

弾性地盤上における基礎および構造物の振動（その1）

—基礎と地盤に関する動力学的研究—

山原 浩

§1. はじめに

本研究は、まず構造物の最も単純な形態として、機械基礎を想定し、特に地盤との関連を中心に理論解析を行ない、その成果を徐々に一般の構造物の形態に応用したものである。

機械基礎は外力が機械の定常回転によって与えられる場合が多く、調和波形の連続波動として表現される。そのため、数学的な取り扱いが非常に単純化され、人工的な諸実験が比較的容易であるので、理論機構の確認に好適な模型の役割を果している。

その結果、地盤が半無限なるが故に持つ見かけの減衰効果が、基礎または構造物の運動に著しく影響することがわかった。

そして、運動方程式における式の形を交流理論と対照し、波動現象によって生ずる見かけの減衰抵抗を、波動リアクタンスと呼ぶことにした。

この種の波動論的な考え方は、すでに鳥海氏¹⁾、田治見氏²⁾、小堀氏³⁾等によって発表されているが、本論は波動による減衰効果を原理的にまた数学的に極めて簡単に処理し、しかも、上記諸氏の結果とほぼ一致した結果が得られているところが特徴になっている。

したがって、さらに複雑な振動系モデルについて応用展開が容易であり、地盤の力学的効果を考えた各種構造物の振動一般論として普遍した。

オリジナルな試みとして、ここに、紹介することにした。

§2. 固定基礎の強制振動

図一に示すように、地表面に置かれた固定基礎に上下または水平の力 $F_0 e^{i\omega t}$ が加わった場合を考えてみよう。

この場合、基礎は地盤のばね反力のほか、接地面において地盤の波動運動による圧力が加わるから、基礎の運

動方程式は次のようになる。

$$M\ddot{u} + Ku - S(p_t)_{z=0} = F_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

ここで、

M : 基礎の質量 ts^2/m

u : 基礎重心の変位 m

K : 地盤のばね常数 t/m

S : 基礎の接地面積 m^2

F_0 : 加振力振幅 t

ω : 加振角振動数 $1/t$

p_t : 基礎から地盤に輻射される波動応力 t/m^2

基礎から地盤に輻射される波動変位 u_t は、

$$u_t = A_1 \exp\{i\omega(t - \kappa z/V)\} \quad (2)$$

ここで、 A_1 は未定係数、 $i = \sqrt{-1}$ 、 κ は振動型を意味する係数^{註1)}、 V は波動の伝播速度である。

よって、

$$(p_t)_{z=0} = \mu(\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -i A_1 \omega \rho V \kappa e^{i\omega t} \quad (3)$$

($\because \mu = \rho V_s^2$, 縦波の場合は、 $\lambda + 2\mu = \rho V_p^2$, μ および λ はラーメの常数である。)

一方、

$$u = (u_t)_{z=0} = A_1 e^{i\omega t} \quad (4)$$

であるから、式(3)、(4)を式(1)に代入し、

$$(K - \omega^2 M + i\omega \rho V \kappa S) A_1 e^{i\omega t} = F_0 e^{i\omega t}$$

$$\therefore u = \frac{F_0}{K - \omega^2 M + i\omega \rho V \kappa S}$$

加振力を $F = F_0 \frac{\cos \epsilon_1}{\sin \epsilon_1} \omega t$ とおくと、

$$u = \frac{F_0 \frac{\cos \epsilon_1}{\sin \epsilon_1} (\omega t - \epsilon_1)}{\sqrt{(K - \omega^2 M)^2 + (\omega \rho V \kappa S)^2}} \quad (5)$$

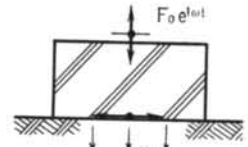
ϵ_1 は位相差で、 $\epsilon_1 = \tan^{-1} \omega \rho V \kappa S / (K - \omega^2 M)$ である。

ここで、 $\rho V \kappa S$ なる項を波動リアクタンスと呼ぶことにした。

さて、ばね常数 K を静的な場合として求めることにしよう。

2.1 上下動

地表面に集中荷重 P が作用するとき、地中の任意の点



図一

における変位 w は, Boussinesq によって次のように与えられている.

$$w = P\{2(1-\nu) + z^2/R^2\}/4\pi\mu R$$

ここで, $R = \sqrt{r^2 + z^2}$ (r, z は円筒座標), ν はポアソン比である.

いま, 円形の基礎を想定し, その中心の変位を w_s とし, 接地圧の分布を Boussinesq によって, $p = P/2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}$ と仮定すれば, ^{註2)}

$$w_s = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \cdot \frac{P}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{r\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = (1-\nu)P/4a\mu \quad (6)$$

よって, 静的なばね常数 K_z は, ^{註3)}

$$K_z = 4a\mu/(1-\nu) = 4a\rho V_s^2/(1-\nu) \quad (7)$$

上下動の場合, 波動の発生機構からみて, 縦波が優先すると考えられるから, ^{註4)} 式(5)の V を縦波速度 V_p として式(7)を代入し, 整理すると,

$$u = \frac{u_{st} \frac{\cos}{\sin}\{\omega t - \varepsilon_1\}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2}{2(1-2\nu)} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} \quad (8)$$

ここで, $u_{st} = F_0/K_z$, $\omega_{st}^2 = K_z/M$ で, それぞれ静的変位, 静的固有振動数を意味する.

また, $a\omega/V_s$ をパラメーターとして表わせば,

$$u = \frac{u_{st} \frac{\cos}{\sin}\{\omega t - \varepsilon_1\}}{\sqrt{\left\{1 - \frac{1-\nu}{4} \frac{M}{\rho a^3} \left(\frac{a\omega}{V_s}\right)^2\right\}^2 + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left\{\frac{(1-\nu)\pi\kappa}{4}\right\}^2 \left(\frac{a\omega}{V_s}\right)^2}} \quad (9)$$

となる.

2.2 水平動

地表面に水平の集中荷重 Q が作用するとき, 地中の任意の点における水平変位 v は, Cerruti によって次のように与えられている.

$$v = \frac{Q}{4\pi\mu R} \left[1 + \frac{x^2}{R^2} + (1-2\nu) \left\{ \frac{R}{R+z} - \frac{r^2}{(R+z)^2} \right\} \right]$$

いま, 円形基礎についてその中心の変位を v_r とし, 接地面におけるせん断応力 τ_r の分布を, $\tau_r = Q/2\pi a\sqrt{a^2 - r^2}$ と仮定すれば, ^{註5)} $R = r$, $x = r\cos^2\theta$ となるから,

$$v_r = \frac{Q}{2\pi\mu} \frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1-\nu\sin^2\theta}{r\sqrt{a^2 - r^2}} r dr d\theta = (2-\nu)Q/8a\mu$$

よって, 静的なばね常数 K_x は,

$$K_x = 8a\mu/(2-\nu) \quad (10)$$

となる. 水平動の場合, 地中に輻射される波動を横波と考えることは自然であるから, 式(10)を式(5)に代入し,

$u_{st} = F_0/K_x$, $\omega_{st}^2 = K_x/M$ とおけば,

$$u = \frac{u_{st} \frac{\cos}{\sin}\{\omega t - \varepsilon_1\}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{(2-\nu)\pi^2\kappa^2}{8} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} \quad (11)$$

$a\omega/V_s$ をパラメーターとして表わせば,

$$u = \frac{u_{st} \frac{\cos}{\sin}\{\omega t - \varepsilon_1\}}{\sqrt{\left\{1 - \frac{2-\nu}{8} \frac{M}{\rho a^3} \left(\frac{a\omega}{V_s}\right)^2\right\}^2 + \left\{\frac{(2-\nu)\pi\kappa}{8}\right\}^2 \left(\frac{a\omega}{V_s}\right)^2}} \quad (12)$$

となる. 図-2, 図-3 は, これらの結果を例示したものである. ^{註6)}

このように, 地盤を半無限の弾性体とした場合, 見かけ上粘性減衰があるかのような特性を示し, 粘性減衰を無視しても, 共振時に振巾が無窮大になることはない.

これはエネルギーが熱に変わるのではなく, そのまま遠方に去ってしまうという現象によることはいままでのない.

