U.D.C. 627.223.6：632.59.01：551.466

清水建設研究報告
第53号平成3年4月

非線形不規則波動場の数値解析における開境界処理法の開発

大山　巧
（技術研究所）
灘岡和夫
（東京工業大学）

§1. はじめに

一般に，海洋・海岸構造物を設計する際に与えられる波浪条件は，微小振幅波理論の適用範囲を越えている場合が多く，波の非線形性は構造物周辺の波浪場に対して様々な影響を及ぼしている．この意味から，波の非線形性を考慮した波動解析法が数多く提案されてきたが，このうちグリーンの公式に基づく境界積分方程式を時間領域で解く境界要素法は，非線形性の強い任意の波動場を取り扱うことができる一般性の高い手法として注目されている．現在この手法は，数多くの非線形波動問題へ応用されているが[1)~7)]，有効な開境界処理法が存在しないことから，実際の解析では孤立波のような開境界処理を必要としない波動を対象にするか，あるいは波の反射側と透過側で空間的な周期性を仮定することが多かった．すなわち，境界要素法による非線形波動解析法が任意の非線形性を有する波動場に適用できる手法であるにもかかわらず，不規則波が連続して入射するような，より一般的な波動場へ応用することは現実的には不可能であった．

差分法による波動場の解析においてよく用いられてきた開境界処理法として，Sommerfeld 型の放射条件を課す，いわゆる吸収法があり[8)9)]，最近ではこれを境界要素法による解析に適用した研究もある[10)]．しかし，この放射条件は単一の位相速度を持つ波が入射することを前提としたものであり，非保存波や不規則波に対しては吸収効率が大きく低下してしまうため，適用範囲がかなり限られていた．

そこで本研究では，境界要素法に基づく非線形波動場の解析のアルゴリズムに組み込むことができ，かつ不規則な波動場にも適用可能な開境界処理法として，波をエネルギー的に吸収するスポンジ層とSommerfeld境界を組み合わせた，いわゆる「数値消波フィルター」を開発する．さらに，この解析手法をより一般性のある「数値波動水槽」として確立するために，波の流速に対応したわき出しを与える造波ソースを解析領域内に設け，この造波ソースと数値消波フィルターを組み合わせることにより無反射造波システムを構築する．

本報告では，まず数値消波フィルターと無反射造波方法の基本的な考え方を示し，線形ポテンシャル理論に基づく周波数領域での解析結果から，本消波フィルターの反射率の基本特性を調べる．次に，境界要素法による非線形波動場の時間領域の解析に本消波フィルターと造波ソースを組み込み，基本的な数値実験により，非線形波動場における数値消波フィルターの消波性能および無反射造波の性能を検証する．

§2. 数値消波フィルターを用いた開境界処理法の基本的な考え方

2.1 Sommerfeld 型の吸収境界の適用限界

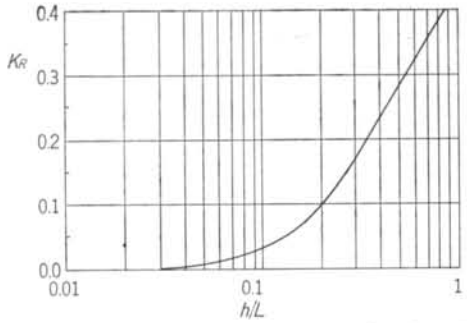
Sommerfeld の放射条件：

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \pm C_0 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \qquad \cdots\cdots(1)$$

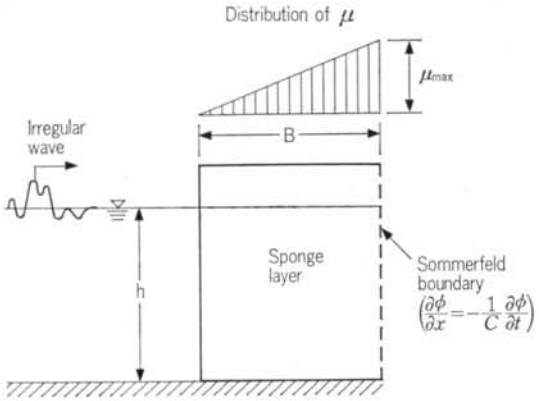
を開境界での境界条件として適用する場合を考える．ただし，ϕ：速度ポテンシャルなどの流れ場の変数，C_0：波の位相速度である．この境界に角振動数σの波が入射するときの境界からの反射率K_Rは，線形理論のもとに以下のように与えられる．

$$K_R(\sigma) = \left| \frac{C_0 - C(\sigma)}{C_0 + C(\sigma)} \right| \qquad \cdots\cdots(2)$$

ただし，$C(\sigma)$は角振動数σの波に対応した波速である．**図—1**は，C_0を仮に線形長波の波速$\sqrt{gh}$（g：重力加速度，h：水深）としたときのSommerfeld型の境界からの反射率K_Rの周期特性を示したものである．図中の横軸は，相対水深h/L（L：波長）を表わしている．この図に示されるように，長波との波速のずれが大きい短周期の波ほど反射率が高く，吸収効率が悪くなる．このことから，単一の位相速度を持つ波の入射を前提にした



図—1　Sommerfeld 型境界からの反射率の特性($C_0=\sqrt{gh}$)



図—2　数値消波フィルターの概念

Sommerfeld 型の吸収境界は，波速の異なる成分波を同時に含む不規則な波動場に対しては適用できないことが分かる．

Orlanski[11] は，一般の双曲型の系を対象にした開境界処理法として，Sommerfeld の放射条件における位相速度 C_0 を時間的に変化する未知数と置き，これを境界近傍の節点値から数値的に求める方法を提案している．ただし，Orlanski 型のスキームを直接水面波の問題に適用すると，単一の波速を持つ正弦波を入射させた場合でも波の峰や谷に相当するときに C_0 の値が適切に計算できないことが知られている．この意味から，C_0 の値を求めるためのスキームが，Chan ら[8]，Yen ら[9]，Kantha ら[12]により提案されている．しかし，Sommerfeld の放射条件そのものが，複数の波速成分を含む波動を表現し得ないことから，この放射条件を用いたいずれの方法も一般的な不規則波に適用できないことは明らかである．

2.2　数値消波フィルターの基本原理

図—2 に，本研究で開発した数値消波フィルターの概念図を示す．この消波フィルターは，非線形で不規則な波が入射する場合を想定したものであり，流体運動に減衰を与えて入射波をエネルギー的に吸収するスポンジ層と，その背後の Sommerfeld 型の境界から構成される．スポンジ層は，いわば実験水槽における消波装置に対応したもので，その消波メカニズムは層内の流体抵抗によるエネルギー減衰に基づいていることから，消波性能の周波数依存性は比較的小さく，非線形領域まで含めた不規則波や非保存波を効率よく消波することが期待できる．ただし，入射波に含まれる成分波の波長がスポンジ層の幅に比べて大きくなると，消波効率が低下してしまうことが予想される．そこで，このような長周期波成分については波速 C が $C\simeq\sqrt{gh}$ で近似できることに着目し，スポンジ層の外側境界に設定した Sommerfeld 型境界でスポンジ層外に透過させるようにした．

