インピーダンス実部が小さめの値を示している。三層地盤の場合にも同様の傾向が認められるが、

地盤反力係数に地盤の成層効果が考慮されていないために、低振動数域で実部を小さめに、虚部を大きめに評価している。

§ 4. 結論

(1)一次元土柱に速度比例型粘性減衰を導入した擬似三次元土柱の考え方を提案し、地盤を基礎底面および基礎側面の土柱でモデル化することにより、簡易に直接基礎のインピーダンスを評価できることを示した。また、動的サブストラクチャー法概念を導入することにより、直接基礎の基礎入力動を上記インピーダンスと自由地盤応答から容易に求めることができることを示した。境界要素解の比較を通して解析法の有効性が確認され、特に耐震解析上重要となる水平成分でよい対応を示した。また、本解析法の適用範囲は、構造物—地盤連成系の固有振動数が $a_0 < \pi B/2E$ かつ $\pi/2$ を満足する範囲であることが示された。

(2)成層地盤中の単杭のインピーダンスと基礎入力動を、サブストラクチャー法を利用して効率的に求める方法を示した。解析結果は薄層法による結果とよい対応を示し、有効性が確認された。基礎を含めた群杭の問題については、単杭の寄与を基礎の幾何学的条件を考慮して加算し、これに群杭係数を乗じ直接基礎の寄与を加算することにより求めることができる。ただし、動的な群杭効果については今後の研究に待つところが大きい。

〈参考文献〉

- 1) E. Reissner: "Stationäre, axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes" Ing. Arch., Vol.7 (1936) pp.381~396
- 2) 田治見宏: "耐震理論に関する基礎的研究" 東京大学生産技術研究所報告 第8巻, 第4号 (1959) pp.170~215
- 3) 小堀輝二, 南井良一郎, 鈴木有, 日下部馨: "長方形基礎の Dynamical Ground Compliance (その1) 半無限地盤の場合" 京都大学防災研究所年報 Vol.10A (1967年) pp.283~314
- 4) J.E. Luco: "Impedance Functions for a Rigid Foundation on a Layered Medium" Nucl. Eng. Des, Vol.31 (1974) pp.204~217
- 5) J. Dominguez & J.M. Roesset: "Dynamic Stiffness of Rectangular Foundations" MIT Res. Rep., R78-20 (1978)
- 6) J. Dominguez: "Response of Embedded Foundations to Travelling Waves" MIT Res. Rep., R78-24 (1978)
- 7) J. Lysmer: "Vertical Motions of Rigid Footings" Ph.D. Thesis, Univ. of Michigan (1965)
- 8) J.R. Hall: "Coupled Rocking and Sliding Oscillations of Rigid Circular Footings" Proc. Int. Symp. Wave Prop. Dyn. Prop. Earth Mat., (1967) pp.139~148
- 9) 山原 浩: "弾性地盤上の基礎および構造物の振動性状に関する研究(その1)(その2)" 日本建築学会論文報告集 第115

- 号 (1965年) pp.6~14; 第120号 (1966年) pp.35~43
- 10) J.W. Meek & A.S. Veletsos: "Simple Models in Foundations of Lateral and Rocking Motion" Proc. 5th WCEE., Vol. 2 (1974) pp.2610~2613
 - 11) J.P. Wolf & D.R. Somaini: "Approximate Dynamic Model of Embedded Foundation in Time Domain" Int. J. Earthq. Eng. Struct. Dyn., Vol. 14 (1986) pp.683~703
 - 12) 中井正一, 福和伸夫: "2次元地盤表面上剛基礎の動特性—境界要素法による動的擬似3次元効果に関する研究" 日本建築学会論文報告集 第344号 (1984年) pp.81~92
 - 13) 中井正一, 福和伸夫: "埋込み剛基礎の動特性に基づく動的擬似3次元効果の考察—境界要素法による動的擬似3次元効果に関する研究" 日本建築学会構造系論文報告集 第380号 (1987年) pp.57~67
 - 14) M. Novak: "Dynamic Stiffness and Damping of Piles" Can. Geotech. J., Vol. 11 (1974) pp.574~598
 - 15) J. Penzien: "Soil-Pile Foundation Interaction (Earthquake Engineering, Chap. 14, ed. by R.L. Wiegell)" Prentice Hall (1970) pp.349~381
 - 16) H. Tajimi: "Dynamic Analysis of a Structure Embedded in an Elastic Stratum" Proc. 4th WCEE, Vol.3 (1969) pp.54~69
 - 17) 田治見宏, 下村幸夫: "3次元薄層法による建物—地盤系の動的解析" 日本建築学会論文報告集 第243号 (1976年) pp.41~51
 - 18) T. Kobori, R. Minai & K. Baba: "Dynamic Behavior of a Laterally Loaded Pile" Proc. Specialty Session 10, 9th Int. Conf. Soil Mech. Found. Eng. (1977) pp.175~180
 - 19) 松岡 理, 八幡夏恵子, 福和伸夫: "地中加振問題の一考察—点加振解とその構造物への応用" 第28回構造工学シンポジウム論文集 (1981年) pp.77~84
 - 20) J.P. Wolf & G.A. von Arx: "Impedance Function of a Group of Vertical Piles" Proc. ASCE Geotech. Eng. Div. Spec. Conf. Earthq. Eng. Soil Dyn., Vol. II (1978) pp.1024~1141
 - 21) G. Waas & H.G. Hartmann: "Analysis of Pile Foundation under Dynamic Loads" Trans. 6th SMiRT, K5/2 (1981)
 - 22) 長谷川正幸, 中井正一: "成層地盤における群杭効果を考慮した構造物—杭—地盤系の三次元振動解析" 清水建設研究報告 第46号 (1987年) pp.35~46
 - 23) A. Pauw: "A Dynamic Analogy for Foundation-Soil Systems" Proc. Symp. Dyn. Test. Soil (1953) pp.90~112
 - 24) M. Novak & Y.O. Beredugo: "Vertical Vibration of Embedded Footings" J. Soil Mech. Found. Div., ASCE, Vol.98 (1972) pp.1291~1310
 - 25) 中井正一, 市川隆之, 渡辺孝英, 広谷 勉, 室井一夫: "切欠き型サブストラクチャー法の分類と適用" 日本建築学会大会 学術講演梗概集 (1985年) pp.349~352
 - 26) G. Gazetas & R.Dobry: "Simple Radiation Damping Model for Piles and Footings" J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol.110 (1984) pp.937~956
 - 27) 吉田一博, 川瀬 博: "埋設された剛構造物相互の連成振動" 第7回日本地震工学シンポジウム講演集 (1986年) pp.1045~1050
 - 28) V.A. Baranov: "On the Calculation of Excited Vibrations of an Embedded Foundation" Voprosy Dynamiki i Prochnosti, No.14 (1967) pp.195~209
 - 29) 福和伸夫, 長谷川正幸, 高田毅士他: "FEM による構造物・地盤連成系解析システム" 第6回電子計算機利用シンポジウム論文集 (1984年) pp.85~90