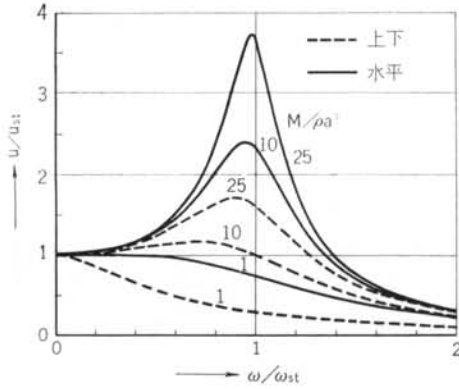


図-2 上下および水平動における変位特性

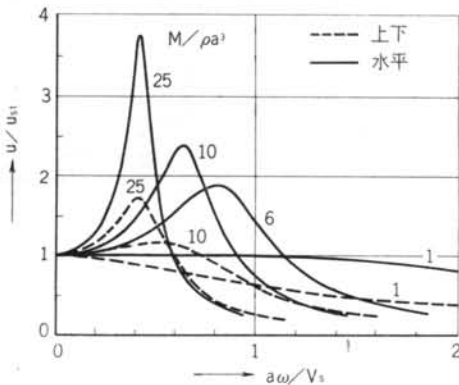


図-3 上下および水平動における変位特性

2.3 回転動

図-4を参照し、式(1)に相当する運動方程式は、

$$J\ddot{\phi} + K_\phi\phi - \int_s (\dot{p}_t)_{z=0} r dS = M_0 e^{i\omega t} \quad (13)$$

ここで、

J : 基礎の y 軸まわりの慣性モーメント tms^2

ϕ : 回転角

K_ϕ : 地盤の回転剛性 tm

M_0 : 加振モーメント tm

基礎から地盤に輻射される波動変位 u_t は、 A_2 を未定係数として、

$$u_t = x A_2 \exp\{i\omega(t - \kappa z/V)\} \quad (14)$$

回転動の場合も、基礎の接地面における波動の形態を縦波として考えられるから、

$$(\dot{p}_t)_{z=0} = (\lambda + 2\mu)(\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -i A_2 x \kappa \omega \rho V_p e^{i\omega t}$$

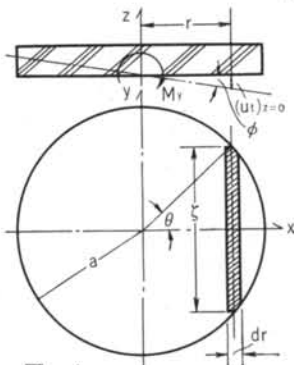


図-4

この応力の回転に対する全抵抗モーメント R_ϕ は、

$$R_\phi = \int_s (\dot{p}_t)_{z=0} x dS = \int_{-a}^a (\dot{p}_t)_{z=0} \xi x d\xi = -i\omega A_2 \rho V_p \kappa I e^{i\omega t} \quad (15)$$

ただし、 $\int_{-a}^a \xi^2 dx = I = \pi a^2/4$ であり、 I は基礎底面の断面2次モーメントである。

一方、 $(u_t)_{z=0} = x\phi$ であるから、

$$\phi = (u_t)_{z=0}/x = A_2 e^{i\omega t} \quad (16)$$

となる。よって、式(13)は、

$$(K_\phi - \omega^2 I + i\omega \rho V_p \kappa I) A_2 = M_0$$

加振モーメントを $M = M_0 \frac{\cos \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_2} \omega t$ とおけば、

$$\phi = \frac{M_0 \frac{\cos \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_2} (\omega t - \varepsilon_2)}{\sqrt{(K_\phi - \omega^2 J)^2 + (\omega \rho V_p \kappa I)^2}} \quad (17)$$

ここで、 ε_2 は位相差で、 $\varepsilon_2 = \tan^{-1} \omega \rho V_p \kappa I / (K_\phi - \omega^2 J)$ である。さてここで、回転の剛性 K_ϕ を求めることが必要になる。

いま、基礎の中心に上下方向の力 ΔP が作用したとすると、 r の距離における変位は Boussinesq の式より、

$$w = (1-\nu) \Delta P / 2 \pi \mu r$$

その点における r 方向の傾斜 ϕ_r は、

$$\phi_r = \partial w / \partial r = -(1-\nu) \Delta P / 2 \pi \mu r^2$$

x 方向の傾斜 ϕ_x は、

$$\phi_x = -(1-\nu) \Delta P \cos \theta / 2 \pi \mu r^2$$

したがって、もし上記の点に力 ΔP が作用すれば、中心における回転角 ϕ_{0x} は、

$$\phi_{0x} = \frac{1-\nu}{2 \pi \mu} \cdot \frac{\Delta P}{r^2} \cos \theta$$

結局、円形基礎の中心における y 軸まわりの回転角 ϕ_{st} は σ_z を分布圧力として、

$$\phi_{st} = \frac{1-\nu}{2 \pi \mu} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\sigma_z}{r^2} \cos \theta \cdot r dr d\theta$$

ここで、 σ_z を Boussinesq 型に仮定し、^{註7)}

$$\sigma_z = \frac{3M_0}{2\pi a^3} \cdot \frac{r \cos \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}}$$

とすると、

$$\begin{aligned} \phi_{st} &= \frac{3M_0}{2\pi a^3} \cdot \frac{1-\nu}{2\pi \mu} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{\cos^2 \theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr d\theta \\ &= 3(1-\nu) M_0 / 8\mu a^3 \end{aligned}$$

$$\therefore K_\phi = \frac{8\mu a^3}{3(1-\nu)} = \frac{8\rho V_s^2 a^3}{3(1-\nu)} \quad (18)$$

かくして、式(17)に式(18)を代入し、整理すると、

$$\phi = \frac{\phi_{st} \frac{\cos \varepsilon_2}{\sin \varepsilon_2} (\omega t - \varepsilon_2)}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{3(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2}{64(1-2\nu)} \cdot \frac{\rho a^5}{J} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} \quad (19)$$

ここで、 $\phi_{st} = M_0 / K_\phi = 3(1-\nu) M_0 / 8\rho V_s^2 a^3$ 、 $\omega_{st}^2 = K_\phi / J = 8V_s^2 / 3(1-\nu) a^2 \cdot \rho a^3 / J$ であり、それぞれ静的の回

転角, および静的固有振動数を意味している。

式(9)をみると, 回転動の場合には $\rho a^3/J$ をパラメータとして振動の形が定まることになる。そこで $J/\rho a^5$ を慣性比と呼ぶことにした。

かくして, 直線運動における質量比 $M/\rho a^3$ を, 回転動の場合には慣性比 $J/\rho a^5$ に対応させることによって, 全く同じ式で表現される。

図-5は, 回転動の場合の共振曲線を図で示したものである。

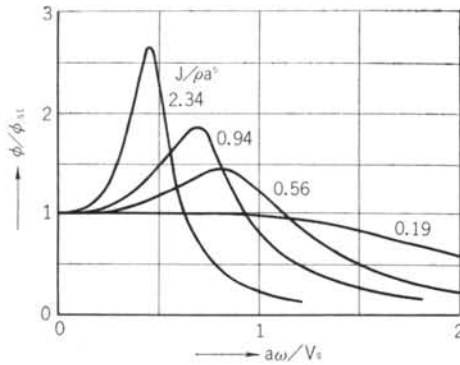


図-5 回転動における回転角変位特性

2.4 共振振動数

振巾が最大になるときの振動数を, 共振振動数 ω_n と呼び, 静的固有振動数 ω_{st} と区別する。

これは式(8), (11), (12)において, u または ϕ を最大にする条件から,

$$\text{(上下動)} \quad \omega_n = \omega_{st} \sqrt{1 - \frac{(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2}{4(1-2\nu)} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad (20)$$

$$\text{(水平動)} \quad \omega_n = \omega_{st} \sqrt{1 - \frac{(2-\nu)\pi^2 \kappa^2}{16} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad (21)$$

$$\text{(回転動)} \quad \omega_n = \omega_{st} \sqrt{1 - \frac{3(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2}{128(1-2\nu)} \cdot \frac{\rho a^5}{J}} \quad (22)$$

となる。

図-6, 図-7はこれらを図で示したものである。

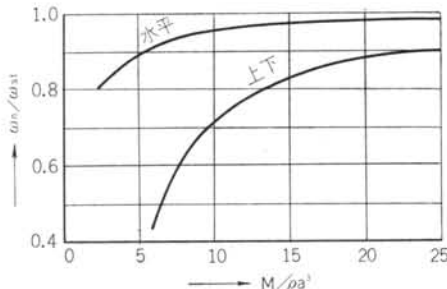


図-6 質量比に対する共振振動数(一定加振力の場合)

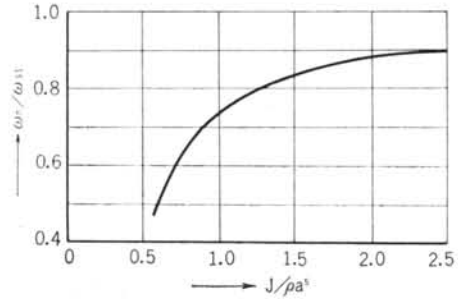


図-7 慣性比に対する共振振動数(一定加振力の場合)