消波性能の周波数依存性が小さいことは，スポンジ層の大きな利点のひとつであるが，他にも重要な長所がある．スポンジ層の数学モデルが，本研究で対象としている境界要素解析へ比較的容易に組み込むことができる点である．井島ら[13]は，流速に比例した減衰項を与えることにより，ポテンシャル理論の枠組みの中で透過性物体の存在を考慮し得る手法を示している．したがって，そのようなポテンシャル的な取り扱いをスポンジ層の場合にも適用すれば，層内のエネルギー減衰が通常のポテンシャル場での境界要素法による解析と同様の手法で取り扱えることになる．ただし，井島らの研究では透過性物質内の減衰係数 μ を一定としているが，これを本フィルターのスポンジ層にそのまま適用すると，μ の値が不連続になるスポンジ層前面から有意な大きさの反射波が発生することが予想される．そこで，ここでは図—2 に示すように μ の値をスポンジ層内で線形に分布させることにし，スポンジ層前面では $\mu=0$ とした．ただし，後述するように μ の値が空間的に変化する場合には，スポンジ層内で渦ありの流れの成分が発生するが，そのオーダーはポテンシャル成分と比較して無視できる程度である．

以上が，本研究で開発した数値消波フィルターの原理であるが，基本的な考え方としては Israeli ら[14]により提案された一次元波動場の放射条件の考え方に近い．Chapman[15] は，それを線形長波方程式を対象にした差分法による平面二次元波動場の解析に適用し，開境界処理法としての性能を調べている．しかし，本研究のように境界要素法による非線形不規則波動場の解析への適用を念頭においた研究は，現在のところ存在しない．

2.3　無反射造波方法の考え方

境界要素法による非線形波動解析法を「数値波動水槽」として確立するためには，波を発生させつつ解析領域か

らの反射波を吸収させる，いわゆる無反射造波方法を開発することが，もうひとつの重要な課題になる．これまで著者らのひとりは解析領域の一端に造波境界を設け，この境界上に入射波の水平流速を与えることにより波を発生させていた[16]．この方法は，通常の水理実験における造波板をイメージしたものであるが，解析領域内に存在する物体からの反射波が造波境界に到達する以前に計算を終了させる必要があった．したがって，この方法を比較的長い追跡時間を必要とする不規則波の解析に適用することは，現実的に不可能である．

波の非線形性を考慮して無反射造波を行なう際には，反射波成分と発生する波の成分を単純に分離することができない．したがって，再反射が起こらないように造波境界上で流速を与えることは困難であると考えられる．この問題に対して Brorsen ら[10]は，境界から波を発生させるのではなく，解析領域内に鉛直にソースを配置し，発生する波の水平流速に対応した強さのわき出しを与えることにより造波する方法を提案している．この方法では，ソースの両側方向に同じ波が進行することになるが，ソース背後（解析領域から見て外側）に前に述べた消波フィルターを配置しておけば，その反対方向に進行する波のみが発生できることになる．また，ソース上では流速を規定しているわけではないので，解析領域からの反射波はソースで再反射することなく，ソース背後の消波フィルターにより吸収されると考えられる．そこで本研究では，非線形不規則波に適用できる無反射造波方法として，Brorsen らの提案した造波ソースと数値消波フィルターを組み合わせた方法を開発する．

§ 3. スポンジ層内の流体運動

スポンジ層内の流体運動については，流速に比例した抵抗を与える．この場合のスポンジ層内の流体に関する運動方程式は，層内の空隙率を 100% とすると，以下のように表わせる．

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}=-\mathrm{grad}\left[gz+\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}\right]+(\vec{v}\times\vec{\omega})-\mu\vec{v} \qquad \cdots\cdots(3)$$

ただし，$\vec{v}$：流速ベクトル，$\vec{\omega}$：渦度ベクトル($=\mathrm{rot}\,\vec{v}$)，p：圧力，ρ：流体密度，q：流速，μ：減衰係数，g：重力加速度である．ここで，流速ベクトル場$\vec{v}$は，ポテンシャル場 $\mathrm{grad}\phi$(ϕ：速度ポテンシャル)と渦度流速場 $\vec{v}_e$ の和として，次のように表わせる．

$$\vec{v}=\mathrm{gard}\,\phi+\vec{v}_e \qquad \cdots\cdots(4)$$

式(4)を式(3)に代入すると，次式を得る．

$$\mathrm{grad}\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+gz+\frac{p}{\rho}+\frac{q^2}{2}+\mu\phi\right]=\phi\,\mathrm{grad}\,\mu-\frac{\partial\vec{v}_e}{\partial t}+(\vec{v}\times\vec{\omega})-\mu\vec{v}_e \qquad \cdots(5)$$

ここで，渦度流速場 $\vec{v}_e$ について詳しく検討してみる．式(3)の rot をとると，二次元 (x, z) の場合次の形の渦度方程式が導かれる．

$$\frac{\partial\omega_y}{\partial t}=-\mu\omega_y-\mu_x u+\mu_x w \qquad \cdots\cdots(6)$$

ただし，u, w：水平および鉛直方向の流速成分，ω_y：$x-z$ 平面に直交する軸(y軸) まわりの渦度，$\mu_x\equiv\partial\mu/\partial x$, $\mu_z\equiv\partial\mu/\partial z$ である．この式から分かるように，井島ら[13]が扱った μ がスポンジ層内で一定($\mu_x=\mu_z=0$) のケースでは Lagrange の渦定理が成り立ち，任意の時間において $\omega_y=0$ とすることができるため，流体運動は速度ポテンシャルのみで表わせる．これに対して，μ が空間的な勾配を持つ場合には渦ありの流れになる．本研究で用いたスポンジ層では $\mu_z=0$, $\mu_x=$const. であるから，層内の鉛直流速 w により渦度が発生することになる．ここで具体的に問題となるのは，ポテンシャル成分 grad ϕ に対する渦度流速成分 $\vec{v}_e$ の大きさであるので，ここではそのオーダーを調べることにする．

まず，$\mu=$const. とした線形ポテンシャル理論[13]の最低次数の解を用いて，スポンジ層内の鉛直流速を便宜的に次のように置く．

$$w(x^*,\,z)=a_0\sigma\frac{\sinh\bar{k}(h+z)}{\sinh\bar{k}h}e^{-i(\bar{k}x^*-\sigma t)} \qquad \cdots\cdots(7)$$

ただし，x^*：スポンジ層前面を 0 とした水平座標，a_0, σ：スポンジ層に入射する波の振幅および角振動数である．なお，スポンジ層からの波の反射は十分小さいものとして無視する．式(7)の $\bar{k}$ は，以下の分散関係式を満たす複素波数である．

$$\bar{k}h\tanh\bar{k}h=\left(1-i\frac{\mu}{\sigma}\right)\frac{\sigma^2h}{g} \qquad \cdots\cdots(8)$$

$\bar{k}$ の虚数部が，波の振幅の空間的な減衰に対応している．なお，ここではスポンジ層内の平均的な波数として，μ の平均値 $0.5\,\mu_{max}$ に対応した $\bar{k}$ を用いることにする．式(7)を渦度方程式(6)に代入し，渦度 ω_y を求めると以下のようになる．

$$\omega_y(x^*,\,z)=a_0\mu_x\frac{\sigma}{\mu_x x^*+i\sigma}\,\frac{\sinh\bar{k}(h+z)}{\sinh\bar{k}h}e^{-i(\bar{k}x^*-\sigma t)} \qquad (9)$$

ここで，渦糸の考え方に基づいて，渦度 ω_y に対応した水面上の流速ベクトル $\vec{v}_e(x^*,\,0)=(u_e,\,w_e)$ を求めると，以下のようになる．

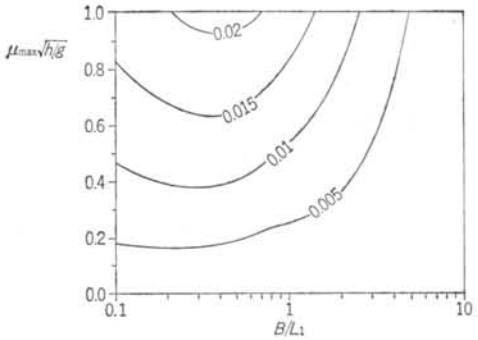
$$\begin{Bmatrix}u_e\\w_e\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^B\int_{-h}^0\frac{\omega_y(\xi,\,\zeta)}{(x^*-\xi)^2+\zeta^2}\begin{Bmatrix}\zeta\\x^*-\xi\end{Bmatrix}d\zeta d\xi \qquad \cdots(10)$$

上式に式(9)を代入すると次式を得る．

$$\begin{Bmatrix} u_e \\ w_e \end{Bmatrix} = \frac{\mu_x}{2\pi} a_0 e^{i\omega t} \int_0^B \frac{\sigma}{\mu_x \xi + i\sigma} e^{-i\bar{k}\xi} \begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} d\xi \qquad \cdots\cdots(11)$$

$$\begin{Bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{Bmatrix} = \int_{-h}^{0} \frac{1}{(x^*-\xi)^2+\zeta^2} \frac{\sinh \bar{k}(h+\zeta)}{\sinh \bar{k}h} \begin{Bmatrix} \zeta \\ x^*-\xi \end{Bmatrix} d\zeta \qquad (12)$$

式(11)を用いて，渦に伴って発生する流速 $\vec{v}_e$ の振幅を $0 \leq x^* \leq B$ の範囲で計算し，その最大値 $|\vec{v}_e|_{\max}$ と入射波の流速振幅 $|\vec{v}_p| = a_0\sigma/\tanh k_0 h$（$k_0$：入射波の波数）との比を求めた．**図—3**は，後に示す**図—5**の結果に対応した計算条件のもとでの $|\vec{v}_e|_{\max}/|\vec{v}_p|$ を示したものである．この図から，$\vec{v}_e$ の振幅は入射波の流速振幅に比べて極めて小さく，現実的な計算範囲ではスポンジ層内の流体運動を渦なしと仮定しても，実用上は問題がないものと考えられる．そこで，以下では $\vec{v}_e = 0$ としたポテンシャル理論に基づいて議論を進めることにする．



図—3 スポンジ層内の流速場における渦度成分 $|\vec{v}_e|_{\max}$ とポテンシャル成分 $|\vec{v}_p|$ の比 $(B/h=10.0)$

§4. 線形理論に基づく数値消波フィルターの基本性能の検討

4.1 基礎方程式と境界条件

まず，線形ポテンシャル理論に基づく周波数領域の解析により，数値消波フィルターからの波の反射率の基本性能を調べる．**図—4**のように座標系を定義し，速度ポテンシャル ϕ を次のように置く．

$$\phi(x,\ z,\ t) = \frac{gH_0}{2\sigma} \varphi(x,\ z) e^{i\omega t} \qquad \cdots\cdots(13)$$

ただし，H_0 は入射波の波高である．**図—4**に示すように，流体領域をスポンジ層前面の領域 Ω_1，スポンジ層内 Ω_2，スポンジ層背後の領域（解析領域外）Ω_0 に分け，それぞれの領域でのポテンシャルを φ_1, φ_2, φ_0 と表わす．φ_1 と φ_2 に関する基礎方程式，底面条件および Ω_1 での自由表面条件は，通常の線形理論と同様で，以下に示すとおりである．

$$\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{in } \Omega_i),\ (i=1,\ 2) \qquad \cdots\cdots(14)$$

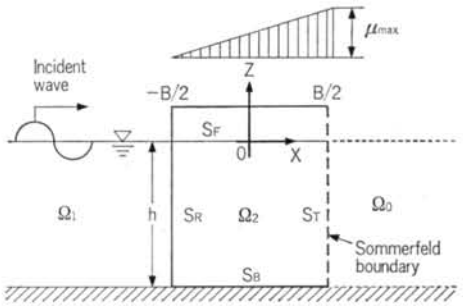
$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial z} = 0 \qquad (\text{on } S_B),\ (i=1,\ 2) \qquad \cdots\cdots(15)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\sigma^2}{g}\varphi_1 = 0 \qquad (\text{on } S_F) \qquad \cdots\cdots(16)$$

一方，スポンジ層内における圧力方程式は，$\vec{v}_e = 0$ として式(5)を積分することにより以下のように表わせる．

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{p}{\rho}(\nabla\phi_2)^2 + gz + \mu\phi_2 - \int_{s_0}^{s} \frac{\partial \mu}{\partial s} \phi_2 ds = 0 \ (\text{in } \Omega_2) \qquad (17)$$

左辺の最後の積分は基準点（s_0）からの線積分を表わしており，この項が μ の領域内での変化に対応している．



図—4 線形波動場での座標系と記号の定義

ここで $\mu_t = 0$ とし，さらに基準点をスポンジ層前面の水面上に取り，線積分を水表面に沿って行なうことにすると，スポンジ層内の水面での力学的境界条件式として次式が得られる．

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\phi_2)^2 + g\eta + \mu\phi_2 - \int_{-\frac{B}{2}}^{x} \mu_x \phi_2 \Big|_{\text{on } S_F} dx = 0$$

$$(\text{on } S_F) \qquad \cdots\cdots(18)$$

ただし，η は水面変動量である．式(18)の第2項を非線形項として無視し，さらに運動学的条件，

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial z} = \frac{\partial \eta}{\partial t} \quad (\text{on } S_F) \qquad \cdots\cdots(19)$$

を用いて η を消去すると，Ω_2 における線形自由表面条件として最終的に次式を得る．

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = \frac{\sigma^2}{g}\left(1 - \frac{i\mu}{\sigma}\right)\varphi_2 + \frac{i\sigma}{g}\int_{-\frac{B}{2}}^{x} \mu_x \varphi_2 \Big|_{z=0} dx \quad (\text{on } S_F) \qquad (20)$$

また，スポンジ層前面の境界 S_R と背後の境界 S_T では，流速および圧力の連続性から次の境界条件を満たす必要がある．

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x} \quad (\text{on } S_R) \qquad \cdots\cdots(21)$$

$$\varphi_1 = \varphi_2 \qquad (\text{on } S_R) \qquad \cdots\cdots(22)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \quad (\text{on } S_T) \qquad \cdots\cdots(23)$$

$$\varphi_0=\left(1-\frac{i\mu}{\sigma}\right)\varphi_2+\frac{i}{\sigma}\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}\mu_x\varphi_2\Big|_{x=0}dx \quad (\text{on } S_T) \quad \cdots(24)$$

ここで，ϕ_0 について位相速度を$\sqrt{gh}$としたSommerfeld型の放射条件，

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{gh}}\frac{\partial\phi_0}{\partial t} \quad \cdots(25)$$

を S_T で与えるものとすると，式(23)～式(25)から φ_2 に関する S_T での境界条件として，次式が導かれる．

$$\frac{\partial\varphi_2}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{gh}}\left\{(\mu+i\sigma)\varphi_2-\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}\mu_x\varphi_2\Big|_{x=0}dx\right\} \quad (\text{on } S_T) \quad \cdots(26)$$

4.2 ハイブリッド法の適用

スポンジ層前面での流体領域Ω_1では，式(14)～式(16)と放射条件を満足するφ_1の一般解が，次のように与えられる．

$$\varphi_1(x,z)=\left\{e^{-ik_0(x+\frac{B}{2})}+A_0e^{ik_0(x+\frac{B}{2})}\right\}\frac{\cosh k_0(h+z)}{\cosh k_0h}+\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{k_n(x+\frac{B}{2})}\frac{\cos k_n(h+z)}{\cos k_nh} \quad (\text{in } \Omega_1) \quad \cdots(27)$$