2.5 減衰振動との比較

本論のように, 波動の効果を組込むことによって, 地盤の粘性を考えなくても, あたかも粘性減衰があるかのような特性を示す。このような地下逸散減衰を粘性減衰に換算することは, 両者の式の形からみて容易である。

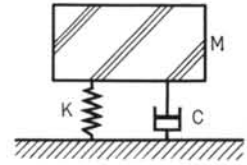


図-8 粘性減衰系

図-8に示す粘性減衰系の強制振動の解は,

$$u = \frac{u_{st} \cos\{\omega t - \varepsilon\}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + 4h^2 \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}} \quad (23)$$

となり, h は減衰定数で $h = C/C_e$, $C_e = 2\sqrt{KM}$ である。

式(23)を式(8), (11), (12)と比較し, 等価の減衰定数 h_e を求め, $\rho/M = \gamma/W$ (γ : 地盤の単位体積重量 t/m^3 , W : 基礎の重量 t), $a^3 = (S/\pi)^{3/2}$ を代入し, $\nu = 0.25$, $\kappa = 1.33$ (上下, 回転), $\kappa = 0.92$ (水平), $\gamma = 1.6t/m^3$ とすると, (註8)

$$\text{(上下動)} \quad h_e^2 = (1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2 / 8(1-2\nu) \cdot \rho a^3 / M$$

$$h_e = 0.835 W^{-1/2} S^{3/4}$$

$$\text{(水平動)} \quad h_e^2 = (2-\nu)\pi^2 \kappa^2 / 32 \cdot \rho a^3 / M$$

$$h_e = 0.362 W^{-1/2} S^{3/4}$$

$$\text{(回転動)} \quad h_e^2 = 3(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2 / 256(1-2\nu) \cdot \rho a^5 / J$$

円形基礎でその厚さが半径に比べて充分小さい場合には, $J = Wa^2/4g$ であるから,

$$h_e = 0.514 W^{-1/2} S^{3/4}$$

となる。また, critical damping に相当する条件は, $h_e = 1$ であるから, これを与える質量比を $(M/\rho a^3)_c$, 慣性比を $(J/\rho a^5)_c$ と表わし, ν, κ に前記の数値を与えると,

$$\text{(上下動)} \quad (M/\rho a^3)_c = (1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2 / 8(1-2\nu)$$

$$= 2.46$$

$$\text{(水平動)} \quad (M/\rho a^3)_c = (2-\nu)\pi^2 \kappa^2 / 32$$

$$= 0.46$$

$$\begin{aligned} (\text{回転動}) \quad (J/\rho a^5)_c &= 3(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2 / 256(1-2\nu) \\ &= 0.23 \end{aligned}$$

また、強制振動において共振現象が起こらないための条件は、 $h_c > 1/\sqrt{2}$ 、または式(10)~(12)より、

$$\begin{aligned} (\text{上下動}) \quad M/\rho a^3 &< (1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2 / 4(1-2\nu) \\ &= 4.92 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{水平動}) \quad M/\rho a^3 &< (2-\nu)\pi^2 \kappa^2 / 16 \\ &= 0.91 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{回転動}) \quad J/\rho a^5 &< 3(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2 / 128(1-2\nu) \\ &= 0.46 \end{aligned}$$

となる。

2.6 強制振動試験

一般に、動的 K 値なるものを求めるため、小型の試験基礎を作り、起振機による強制振動試験が行なわれている。このような方法で得られる共振現象の意味を検討してみよう。

起振機による加振力は、次式で表わされる。

$$F = \widehat{m}r\omega^2 e^{i\omega t} \quad \widehat{m}r: \text{加振モーメント}$$

このような加振形態を ω^2 加振型と呼ぶことにしよう。

ω^2 加振型の場合の変位特性は、式(8)、(11)、(19)より、

(上下動)

$$u = \frac{\widehat{m}r/M \cdot \frac{\cos}{\sin}\{\omega t - \varepsilon_1\}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_{st}^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2}{2(1-2\nu)} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega_{st}^2}{\omega^2}}} \quad (24)$$

(水平動)

$$u = \frac{\widehat{m}r/M \cdot \frac{\cos}{\sin}\{\omega t - \varepsilon_1\}}{\sqrt{\left(\frac{\omega_{st}^2}{\omega^2} - 1\right)^2 + \frac{(2-\nu)\pi^2 \kappa^2}{8} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega_{st}^2}{\omega^2}}} \quad (25)$$

となる。図-9はこれらを示したものである。

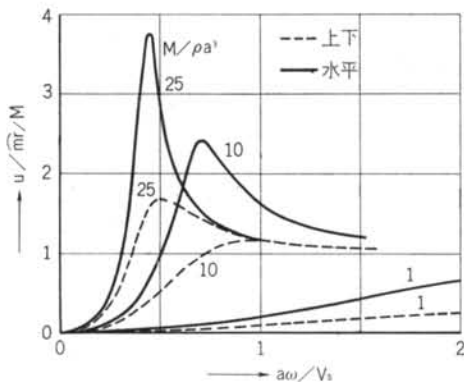


図-9 ω^2 加振力型における変位特性

式(24)、(25)より、 u を最大にする条件を求め、そのときの振動数を ω_p とすれば、

(上下動)

$$\omega_p = \omega_{st} \sqrt{1 - \frac{(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa^2}{4(1-2\nu)} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad (26)$$

(水平動)

$$\omega_p = \omega_{st} \sqrt{1 - \frac{(2-\nu)\pi^2 \kappa^2}{16} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad (27)$$

となる。図-10は式(26)、(27)を示したものである。

このように静的固有振動数 ω_{st} と、一定加振力型の共振振動数 ω_n と、 ω^2 加振力型の共振振動数 ω_p とは、それぞれ値も意味も異なる点に留意すべきで、特に質量比の小さい範囲で三者間の差異は大きくなる。

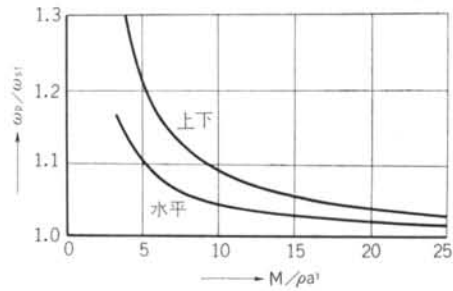


図-10 ω^2 加振力型における共振振動数

§3. 水平一回転の連成振動

実際に基礎または構造物に強制振動の加振力が作用する場合、直線一回転の連成振動の形態をとる。本章では、その最も一般的な場合として、水平一回転連成系の強制振動の問題を解くことにしよう。

図-11において、重心の水平変位を u_x 、重心まわりの回転角を ϕ として、運動方程式は、

$$\left. \begin{aligned} M\ddot{u}_x + C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d) + K_x(u_x - \phi d) &= F_0 e^{i\omega t} \\ J_y \ddot{\phi} + C_\phi \dot{\phi} + K_\phi \phi - C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d) - K_x(u_x - \phi d) &= F_0 d e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} (28)$$

ここで、

u_x : 重心の x 方向の変位

K_x : 地盤の x 方向のばね常数

d : 重心から接地面までの距離

J_y : 基礎の重心における y 軸まわりの慣性モーメント

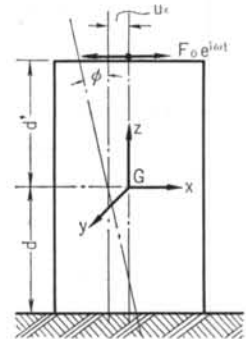


図-11

K_ϕ : 地盤の回転剛性 d' : 重心から加振力の作用点までの距離

C_x : 基礎の接地面における x 方向の波動リアクタンス

C_ϕ : 基礎の接地面における上下方向の波動リアクタンス

である。

水平に対する変位波動は A_3 を未定係数として、

$$x(u_t) = A_3 \exp\{i\omega(t - \kappa_h z / V_s)\} \quad (29)$$

回転に対する変位波動は B_3 を未定係数として、

$$z(u_t) = x B_3 \exp\{i\omega(t - \kappa_v z / V_p)\} \quad (30)$$

よって、

$$u_x = x(u_t)_{z=0} = A_3 e^{i\omega t} \quad (31) \quad \phi = z(u_t)_{z=0} / x = B_3 e^{i\omega t} \quad (32)$$

$$x(p_t)_{z=0} = \mu_x (\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -i A_3 \rho V_s \kappa_h \omega e^{i\omega t} \quad (33) \quad z(p_t)_{z=0} = (\lambda + 2\mu) z (\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -i B_3 \rho V_p \kappa_v x \omega e^{i\omega t}$$

$$\int_S z(p_t)_{z=0} x dS = -i B_3 \rho V_p \kappa_v I_y \omega e^{i\omega t} \quad (34)$$