ただし，A_0，$A_n(n=1, 2, \cdots)$：複素未定係数，k_0，k_n：波数および固有値（$k_0\tanh k_0h=-k_n\tan k_nh=\sigma^2/g$）である．式中右辺の第1項は入射波のポテンシャルを表わしている．また，消波フィルターからの反射率K_Rは，未定係数を用いて次のように求められる．

$$K_R=|A_0| \quad \cdots(28)$$

ここで，スポンジ層内の流体領域にグリーン公式を適用すると，φ_2に関する以下の積分方程式を得る．

$$\alpha^*(P)\varphi_2(P)+\int_S\left\{\varphi_2\frac{\partial G}{\partial n}-\frac{\partial\varphi_2}{\partial n}G\right\}ds=0 \quad \cdots(29)$$

$$\left.\begin{aligned}&G(P,\ Q)=\ln(1/r)+\ln(1/r')\\&r=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(z_P-z_Q)^2}\\&r'=\sqrt{(x_P-x_Q)^2+(z_P+z_Q+2h)^2}\end{aligned}\right\} \quad \cdots(30)$$

ただし，$P(x_P,\ z_P)$，$Q(x_Q,\ z_Q)$：スポンジ層を取り囲む境界線S上の点，n：境界面での外向き法線，$\alpha^*(P)$：点Pにおいて境界線がなす内角を$\alpha(P)$とするとき，$\alpha^*(P)=\alpha(P)(z_P\neq-h)$，$\alpha^*(P)=2\alpha(P)(z_P=-h)$である．式(29)に各境界線上での境界条件，すなわち式(15)，式(20)，式(21)，式(22)，式(26)を代入すると次式を得る．

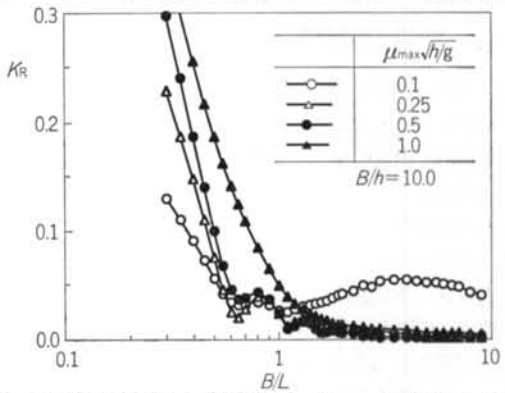
$$\alpha^*(P)\varphi_2(P)+\int_{S_F}\varphi_2\frac{\partial G}{\partial z}ds+\int_{S_T}\varphi_2\frac{\partial G}{\partial x}ds-\frac{\sigma^2}{g}\int_{S_F}\left(1-\frac{i\mu}{\sigma}\right)\varphi_2Gds-\frac{i\sigma}{g}\int_{S_F}\int_{-\frac{B}{2}}^{x}\mu_x\varphi_2\Big|_{x=0}dxGds+\frac{1}{\sqrt{gh}}\left\{\int_{S_T}(\mu+i\sigma)\varphi_2Gds-\int_{-\frac{B}{2}}^{\frac{B}{2}}\mu_x\varphi_2\Big|_{x=0}dx\int_{S_I}Gds\right\}-\int_{S_R}\varphi_1\frac{\partial G}{\partial x}ds+\int_{S_R}\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}Gds=0 \quad \cdots(31)$$

式(31)左辺の最後の2項に式(27)を代入すると，これらの積分項は未定係数$A_n(n=0,\ 1, \cdots\cdots)$を用いて表わすことができる．線形要素を用いてこの積分方程式を空間的に離散化し，点Pを各節点に一致させることにより，S_FとS_Tの節点におけるφ_2および係数A_nを未知数にした複素連立一次方程式が得られる．なお，式(27)に示すようにφ_1が無限級数で表わされることに対応して，未定係数A_nの数も無限になるが，十分な個数をとればこれを有限個で打ち切っても計算精度上は問題がない[17]．したがって，ここではYuen ら[18]のハイブリッド法と同様に，未定係数A_nの数をS_Rにおける節点の数と一致させることにした．これにより，連立方程式の数と未知数の数が一致し，これを解くことにより得られた未定係数の値から，式(28)を用いて反射率が計算できる．

井島ら[13]は，減衰係数μを一定とした透過性構造物による波の反射率と透過率をポテンシャル接続法により解析的に求めている．本解析法を用いて井島らと同じ条件のもとに計算を行なった結果，本解析結果は井島らの解と良く一致することが確認された．なお，計算におけるメッシュ幅は，入射波長L_1の1/20以下に設定した．

4.3 反射率の基本特性

図—5は，線形定常波動場での本消波フィルターの反射率K_Rの周期依存特性を示したものである．横軸にはスポンジ層の幅と波長の比B/Lをとり，μの最大値μ_{max}を変化させている．μ_{max}が最も大きい$\mu_{max}\sqrt{h/g}=1.0$の場合のK_RはB/Lに対して単調に減少するが，B/Lの小さい長周期側では他のケースに比べて大きくな

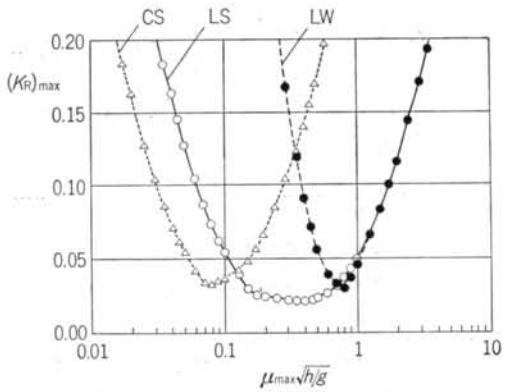


図—5 線形波動場での数値消波フィルターの反射率の周期依存特性（$B/h=10$）

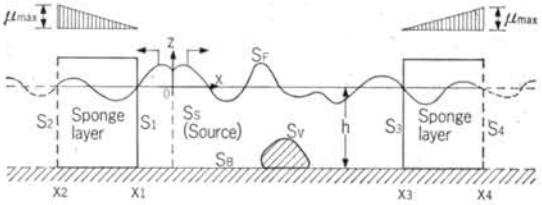
っている．これは，スポンジ層内の流体抵抗に伴う反射が原因である．したがって，μ_{max} を小さくして層内の流体抵抗を減少させると，スポンジ層背後に付加した Sommerfeld 型境界のエネルギー吸収効果で長周期側の反射率が小さくなる．一方，μ_{max} が最も小さい $\mu_{max}\sqrt{h/g}=0.1$ の場合において短周期側の反射率が高くなっているのは，Sommerfeld 型境界で設定した位相速度 $\sqrt{gh}$ と実際の波速との不整合による Sommerfeld 型境界からの反射の影響である．ただし，$\mu_{max}\sqrt{h/g}=0.25$ および 0.5 の場合 $1\leq B/L$ の広い範囲で反射率が低く，この範囲の最大反射率は2％程度である．このことから，減衰係数を適切な値に設定すれば，広い周期帯の入射波に対して実用上十分な消波ができることが分かる．

図—6 は，μ_{max} による $1\leq B/L$ の最大反射率 $(K_R)_{max}$ の変化を示したものである．図中，LS が μ をスポンジ層内で線形に分布させ，スポンジ層背後に Sommerfeld 型境界を用いた本消波フィルターの場合，CS は μ の分布を一定にした場合，LW は Sommerfeld 型境界を用いずに壁面境界（$\partial\varphi_2/\partial x=0$ (on S_T)）を用いた場合を表わしている．**図—6** から，$(K_R)_{max}$ が最小になる μ_{max} の値は各ケースで異なるが，本消波フィルターの場合には μ_{max} の広い範囲で $(K_R)_{max}$ が低く，その最小値は μ の分布を一定した場合よりも 60％程度，Sommerfeld 型境界を用いない場合よりも40％程度小さくなるのが分かる．

以上，線形定常波動場における周波数領域での解析結果から，スポンジ層と Sommerfeld 型の吸収境界を組み合わせた本消波フィーターは広い周期帯で良好な性能を有しており，したがって複数の波速成分を含む入射波に対しても有効であることが示された．



図—6 減衰係数による $1\leq B/L$ の最大反射率の変化（$B/h=10$）



図—7 数値波動水槽における座標系と記号の定義

§ 5. 非線形波動解析への応用

5.1 基礎方程式と境界条件

本研究では，大山[16]が提案した境界要素法による二次元非線形波動場の解析に，消波フィルターと造波ソースを組み込むことにする．**図—7** に示すような，二次元水路内の流体運動を速度ポテンシャル理論に基づいて考える．水路の両側には数値消波フィルターを置き，水路内に造波ソースを鉛直に配置する．なお，図中の S_V は，水路内に置かれた任意形状物体の表面を表わしている．

図に示されるように，各スポンジ層の前面 S_1，S_3 における μ の値を 0 とするとき，これらの面でポテンシャル値は連続的に変化することになる．したがって，スポンジ層を含めた流体領域 Ω（S_F，S_B，S_V，S_2，S_4 で囲まれた領域）におけるポテンシャルを $\phi(x,\ z,\ t)$ と置く．ϕ に関する基礎方程式は，領域内にわき出しソースが存在することに対応して，以下のポアソン方程式になる[10]．

$$\nabla^2\phi=q^* \quad (\text{in } \Omega) \qquad \cdots\cdots(32)$$

ただし，q^* は造波ソースにおける流量密度を表わしており，造波ソース以外では 0 である．Ω を取り囲む境界面における境界条件は，先に述べた線形理論の場合と同じ手順で導くことができ，これらは以下のように表わせる．

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}(\nabla\phi)^2+g\eta+\mu\phi-\int_{x_1}^{x}\mu_x\phi\Big|_{\text{on } S_F}dx=0 \quad (\text{on } S_F) \qquad \cdots\cdots(33)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=n_z\frac{\partial\eta}{\partial t} \quad (\text{on } S_F) \qquad \cdots\cdots(34)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0 \quad (\text{on } S_B,\ S_V) \qquad \cdots\cdots(35)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=\frac{1}{\sqrt{gh}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mu\phi+\int_{x_2}^{x_1}\mu_x\phi\Big|_{\text{on } S_F}dx\right) \quad (\text{on } S_2) \qquad (36)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{gh}}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mu\phi-\int_{x_3}^{x_4}\mu_x\phi\Big|_{\text{on } S_F}dx\right) \quad (\text{on } S_4) \qquad (37)$$

ただし，n_z は外向き単位法線ベクトルの z 成分である．式(33)において $\mu=\mu_x=0$ とすれば，通常の力学的境界条件に一致する．したがって，この式はスポンジ層外の流

体領域まで含めた自由表面条件を表わしていることになる．また，スポンジ層背後の境界 S_2，S_4 における境界条件式(36)，(37)は，式(22)～式(26)と同じ手順で導かれる．

5.2 境界積分方程式

式(32)のポアソン方程式に対応した積分方程式は，グリーンの公式により以下のように表わせる[19]．

$$\alpha^*(P)\phi(P)+\int_S\left\{\phi\frac{\partial G}{\partial n}-\frac{\partial\phi}{\partial n}G\right\}ds+\iint_\Omega q^*G\,d\Omega=0 \quad (38)$$

ただし，α^*，F の定義は式(29)と同様であり，グリーン関数 G は式(30)に示したとおりである．ここでは，q^* は造波ソース以外では0であることから，ディラックのデルタ関数を用いて次のように表わせる．

$$q^*(x,\ z,\ t)=U^*(z,\ t)\delta(x-x_s) \quad \cdots\cdots(39)$$

ただし，x_s は造波ソースにおける x 座標（ここでは，$x_s=0$）である．式(39)と自由表面での力学的条件以外の境界条件式(34)～(37)を式(38)に代入すると，次式が得られる．

$$\begin{aligned}&\alpha^*(P)\phi(P)+\int_{S_F\cup S_2\cup S_4\cup S_V}\phi\frac{\partial G}{\partial n}ds-\int_{S_F}n_z\frac{\partial\eta}{\partial t}G\,ds\\&+\frac{1}{\sqrt{gh}}\int_{S_2}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mu\phi+\int_{x_2}^{x_1}\mu_x\phi\Big|_{\text{on }S_F}dx\right)G\,ds\\&+\frac{1}{\sqrt{gh}}\int_{S_4}\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}+\mu\phi-\int_{x_3}^{x_4}\mu_x\phi\Big|_{\text{on }S_F}dx\right)G\,ds\\&+\int_{S_S}U^*G\,ds=0 \quad \cdots\cdots(40)\end{aligned}$$

また，自由表面で与えられる圧力方程式については，重みつき残差法を適用する．式(33)の第2項に式(34)を代入し，両辺に重み関数 ω をかけて S_F 上で積分すると，以下の積分方程式を得る．

$$\begin{aligned}&\int_{S_F}\omega\left[\frac{\partial\phi}{\partial t}+\frac{1}{2}\left\{(n_z)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial\phi}{\partial s}\right)^2\right\}+g\eta+\mu\phi\right.\\&\qquad\left.-\int_{x_1}^{x}\mu_x\phi\Big|_{\text{on }S_F}dx\right]ds=0 \quad \cdots\cdots(41)\end{aligned}$$

ただし，s は自由表面における接線方向を表わす．

式(40)，式(41)を空間的に離散化し，式(41)については重み関数の任意性を考慮すると，境界面上の節点における ϕ，η とこれらの時間偏微分値を未知数とした連立方程式が導かれる．これらの離散化方程式を各時間ステップで解くことにより，水路内の流体運動の時間発展が求められる．以上の手順の詳細については，参考文献20）を参照されたい．

ここで，造波ソースでの流量密度 U^* の与え方について述べておく．U^* と発生させる波の流速との関係は，Brorsen ら[10]により示されたとおりであり，次のように表わせる．

$$\int_{S_S}U^*ds=2\int_{-h}^{\eta_0}U\,dz \quad \cdots\cdots(42)$$

ただし，U，η_0 は発生させる波の水平流速および水面変動量である．右辺の係数の「2」は，波がソースの両側方向に進行することに対応している．ここで，反射波が造波ソースに返らない状態では，式(42)の両辺の積分範囲は一致するため，$U^*=2U$ とすればよい．しかし，反射波が造波ソースに返っている状態では，ソース上の水面変動量は η_0 とは異なるため，$U^*=2U$ とすることはできない．そこで本研究では，造波ソース上の U^* の積分値が反射波が返らない状態と等しく，かつその分布形状が相似になるように U^* を与えることにした．これにより，造波ソースにおける節点上の U_j^* は以下のように与えられる．