ただし、 I_y は基礎底面の y 軸まわりの断面 2 次モーメントで、 $I_y = \pi a^4 / 4$ である。

ここで、 $\rho V_s \kappa_h S = C_x$ 、 $\rho V_p \kappa_v I_y = C_\phi$ である。

式(31)~(34)を式(28)に代入し、 A_3 、 B_3 について整理すると、

$$A_3 = F_0 \{K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2 + K_x d d' + i\omega(C_\phi + C_x d^2 + C_x d d')\} / D_1$$

$$B_3 = F_0 \{K_x - \omega^2 M\} d' + K_x d + i\omega(C_x d' + C_x d) / D_1$$

ただし、

$$D_1 = (K_x - \omega^2 M)(K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2) - \omega^2 C_x C_\phi - K_x^2 d^2 + i\omega \{(K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2) C_x + (K_x - \omega^2 M)(C_\phi + C_x d^2) - 2K_x C_x d^2\}$$

となる。よって、加振力を $F = \frac{\cos\{\omega t\}}{\sin\{\omega t\}}$ とおき、

$$F_0 / K_x = (u_{st})_x, \quad 2F_0 d' / K_\phi = \phi_{st}, \quad K_x / M = \omega_x^2, \quad K_\phi / J_y = \omega_\phi^2, \quad \omega / \omega_x = \alpha, \quad \omega_\phi / \omega_x = \beta, \quad M / J_y = m, \quad 2\sqrt{MK_x} = C_{cx},$$

$2\sqrt{J_y K_\phi} = C_\phi$ (critical damping), $d = d'$ とおけば、

$$u_x = (u_{st})_x \sqrt{\frac{(\beta^2 - \alpha^2 + 2md^2)^2 + (2C_\phi / C_{cx} + 4C_x / C_{c\phi} \cdot d^2)^2 \alpha^2 \beta^2}{D_2}} \frac{\cos\{\omega t + \varepsilon_4 - \varepsilon_3\}}{\sin\{\omega t + \varepsilon_4 - \varepsilon_3\}} \quad (35)$$

$$\phi = \frac{\phi_{st} \beta^2}{2} \sqrt{\frac{(2 - \alpha^2)^2 + 4(2C_x / C_{cx})^2 \alpha^2}{D_2}} \frac{\cos\{\omega t + \varepsilon_5 - \varepsilon_3\}}{\sin\{\omega t + \varepsilon_5 - \varepsilon_3\}} \quad (36)$$

ただし、

$$D_2 = \{(1 - \alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2 + md^2) - 4C_x C_\phi / C_{cx} C_{c\phi} \cdot \alpha^2 \beta - md^2\}^2 + \{(\beta^2 - \alpha^2 + md^2)2C_x / C_{cx} \cdot \alpha + (1 - \alpha^2)(2C_\phi / C_{c\phi} + 2C_x / C_{c\phi} \cdot d^2)\alpha\beta - 4C_x / C_{c\phi} \cdot \alpha\beta d^2\}^2$$

また、位相差 ε_3 、 ε_4 、 ε_5 は、

$$\varepsilon_3 = \tan^{-1} \frac{(\beta^2 - \alpha^2 + md^2)2C_x / C_{cx} \cdot \alpha + (1 - \alpha^2)(2C_\phi / C_{c\phi} + 2C_x / C_{c\phi} \cdot d^2)\alpha\beta - 4C_x / C_{c\phi} \cdot \alpha\beta d^2}{(1 - \alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2 + md^2) - 4C_x C_\phi / C_{cx} C_{c\phi} \cdot \alpha^2 \beta - md^2} \quad (37)$$

$$\varepsilon_4 = \tan^{-1} \frac{(2C_\phi / C_{c\phi} + 4C_x / C_{c\phi} \cdot d^2)\alpha\beta}{\beta^2 - \alpha^2 + 2md^2} \quad (38) \quad \varepsilon_5 = \tan^{-1} \frac{4C_x / C_{cx} \cdot \alpha}{2 - \alpha^2} \quad (39)$$

となる。

さて、水平ばね常数 K_x および回転の剛性 K_ϕ は、式(10)、(18)より、

$$K_x = 8a\rho V_s^2 / (2 - \nu), \quad K_\phi = 8\rho V_s^2 a^3 / 3(1 - \nu)$$

また本例のように 2 自由度系の振動形を決めるには、二つのパラメーターが必要であるが、これを図-12に示すように、直径に対する高さの比 $2d/2a$ (これを巾高比と呼ぶ)と、基礎の平均密度 ρ' と地盤の密度 ρ との比 ρ'/ρ (これを密度比と呼ぶ)で表わすことが実用上最も明確である。

巾高比を k 、密度比を n で表わすことにすれば、質量比 $M/\rho a^3$ とは次の関係がある。

$$M/\rho a^3 = 2\pi n k \quad (40)$$

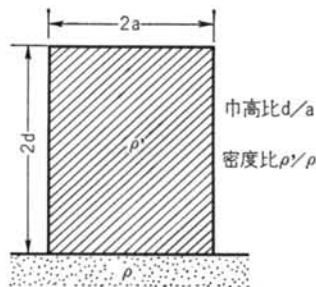


図-12 巾高比 k と密度比 n の定義

したがって、基礎の慣性モーメント J_y は、

$$\left. \begin{aligned}
 J_y &= \frac{M(3a^2 + 4d^2)}{12} = \frac{Ma^2(3 + 4k^2)}{12} & md^2 &= \frac{Md^2}{J_y} = \frac{12k^2}{3 + 4k^2} \\
 \beta^2 &= \frac{K_\phi m}{K_x} = \frac{4(2-\nu)}{(1-\nu)(3 + 4k^2)} & 2 \frac{C_x}{C_{cx}} &= \frac{\kappa_h \sqrt{\pi(2-\nu)}}{4\sqrt{nk}} \\
 2 \frac{C_\phi}{C_{c\phi}} &= \frac{3\sqrt{\pi(1-\nu)\kappa_v}}{4\sqrt{2nk(3 + 4k^2)(1-2\nu)}} & 4 \frac{C_x C_\phi}{C_{cx} C_{c\phi}} &= \frac{3\pi\kappa_h\kappa_v(1-\nu)\sqrt{2-\nu}}{16nk\sqrt{2(1-2\nu)(3 + 4k^2)}} \\
 \frac{4C_x d^2}{C_{c\phi}} &= 3\kappa_h \sqrt{\frac{\pi(1-\nu)k^3}{n(3 + 4k^2)}}
 \end{aligned} \right\} (41)$$

となる。

いま、 $\nu=0.25$ 、 $d=d'$ として、式(41)を数値計算し、式(35)、(36)に代入して整理すれば、

$$|u_x| = (u_{st})_x \sqrt{\frac{\{9.33 - (3 + 4k^2)\alpha^2 + 24k^2\}^2 + (4.05 + 12.94k^2)\alpha^2/nk}{\Delta_3}} \quad (42)$$

$$|\phi| = 4.67\phi_{st} \sqrt{\frac{(2 - \alpha^2)^2 + 1.16\alpha^2/nk}{\Delta_3}} \quad (43)$$

ただし、

$$\Delta_3 = \{9.33 - (12.33 + 16k^2 + 2.19/nk)\alpha^2 + (3 + 4k^2)\alpha^4\}^2 + \{9.08 - (5.67 + 8.63k^2)\alpha^2\}^2 \alpha^2/nk$$

となる。ここで、 $|u_x|$ 、 $|\phi|$ はそれぞれ u_x 、 ϕ の振巾を意味する。また、 $(u_{st})_x$ 、 ϕ_{st} はそれぞれ F_0 なる力が静的に作用した場合の水平変位、回転角に相当する。