$$U_j^*=2U_j\frac{\eta_0+h}{\eta_S+h} \quad \cdots\cdots(43)$$

ただし，η_S は造波ソースの実際の水面変動量である．

§ 6. 非線形波動場での数値消波フィルターの消波性能に関する検討

6.1 非線形規則波に対する消波性能

まず，両端に消波フィルター，中央に造波ソースを設けた一定水深水路中で非線形規則波（クノイド波，ストークス波）を発生させ，これらの伝播波形を理論解と比較することにより，造波方法の妥当性と非線形波動場における本消波フィルターの性能を調べた．水路の長さは，消波フィルターを含めていずれも $4L_1$（L_1：線形理論から得られる波長）とし，両側の消波フィルターの幅はそれぞれ L_1 とした．**表—1** に，発生する波の条件を示す．ただし，T と H_0 は波の周期と波高，Δx は自由表面での節点間の水平方向長さである．μ_{max} としては，**図—6** に示した結果で $(K_R)_{max}$ がほぼ最小になる値を設定した．解析の初期条件は静水状態（$\phi=\eta=0$）を設定し，$T\sqrt{g/h}=7$ の場合ストークス波の第5次近似解[21]，$T\sqrt{g/h}=15$ の場合クノイド波の第3次近似解[22]に対応したわき出しを造波ソースで与えた．ストークス波の流速については第2定義を用いた．

図—8 (a)～(c)は，波の発生から50周期後の時間におけ

	$T\sqrt{g/h}$	H_0/h	適用理論	$\Delta x/h$	$\Delta t\sqrt{g/h}$	$\mu_{max}\sqrt{h/g}$
Case1	7	0.2	ストークス波	0.253	0.219	0.25
Case2	15	0.2	クノイド波	0.811	0.625	
Case3		0.4		0.608	0.417	

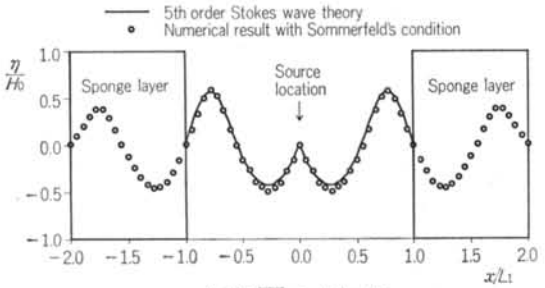
表—1 計算条件

る水路内の水面形状を示したものであり，図中の実線は各波動理論の近似解を表わしている．なお，$T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.2$ の場合については，参考のためスポンジ層背後でSommerfeld境界の代わりに壁面境界を用いた結果（$\mu_{max}\sqrt{h/g}=0.8$）についても示してある．これらの図から分かるように，本解析結果と各近似解との一致はいずれの場合も良好であり，消波フィルターからの反射の影響は極めて小さい．また，波の追跡時間がかなり長いにもかかわらず，安定した解析結果が得られている．以上の結果から，本消波フィルターの消波効率は非線形波動場においても良好であることが分かる．

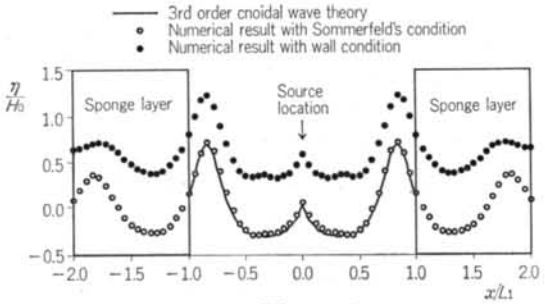
クノイド波の場合には，波の進行に伴って質量輸送が起こる．このため，**図—8**(b)に示すように，スポンジ層背後で壁面境界を用いた場合には，水路内の平均水位が時間とともに上昇してしまう．これに対して，本消波フィルターを用いた結果には平均水位の時間変化は見られない．そこで，これを詳しく調べるために，スポンジ層背後からの鉛直平均質量輸送速度を求め，発生した波の質量輸送速度と比較する．スポンジ層背後面 S_4 からの鉛直平均質量輸送速度 $\bar{u}(t)$ は，以下のように求められる．

$$\bar{u}(t)=\frac{1}{Th}\int_{t-T}^{t}\int_{-h}^{\eta}\left.\frac{\partial\phi}{\partial x}\right|_{\text{on } S_4}dzdt \qquad \cdots\cdots(44)$$

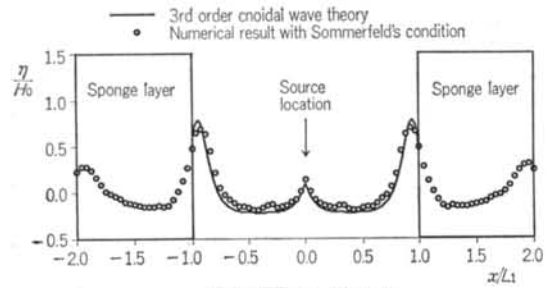
なお，S_4 上の $\partial\phi/\partial x$ は式(43)から求められる．**図—9**は $T\sqrt{g/h}=15$ のクノイド波の場合について，$\bar{u}$ の時間変化を示したものである．なお，図中にはFentonの第3次近似解[22]も示してある．波を発生してから数周期程度は $\bar{u}$ は時間的に変動するが，10周期以降はほぼ一定になり定常状態が得られているのが分かる．定常状態が得られてからの解析結果は，第3次近似解をわずかに下回っているが，これは造波ソースで与えた流量密度が厳密には質量輸送速度の第3次解と対応していないことによるものと考えられる．以上の結果から分かるように，本解析法では質量輸送速度成分も領域外へ透過させることができる．このことは，閉鎖水槽内で行なわざるを得ない室内実験に比べて，より実海域の現象に近い状況が設定できるという意味でひとつの有利な点になっている．



(a) $T\sqrt{g/h}=7$, $H_0/h=0.2$



(b) $T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.2$

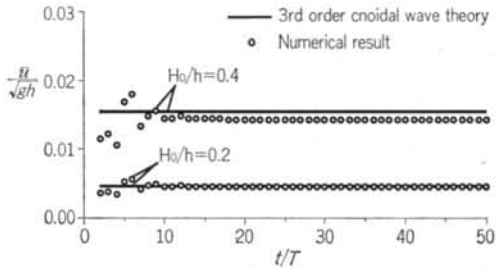


(c) $T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.4$

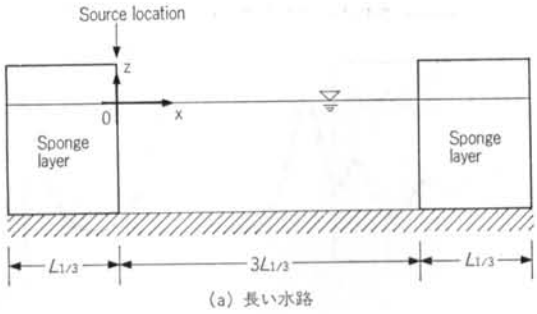
図—8 非線形規則波の空間波形に関する解析解との比較 ($t/T=50$)

6.2 非線形不規則波に対する消波性能

次に，**図—10**に示すような長さの異なる2つの水路中に複数の周期成分を含む波を発生させ，これらの結果を比較することにより，非線形不規則波に対する本消波フィルターの消波効果を調べた．図中の $L_{1/3}$ は有義波長である．なお，ここではブレットシュナイダー・光易のスペクトルに対応した不規則波の流速を，造波境界で与えることにした．その場合，有義波周期 $T_{1/3}$ の1/3以下の短周期成分はカットすることにし（エネルギー的には1.3%カット），それよりも長周期側のスペクトルを等分割して得た50個の成分波（正弦波）の流速を重ね合わ

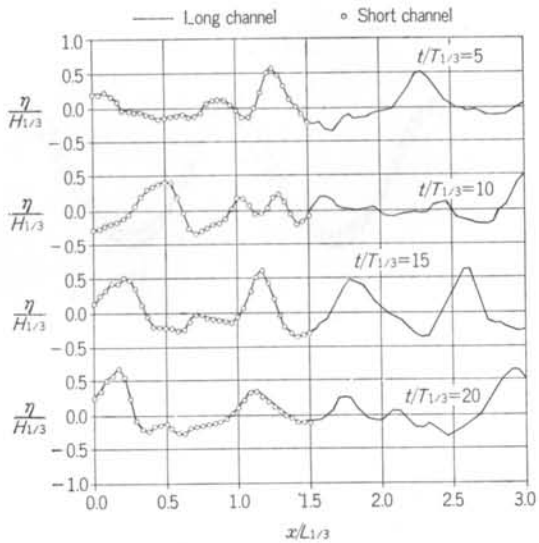


図—9 スポンジ層背後からの鉛直平均質量輸送速度 ($T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.2$)



(a) 長い水路

図—10 非線形不規則波の計算で用いた水路



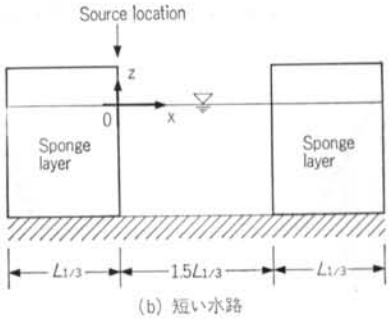
図—11 非線形不規則波の空間波形（$T_{1/3}\sqrt{g/h}=10$, $H_{1/3}/h=0.2$）

せた．

図—11は，$T_{1/3}\sqrt{g/h}=10$，$H_{1/3}/h=0.2$（$H_{1/3}$：有義波高）の不規則波を発生させたときの$5T_{1/3}$ごとの空間波形を示したものである．図中，実線が長い水路，○が短い水路の場合の結果を表わしている．なお，図中には数値消波フィルター内の水面波形は示していない．また，解析におけるΔxとΔtはそれぞれ$\Delta x/h=0.39$，$\Delta t\sqrt{g/h}=0.25$と設定した．**図—11**の結果に示されるように，波の追跡時間がかなり長いにもかかわらず両者は極めて良く一致している．このことから，本消波フィルターが非線形不規則波に対しても十分な消波効率を有していることが分かる．

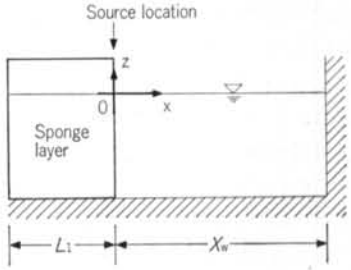
§7. 無反射造波性能に関する数値実験

§6. で示した数値実験では，解析領域からの反射波が造波ソースに返らない場合を対象にしたが，ここでは**図—12**に示すように水路の片側に不透過な鉛直壁を置き，この壁からの反射波を造波ソースに入射させて，その透過特性を見ることにより無反射造波システムとしての性能を調べた．ただし，造波する波としては**表—1**に示したものと同じ波を用いることにした．

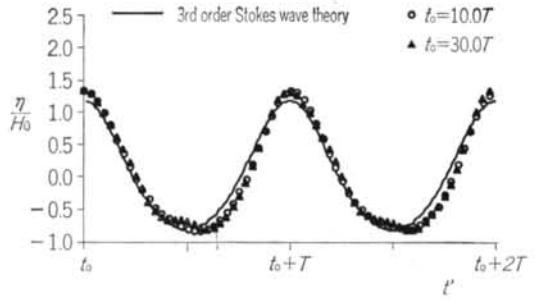


(b) 短い水路

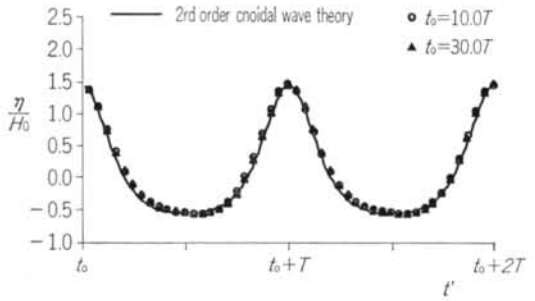
図—13(a)～(c)は，造波ソースから壁面までの距離X_Wを$X_W=2.25L_1$としたときの壁面での水面の時間波形を各ケースについて示したものである．なお，図中のt'は第1波目の波の峰が壁面に到達してからの時間を表わしており，図には10周期後と30周期後の解析結果を示してある．また，各図中には最高水位と最低水位の差を入射波高の2倍と設定したときの重複波の近似解も参考のため示してある．これらの図から分かるように，各ケースとも10周期後と30周期後の結果にはほとんど差がなく，計算は非常に安定している．また，近似解との一致も比較的良いことから，造波ソースからの再反射の影響は十分小さいと考えられる．なお，厳密には非線形重複波の波高は入射波高の2倍，すなわち近似解で用いた波高よりも大きくなる．このため，特に$T\sqrt{g/h}=15$，$H_0/h=0.4$のケースでは最大水位が近似解を若干上回る結果になっている．**図—14**は，$T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.2$のケースにおいて，壁面での水位が最大になる$t'/T=10.0$および$t'/T=30.0$での空間波形を示したものである．いずれの解析結果とも近似解と良く一致しており，造波ソース近傍においても波形の乱れは見られない．以



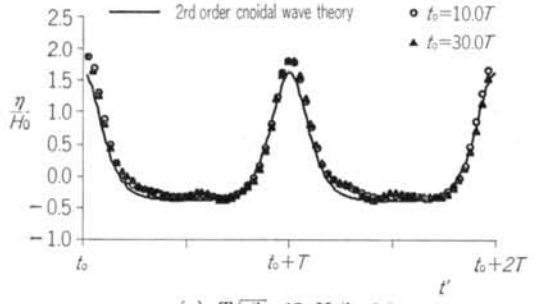
図—12 無反射造波機能に関する数値実験で用いた水路



(a) $T\sqrt{g/h}=7$, $H_0/h=0.2$

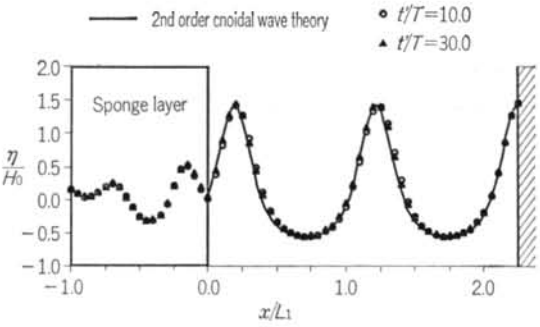


(b) $T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.2$

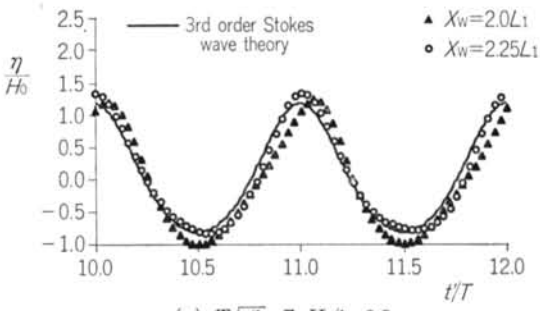


(c) $T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.4$

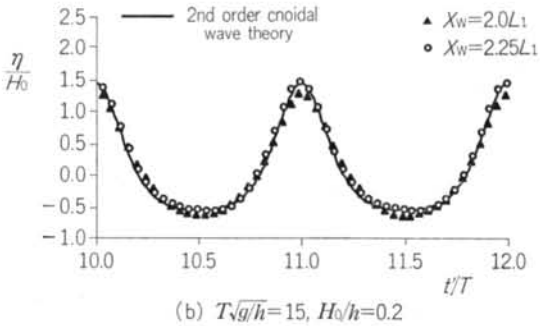
図—13 壁面での水面変動量



図—14 非線形重複波の空間波形($T\sqrt{g/h}=15$, $H_0=0.2$)