図-13は式(42)、図-14は式(43)について、それぞれ一例を示したものである。

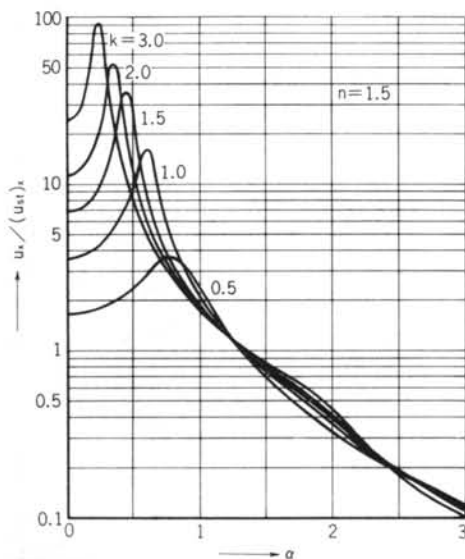


図-13 水平一回転連成系の一定加振力強制振動における変位振巾特性

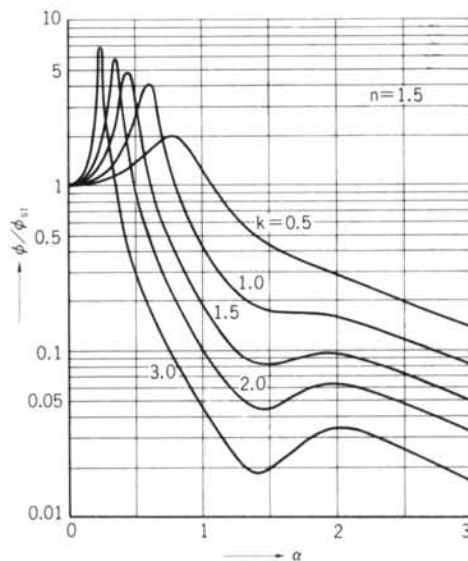


図-14 水平一回転連成系の一定加振力強制振動における回転角変位特性

図-13で $\alpha=0$ のときに u_x が不揃いになることの意味を補足しておこう。 $\alpha=0$ とは静的に加力した場合であり、その変位は式(29)より、

$$K_x(u_x - \phi d) = F_0 \quad K_\phi \phi - K_x(u_x - \phi d)d = F_0 d$$

両式より、

$$u_x = F_0/K_x + 2F_0 d^2/K_\phi \quad \phi = 2F_0 d/K_\phi$$

ここで、 $F_0/K_x = (u_{st})_x$ であり、さらに $2F_0 d^2/K_\phi = F_0/K_x \cdot 24k^2/(3 + 4k^2)\beta^2$ であるから、

$$u_x = (u_{st})_x \left\{ 1 + \frac{24k^2}{(3+4k^2)\beta^2} \right\}$$

となる。上式の第2項は基礎の回転によって生ずる重心の水平変位であり、 k が大きくなると、水平変位の大部分が、回転動によって占められることになる。

図-14の ϕ_{st} は $2F_0d/K\phi$ で、静的に載荷したときの回転角そのものである。

次に、連成固有振動数について検討してみよう。

まず、波動効果を見捨てた場合の連成固有振動数 ω_I 、 ω_{II} を求めると、運動方程式は、

$$M\ddot{u}_x + K_x(u_x - \phi d) = 0$$

$$J_y\ddot{\phi} + K_\phi\phi - K_x(u_x - \phi d) = 0$$

$u_x = Ae^{i\omega t}$ 、 $\phi = Be^{i\omega t}$ を代入し、 $A=B=0$ 以外の解を持つための条件から、結果だけを示せば、

$$\omega_I^2, \omega_{II}^2 = \frac{1}{2}\omega_x^2 \left\{ (\beta^2 + md^2 + 1) \pm \sqrt{(\beta^2 + md^2 + 1)^2 - 4\beta^2} \right\} \quad (44)$$

ここで、 $\beta^2 = 9.33/(3+4k^2)$ 、 $md^2 = 12k^2/(3+4k^2)$

であり、コンクリートの実質体($n=1.5$)を想定し、式44より ω_I 、 ω_{II} を求めると、図-15のa曲線となる。

同図b曲線は波動効果を考慮した場合の連成系の固有振動数である。また、c曲線は回転を見捨てた場合—§2式(2)—の特性である。

同図より、質量比が小さい範囲($M/\rho a^3 = 3 \sim 5$)では、回転の影響を見捨てても、波動効果を見捨てても、固有周期の算定に大きな差異を生じないことがわかる。

次に、 ω^2 加振型の場合について、式42、式43に相当する解だけを示しておこう。

$$|u_x| = \frac{\widehat{m}r}{M} \cdot \alpha^2 \sqrt{\frac{\{9.33 - (3+4k^2)\alpha^2 + 24k^2\}^2 + (4.05 + 12.94k^2)^2\alpha^2/nk}{D_3}} \quad (45)$$

$$|\phi| = \frac{\widehat{m}rd}{J_y} \cdot \alpha^2 \sqrt{\frac{(2-\alpha^2)^2 + 1.16\alpha^2/nk}{D_3}} \quad (46)$$

図-16、図-17は両式について、それぞれ一例を示したものである。

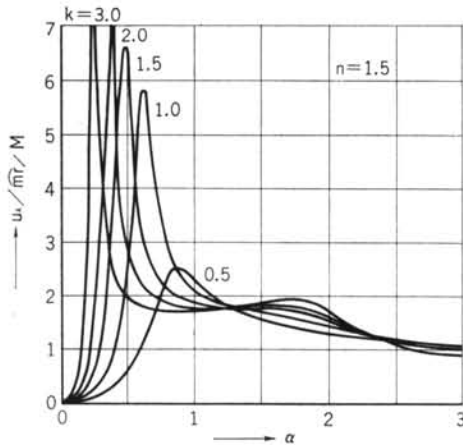


図-16 水平一回転連成系の ω^2 加振力強制振動における変位振巾特性

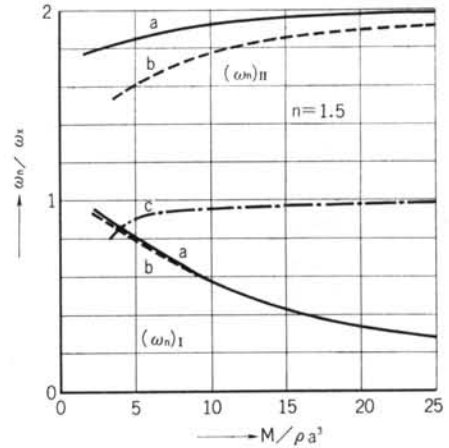


図-15 連成固有振動数

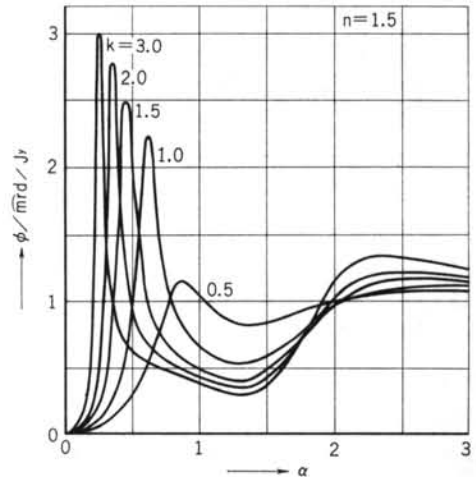


図-17 水平一回転連成系の ω^2 加振力強制振動における回転角変位特性

§ 4. 2 質点系の強制振動

本章では、実際の機械基礎の設計などでよく現われる 2 質点系の場合を扱ってみよう。図-18を参照し、運動方程式は、

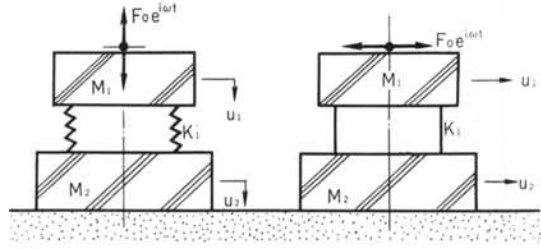


図-18 2 質点系の強制振動

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{u}_1 + K_1(u_1 - u_2) &= F_0 e^{i\omega t} \\ M_2 \ddot{u}_2 + K_2(u_2 - u_1) + K_2 u_2 - S(p_t)_{z=0} &= 0 \end{aligned} \right\} (47)$$

M_2 より地盤に輻射される波動は、 A_4 を未定係数として、

$$u_t = A_4 \exp\{i\omega(t - \kappa z/V)\} \quad (p_t)_{z=0} = \mu(\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -iA_4 \rho V_s \kappa_h \omega e^{i\omega t} \quad (\text{水平})$$

$$(p_t)_{z=0} = (\lambda + 2\mu)(\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -iA_4 \rho V_p \kappa_v \omega e^{i\omega t} \quad (\text{上下})$$

$$u_2 = (u_t)_{z=0} = A_4 e^{i\omega t}$$

また、 u_1 は B_4 を未定係数として、当然次の形で与えられる。

$$u_1 = B_4 e^{i\omega t}$$

ここで、

M_1, M_2 : 上部および下部の質量 u_1, u_2 : 上部および下部質量の変位

K_1 : M_1 を支えるばね常数 K_2 : 地盤のばね常数

その他は前章までの記号と同じである。

波動リアクタンス $\rho V \kappa S = C_e$ とおいて、式(47)を A_4, B_4 について整理すると、

$$A_4 = \frac{F_0 K_1}{(K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - K_1 \omega^2 M_1 + i\omega C_e (K_1 - \omega^2 M_1)}$$

$$B_4 = \frac{F_0 (K_1 + K_2 - \omega^2 M_2)}{(K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - K_1 \omega^2 M_1 + i\omega C_e (K_1 - \omega^2 M_1)}$$