(a) $T\sqrt{g/h}=7$, $H_0/h=0.2$



(b) $T\sqrt{g/h}=15$, $H_0/h=0.2$

図—15 壁面での水面変動量の解析結果に及ぼす造波ソースの位置の影響

上の数値解析結果から，本解析法で用いた造波方法では解析領域からの反射波を効率良く吸収でき，実用上十分な無反射造波性能を有していることが示された．

図—15(a)，(b)は，造波ソースと鉛直壁の距離 X_W を $2.0L_1$ としたときの壁面での水面波形を示している．$X_W=2.25L_1$ の場合に比べて近似解との一致は悪くなり，$T\sqrt{g/h}=7$ のケースでは波形の対称性が崩れているのが分かる．このように，水路長が波長の整数倍に近くなると計算精度が相対的に悪くなる．これは，造波ソース背後からのわずかな再反射により励起された，水路内での副振動の影響によるものと考えられる．ただし，$X_W=2.25L_1$ の結果に見られるように，造波ソースの位置をわずかにずらせばこのような問題は生じない．

§ 8. おわりに

境界要素法による非線形波動解析法は，任意の波動場が取り扱える効率的な解析法として位置づけられている．本研究では，非線形かつ不規則な任意の波動を対象にした開境界処理法を新たに開発することにより，この解析法をいわゆる「数値波動水槽」として確立することを試みた．以下，本研究で得られた主な結論を述べる．

(1)非線形不規則波をも取り扱える開境界処理法として波をエネルギー的に吸収するスポンジ層と，Sommerfeld 境界を組み合わせた「数値消波フィルター」を開発した．さらに，解析領域内に設定した造波ソースと本

消波フィルターを組み合わせることにより，造波境界側での開境界処理，すなわち無反射造波システムを開発した．

(2)本消波フィルターからの反射率の基本特性を調べるために線形理論に基づく解析を行なった．その結果，スポンジ層内の減衰係数を適切に設定すれば，広い周期帯域で良好な消波効率が得られることが明らかになった．

(3)境界要素法による非線形波動場の時間領域の解析モデルに本消波フィルターと造波ソースを組み込み，非線形波に対する本消波フィルターの消波効率と無反射造波性能を数値実験により調べた．本消波フィルターは，非線形規則波および複数の波速成分を持つ非線形不規則波に対して十分な消波効率が得られること，長時間発展の解析に対しても安定した結果を得ることができること，波の進行に伴って発生する質量輸送速度についても実海域の状況に近い形で考慮できることが確かめられた．また，造波ソースからの再反射の影響はほとんどなく，水路長が波長の整数倍になるような共振周期を除けば，安定した精度の高い解析結果が得られることが示された．

(4)以上の系統的な数値実験により，本研究で開発した開境界処理法が任意の波動場を対象にした「数値波動水槽」に十分適用できることが示された．

＜参考文献＞

1) M. S. Longuet-Higgins and E. D. Cokelet : "The Deformation of Steep Waves on Water, I : a Numerical Method of Computation" Proceedings of Royal Society of London, Ser. A, Vol. 350 (1976) pp. 1～26

2) M. de St Q. Isaacson : "Nonlinear-wave Effects on Fixed and Floating Bodies" J. of Fluid Mechanics, Vol. 120 (1982) pp. 267～281

3) W. Kioka : "Numerical Analysis of Breaking Waves in a Shallow Water" Coastal Engineering in Japan, Vol. 26 (1983) pp. 11～18

4) S. K. Kim, P. L-F. Liu and J. A. Ligget : "Boundary Integral Equation Solutions for Solitary Wave Generation, Propagation and Run-up" Coastal Engineering, Vol. 7 (1983) pp. 299～317

5) 大山　巧："クノイド波の斜面遡上の境界要素解析" 土木学会論文集　第381号 (1987年) pp. 189～198

6) 大山　巧："境界要素法による非線形回折波力の一解析法" 土木学会論文集　第411号 (1989年) pp. 197～205

7) M. J. Cooker, D. H. Peregrine and J. W. Dold : "The Interaction Between a Solitary Wave and Submerged Semicircular Cylinder" J. of Fluid Mechanics, Vol. 215 (1990) pp. 1～22

8) R. K.-G. Chan and F. W.-K. Chan : "Numerical Solution of Transient and Steady Free Surface Flows about a Ship of General Hull Shape" Proceedings of 13th Symposium on Naval Hydrodynamics (1980) pp. 257～276

9) S. M. Yen and D. R. Hall : "Implementation of Open Boundary Conditions for Nonlinear Free-surface Wave Problems" Proceedings 3rd International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics (1981) pp. 167～177

10) M. Brorsen and J. Larsen : "Source Generation of Nonlinear Gravity Waves with the Boundary Integral Equation Method" Coastal Engineering, Vol. 11 (1987) pp. 93～113

11) I. Orlanski : "A Simple Boundary Condition for Unbounded Hyperbolic Flows" J. of Computational Physics, Vol. 21 (1976) pp. 251～269

12) L. H. Kantha, A. F. Blumberg and G. L. Mellor : "Computing Phase Speeds at Open Boundary Conditions" J. of Hydraulic Engineering, ASCE, Vol. 116 (1990) pp. 592～597

13) 井島武士・江口奉彦・小林　彰："透過性防波堤と岸壁に関する研究"　第18回海岸工学講演会論文集 (1971年) pp. 121～130

14) M. Israeli and S. A. Orszag : "Approximation of Radiation Boundary Conditions" J. of Computational Physics, Vol. 41 (1981) pp. 115～135

15) D. C. Chapman : "Numerical Treatment of Cross-shelf Open Boundaries in a Barotropic Coastal Ocean Model" J. of Physical Oceanography, Vol. 15 (1985) pp. 1060～1075

16) 大山　巧："数値波動水槽によるクノイド波の変形の解析"　第33回海岸工学講演会論文集 (1986年) pp. 99～103

17) 井島武士："最近の波動理論における境界値問題の解法とその応用" 1971年度水工学に関する夏期研修会講義集，B-1 (1971年)

18) M. M. F. Yuen and F. P. Chau : "Wave Loading on Axisymmetric Bodies using Axisymmetric Hybrid Integral Equation Method" Ocean Engineering, Vol. 14, No. 1 (1987) pp. 51～69

19) C. A. Brebbia and S. Walker : "Boundary Element Techniques in Engineering" Newnes-Butterworths (1980)

20) 大山　巧・灘岡和夫："非線形不規則波動場を対象とした数値波動水槽の開発" 土木学会論文集（投稿中）
21) J. D. Fenton : "A Fifth-order Stokes Theory for Steady Waves" J. of Waterway, Port, Coastal and Ocean Engineering, ASCE, Vol. 111 (1985) pp. 216～234
22) J. D. Fenton : "A High-order Cnoidal Wave Theory" J. of Fluid Mechanics, Vol. 94 (1979) pp. 129～161