いま、加振力を $F = F_0 \frac{\cos\{\omega t\}}{\sin\{\omega t\}}$ とすれば、

$$u_1 = F_0 \sqrt{\frac{(K_1 + K_2 - \omega^2 M_2)^2 + \omega^2 C_e^2 \cos\{\omega t\}}{D_5 \sin\{\omega t\}}} (\omega t + \varepsilon_7 - \varepsilon_6)$$

$$u_2 = F_0 \sqrt{\frac{K_1 \cos\{\omega t\}}{D_5 \sin\{\omega t\}}} (\omega t - \varepsilon_6)$$

ただし、

$$D_5 = \{(K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - K_1 \omega^2 M_1\}^2 + \omega^2 C_e^2 (K_1 - \omega^2 M_1)^2$$

ここで、 u_1 および u_2 の振巾を $|u_1|, |u_2|$ とし、 $K_1/M_1 = \omega_1^2, K_2/M_2 = \omega_2^2, \omega/\omega_1 = \alpha, \omega_2/\omega_1 = \beta, M_1/M_2 = m, 2\sqrt{M_2 K_2} = 2M_2 \omega_2 = C_{ce}, F_0/K_1 = (u_{st})_1, F_0/K_2 = (u_{st})_2$ とおくと、

$$|u_1| = (u_{st})_1 \sqrt{\frac{(m + \beta^2 - \alpha^2)^2 + \alpha^2 \beta^2 (2C_e/C_{ce})^2}{\{(1 - \alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2) - m\alpha^2\}^2 + \alpha^2 \beta^2 (2C_e/C_{ce})^2 (1 - \alpha^2)^2}} \quad (48)$$

$$|u_2| = (u_{st})_2 \frac{\beta^2}{\sqrt{\{(1 - \alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2) - m\alpha^2\}^2 + \alpha^2 \beta^2 (2C_e/C_{ce})^2 (1 - \alpha^2)^2}} \quad (49)$$

また、位相差 $\varepsilon_6, \varepsilon_7$ は、

$$\varepsilon_6 = \tan^{-1} \frac{\alpha \beta (2C_e/C_{ce})(1 - \alpha^2)}{(1 - \alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2) - m\alpha^2} \quad (50)$$

$$\varepsilon_7 = \tan^{-1} \frac{\alpha \beta (2C_e/C_{ce})}{m + \beta^2 - \alpha^2} \quad (51)$$

(上下動)

式(7)より、 $K_2 = 4apV_s^2/(1-\nu)$ であるから、 $(2C_e/C_{ce})^2 = (1-\nu)\pi^2 \kappa_v^2/4 \cdot V_p^2/V_s^2 \cdot \rho \alpha^3/M_2$

$\nu = 0.25, \kappa_v = 1.33$ として代入すると、

$$(2C_e/C_{ce})^2 = 9.81 \cdot \rho \alpha^3/M_2 \quad (52)$$

(水平動)

式(10)より、 $K_2 = 8apV_s^2/(2-\nu)$ であるから、 $2(C_e/C_{ce})^2 = (2-\nu)\pi^2 \kappa_h^2/8 \cdot \rho \alpha^3/M_2$

$\nu=0.25, \kappa_h=0.92$ として代入すると,

$$(2C_e/C_{ce})^2 = 1.83 \cdot \rho a^3 / M_2 \quad (53)$$

かくして、式(48), (49)に、式(52), (53)を代入することによって、各質点の運動は $m, \beta, M/\rho a^3$ の三つをパラメータとして定められる。

水平動について、式(48), (49)について数値計算を行なった結果をそれぞれ一例として図-19, 図-20に示した。

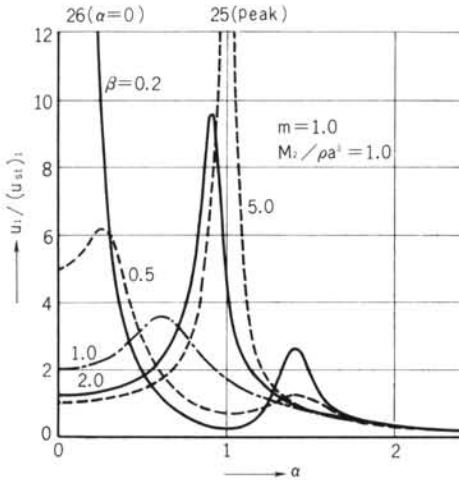


図-19 2質点系一定加振力強制振動における M_1 の変位振巾特性

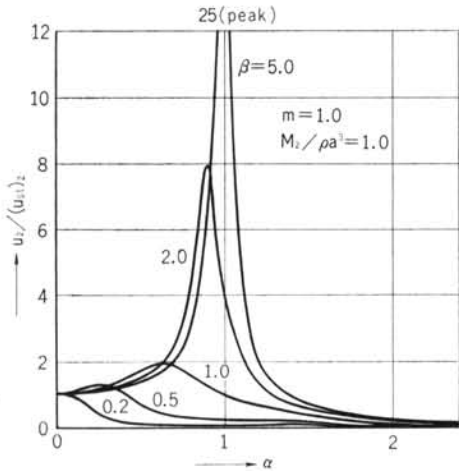


図-20 2質点系一定加振力強制振動における M_2 の変位振巾特性

実際に機械基礎等を想定した場合、 M_1 を支持するばねは可変であり、 M_2 と地盤とで形成される系の静的固有振動数 ω_2 は、基礎の重量と寸法が定めれば不変のものである。したがって、防振の効果をみるには、その不変の単位 ω_2 で表現した方が便利である。

$$\omega/\omega_2 = \alpha/\beta$$

54

であるから、 M_2 の変位 u_2 を ω/ω_2 に対して表わすと、図-21のようになる。同図より、 M_1 を非常に柔らかく支持すると、共振時には M_2 の振巾も著しく大きくなるが、共振を越えるとその振巾が急激に低下し、いわゆる浮し基礎の防振の原理が容易に理解される。

同様に、 ω/ω_2 に対する M_1 の変位を図示すると図-22のようになる。やはり不変の単位の考え方によって、縦軸は $(u_{st})_2$ を単位として表わしてある。

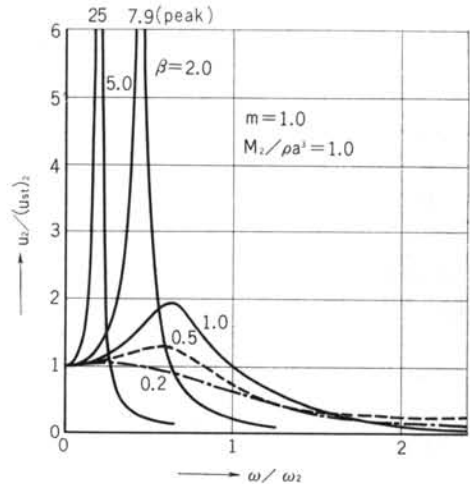


図-21 図-20の横軸を ω_2 を単位として表わしたものの

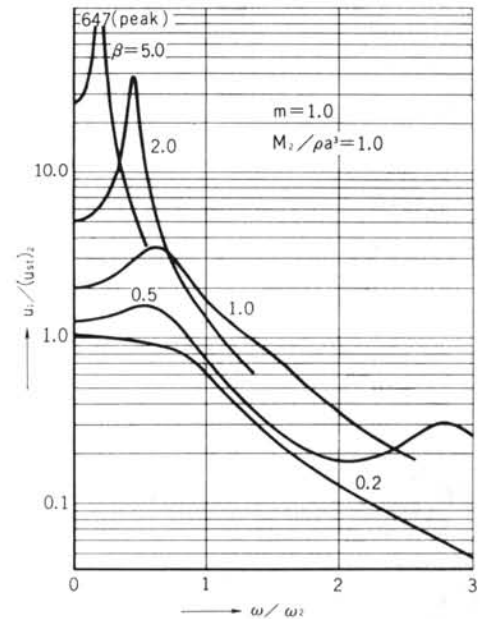


図-22 図-19の横軸を ω_2 、縦軸を $(u_{st})_2$ を単位として表わしたものの

§ 5. 基礎の固有振動

前章までは、基礎および構造物の強制振動における運動を扱ってきた。本章からは、波動リアクタンスの原理をさらに拡張し、弾性地盤上におかれた基礎および構造物の固有振動、および地震応答の問題を中心に論ずることにしよう。

地盤上におかれた固定基礎は、いわゆる地盤—基礎系なる振動系を形成する。このような系に固有振動なるものが存在するだろうか、本章においては、上下、水平、回転の単一運動について検討することにしよう。

5.1 上下および水平動

運動方程式は、

$$M\ddot{u} + Ku - S(\dot{p}_t)_{z=0} = 0 \quad (59)$$

基礎の運動によって、地盤に放射される波動は、一般形として、

$$u_t = A_0 \exp\{p(t - \kappa z/V)\}$$

ここで、 p は振動数のディメンションを持つ変数である。§ 2 で論じたように、水平動における波動を横波、上下動の場合を縦波とすれば、

$$(上下) (p_t)_{z=0} = (\lambda + 2\mu)(\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -\rho V_p \kappa_v p A_0 e^{pt}$$

$$(水平) (p_t)_{z=0} = \mu(\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -\rho V_s \kappa_h p A_0 e^{pt}$$

波動リアクタンスとして、

$$\rho V_p \kappa_v S = C_z, \quad \rho V_s \kappa_h S = C_x$$

とおき、計算上の重複を避けるため、 C_z および C_x を C_e なる記号で代表させることにしよう。

基礎の変位 u は、

$$u = (u_t)_{z=0} = A_0 e^{pt}$$

であるから、式(59)は、

$$p^2 + C_e/M \cdot p + K/M = 0$$

ここで、 $K/M = \omega_{st}^2$ であり、 $2\sqrt{KM} = C_{ce}$ (critical damping) とおくと、

$$p^2 + 2C_{ce}/C_{ce} \cdot \omega_{st} p + \omega_{st}^2 = 0 \quad (60)$$

これを p について解いて、

$$p = \frac{p_1}{p_2} = \omega_{st} \left\{ -\frac{C_e}{C_{ce}} \pm \sqrt{\left(\frac{C_e}{C_{ce}}\right)^2 - 1} \right\} \quad (61)$$

したがって、 $C_e/C_{ce} < 1$ の場合には、根号内が虚数になるから、運動は減衰振動型となって、基礎は自由振動を行なう。この自由振動における振動数を基礎の固有振動数と呼び、 ω_{no} で表わすことにしよう。

さて、 $C_e/C_{ce} < 1$ なることは、 $C_x = \rho V_s \kappa_h \pi a^2$ 、 $C_z = \rho V_p \kappa_v \pi a^2$ 、 $K_x = 8a\rho V_s^2/(2-\nu)$ 、 $K_z = 4a\rho V_s^2/(1-\nu)$ で

あるから、

$$\left. \begin{aligned} (上下) \quad M/\rho a^3 > \pi^2(1-\nu)^2 \kappa_v^2 / (1-\nu) \\ (水平) \quad M/\rho a^3 > \pi^2(2-\nu) \kappa_h^2 / 8(1-2\nu) \end{aligned} \right\} (62)$$

いま、 $\nu = 0.25$ 、 $\kappa_v = 1.33$ 、 $\kappa_h = 0.92$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} (上下) \quad M/\rho a^3 > 2.46 \\ (水平) \quad M/\rho a^3 > 0.46 \end{aligned} \right\} (63)$$

となる。

また、固有振動数 ω_{no} は、

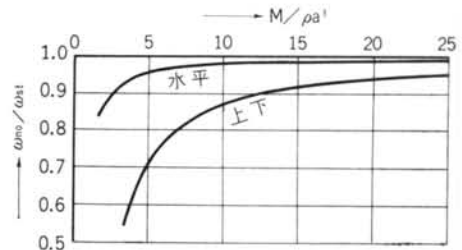
$$(上下) \quad \omega_{no} = \omega_{st} \sqrt{1 - \frac{\pi^2(1-\nu)^2 \kappa_v^2}{8(1-2\nu)} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad (64)$$

$$(水平) \quad \omega_{no} = \omega_{st} \sqrt{1 - \frac{\pi^2(2-\nu) \kappa_h^2}{32} \cdot \frac{\rho a^3}{M}} \quad (65)$$

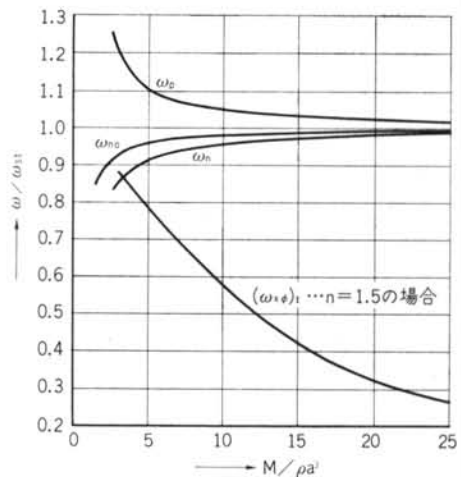
となる。

したがって、基礎の固有振動数は、その質量比によって必ずしも存在しないこと、またその固有振動数 ω_{no} は静的固有振動数 ω_{st} とも、一定加振力型における共振振動数 ω_n とも、 ω^2 加振力型における共振振動数 ω_p とも、意味も値も異なることに注意すべきである。

図—23は式(60)、(61)について図示したものであり、図—24は水平動について ω_{no} 、 ω_n 、 ω_p 、および $(\omega_x \phi)_I$ —§6 参照—の関係を示したものである。



図—23 基礎の固有振動数(上下、水平)



図—24 ω_{no} 、 ω_n 、 ω_p 、 $(\omega_x \phi)_I$ の相互関係

5.2 回転動

運動方程式は、

$$J\ddot{\phi} + K_\phi\phi - \int_s (\dot{p}_t)_{z=0} x dS = 0 \quad (62)$$

基礎の回転運動によって地盤に放射される波動は、一般形として、

$$u_t = B_5 x \exp\{p(t - \kappa_0 z / V_p)\} \\ (\dot{p}_t)_{z=0} = (\lambda + 2\mu)(\partial u_t / \partial z)_{z=0} = -B_5 \kappa_0 \rho V_p e^{pt} \\ \therefore \int_s (\dot{p}_t)_{z=0} x dS = -B_5 \rho V_p \kappa_0 I e^{pt} \quad (63)$$

I は基礎底面の断面 2 次モーメントである。

一方、 $(u_t)_{z=0} = x\phi$ であるから、

$$\phi = (u_t)_{z=0} / x = B_5 e^{pt} \quad (64)$$

ここで、回転リアクタンス $\rho V_p \kappa_0 I = C_\phi$ として、式 63、

64 を式 62 に代入すれば、

$$p^2 + C_\phi / J \cdot p + K_\phi / J = 0$$

となり、直線運動と同じ形で表わされる。

したがって、 $K_\phi / J = \omega_{st}^2$ 、 $C_\phi / J = 2\sqrt{JK_\phi}$ とおけば、

$C_\phi / C_{\phi 0} < 1$ なる条件で自由振動を行ない、固有周期が存在する。

すなわち、 $C_\phi = \rho V_p \kappa_0 \pi a^4 / 4$ 、 $K_\phi = 8\rho V_s^2 a^3 / 3(1-\nu)$ であるから、固有周期が存在する条件は、

$$J / \rho a^5 > 3(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa_0^2 / 256(1-2\nu)$$

となる。 $\nu = 0.25$ 、 $\kappa_0 = 1.33$ とすれば、

$$J / \rho a^5 > 0.23 \quad (註9)$$

となる。また、その固有振動数 ω_{no} は、

$$\omega_{no} = \omega_{st} \sqrt{1 - \frac{3(1-\nu)^2 \pi^2 \kappa_0^2}{256(1-2\nu)} \cdot \frac{\rho a^5}{J}} \quad (65)$$

となる。図-25 はこれを図示したものである。

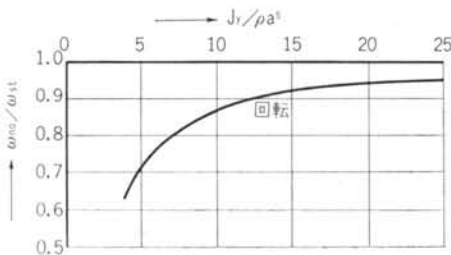


図-25 基礎の固有振動数 (回転)

§ 6. 剛な構造物の固有振動

前章においては、上下、水平、回転の単一動運について論じてきたが、実際の建物のように背の高い構造物になると、回転運動の占める割合が大きくなり、単一運動として近似することはできない。

一般に、建物等の固有振動と呼ばれるものは、水平一回転の連成系における固有振動を意味しているのであろう。そして、低層の比較的剛な建物では、地盤の弾性的性質によって大きな影響を受けるであろう。

本章では、地盤上におかれた構造物のロッキング運動における固有周期を求めることとした。

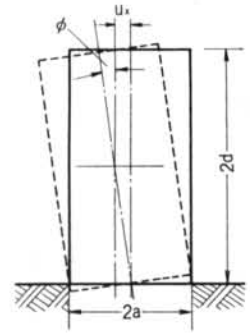


図-26 高い剛構造物のロッキング

図-26 を参照し、運動方程式は、

$$\begin{aligned} M\ddot{u}_x + C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d) + K_x(u_x - \phi d) &= 0 \\ J_y\ddot{\phi} + C_\phi\dot{\phi} + K_\phi\phi - C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d) - K_x(u_x - \phi d)d &= 0 \end{aligned} \quad (66)$$

構造物の水平運動および回転運動によって地盤に放射される波動は、一般形として次のように与えられる。

$$x(u_t) = A_6 \exp\{p(t - \kappa_n z / V_s)\}$$

$$z(u_t) = x B_6 \exp\{p(t - \kappa_0 z / V_p)\}$$

よって、

$$u_x = x(u_t)_{z=0} = A_6 e^{pt}$$

$$\phi = z(u_t)_{z=0} / x = B_6 e^{pt}$$

$$x(\dot{p}_t)_{z=0} = -A_6 \rho V_s \kappa_n p e^{pt}$$

$$z(\dot{p}_t)_{z=0} = -B_6 \rho V_p \kappa_0 x p e^{pt}$$

$$\int_s (\dot{p}_t)_{z=0} x dS = -B_6 \rho V_p \kappa_0 I p e^{pt}$$

水平および回転リアクタンスとして、

$$\rho V_s \kappa_n S = C_x, \quad \rho V_p \kappa_0 I = C_\phi$$

とおき、式 67 を式 66 に代入し、

$$\begin{aligned} (K_x + p^2 M + p C_x) A_6 - (K_x d + p C_x d) B_6 &= 0 \\ -(K_x d + p C_x d) A_6 + \{K_\phi + p^2 J_y + K_x d^2 \\ + p(C_\phi + C_x d^2)\} B_6 &= 0 \end{aligned}$$

この連立方程式が、 $A_6 = B_6 = 0$ 以外の解を有するためには、その行列式が 0 とならなければならない。よって、

$$\begin{aligned} M J_y p^4 + \{M(C_\phi + C_x d^2) + C_x J_y\} p^2 \\ + \{M(K_\phi + K_x d^2) + K_x J_y + C_x C_\phi\} p^2 \\ + \{C_x(K_\phi + K_x d^2) + K_x(C_\phi - C_x d^2)\} p + K_x K_\phi = 0 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} p^4 + \left(\frac{C_x}{M} + \frac{C_\phi + C_x d^2}{J_y}\right) p^3 + \left(\frac{K_\phi + K_x d^2}{J_y} + \frac{K_x}{M} + \frac{C_x C_\phi}{M J_y}\right) p^2 \\ + \left\{\frac{(K_\phi + K_x d^2) C_x}{M J_y} + \frac{K_x}{M} \left(\frac{C_\phi - C_x d^2}{J_y}\right)\right\} p + \frac{K_x K_\phi}{M J_y} = 0 \quad (68) \end{aligned}$$

ここで、 $K_x / M = \omega_x^2$ 、 $K_\phi / J_y = \omega_\phi^2$ 、 $\omega_\phi / \omega_x = \beta$ 、

$$M / J_y = m, \quad 2\sqrt{M K_x} = C_{cx}, \quad 2\sqrt{J_y K_\phi} = C_{c\phi} \quad \text{とおくと、}$$

$$p^4 + \left(\frac{2C_x}{C_{cx}} + \beta \frac{2C_\phi}{C_{c\phi}} + \frac{2C_x d^2}{C_{c\phi}} \beta \right) p^3 \omega_x + \left(\beta^2 + md^2 + 1 + \frac{4C_x C_\phi}{C_{cx} C_{c\phi}} \beta \right) \omega_x^2 p^2 + \left\{ (\beta^2 + md^2) \frac{2C_x}{C_{cx}} + \beta \frac{2C_\phi}{C_{c\phi}} - \frac{2C_x d^2}{C_{c\phi}} \beta \right\} \omega_x^3 p + \beta^2 \omega_x^4 = 0 \quad (69)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} p/\omega_x &= X \\ 2C_x/C_{cx} + 2C_\phi/C_{c\phi} \cdot \beta + 2C_x d^2/C_{c\phi} \cdot \beta &= a_1 & \beta^2 + md^2 + 1 + 4C_x C_\phi / C_{cx} C_{c\phi} \cdot \beta &= a_2 \\ (\beta^2 + md^2) 2C_x / C_{cx} + 2C_\phi / C_{c\phi} \cdot \beta - 2C_x d^2 / C_{c\phi} \cdot \beta &= a_3 & \beta^2 &= a_4 \end{aligned} \right\} (70)$$

とおくと、式(69)は次のようになる。

$$X^4 + a_1 X^3 + a_2 X^2 + a_3 X + a_4 = 0 \quad (71)$$

その解は一般形として、

$$X_1 = \Re_1 \pm i \Im_1, \quad X_2 = \Re_2 \pm i \Im_2 \quad (72)$$

ここで、 \Re_1, \Re_2 は実数部、 \Im_1, \Im_2 は虚数部を意味している。また、式(70)の a_1, a_2, a_3, a_4 はいずれも正の実数であるから、 \Re_1, \Re_2 はともに負の実数となる。

かくして、 u_x の一般解は、

$$u_x = C_1 \exp\{(\Re_1 + i \Im_1) \omega_x t\} + C_2 \exp\{(\Re_1 - i \Im_1) \omega_x t\} \quad (73)$$

または、

$$u_x = C_1' \exp\{(\Re_2 + i \Im_2) \omega_x t\} + C_2' \exp\{(\Re_2 - i \Im_2) \omega_x t\} \quad (74)$$

C_1, C_2, C_1', C_2' は初期条件によって定まる常数である。また、 $\Im_2 > \Im_1$ とすれば、式(73)が下心ローリング、式(74)が上心ローリングに相当する。

したがって、この系の連成固有振動数を $\omega_{x\phi}$ とすれば、

$$\left. \begin{aligned} (\omega_{x\phi})_1 &= \Im_1 \omega_x & \text{下心ローリング} \\ (\omega_{x\phi})_2 &= \Im_2 \omega_x & \text{上心ローリング} \end{aligned} \right\} (75)$$

となり、 \Im_1, \Im_2 は式(72)を解くことによって得られる。

さて、いま円形基礎について考えているのであるから、

$$K_x = 8a\rho V_s^2/(2-\nu), \quad K_\phi = 8\rho V_s^2 a^3/3(1-\nu)$$

であり、§ 3 で定義した巾高比 k および密度比 n を用いて、式(70)を表現すると、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{\kappa_h \sqrt{\pi(2-\nu)}}{4\sqrt{nk}} + \frac{3\kappa_v}{2(3+4k^2)} \sqrt{\frac{\pi(1-\nu)(2-\nu)}{2nk(1-2\nu)}} + \frac{3\kappa_h k^2}{3+4k^2} \sqrt{\frac{\pi(2-\nu)}{nk}} \\ a_2 &= \frac{1}{3+4k^2} \left\{ \frac{4(2-\nu)}{1-\nu} + 16k^2 + 3 + \frac{3\pi\kappa_h \kappa_v (2-\nu)}{8nk} \sqrt{\frac{1-\nu}{2(1-2\nu)}} \right\} \\ a_3 &= \frac{1}{(3+4k^2)\sqrt{nk}} \left[\left\{ \frac{4(2-\nu)}{1-\nu} + 12k^2 \right\} \frac{\kappa_h \sqrt{\pi(2-\nu)}}{4} + \frac{3}{2} \kappa_v \sqrt{\frac{\pi(1-\nu)(2-\nu)}{2(1-2\nu)}} - 3\kappa_h k^2 \sqrt{\pi(2-\nu)} \right] \\ a_4 &= \frac{4(2-\nu)}{(1-\nu)(3+4k^2)} \end{aligned} \right\} (76)$$

となる。もし、 $\nu=0.25, \kappa_h=0.92, \kappa_v=1.33$ とすると、

$$\left. \begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\sqrt{nk}} \left(0.54 + \frac{4.05}{3+4k^2} + \frac{6.47k^2}{3+4k^2} \right) & a_2 &= \frac{1}{3+4k^2} \left(12.33 + 16k^2 + \frac{2.19}{nk} \right) \\ a_3 &= \frac{1}{(3+4k^2)\sqrt{nk}} (9.08 + 0.004k^2) & a_4 &= \frac{9.33}{3+4k^2} \end{aligned} \right\} (77)$$

かくして、固有振動数は、巾高比 k と密度比 n をパラメーターとして決定される。

もし n, k が充分小さい場合には、あたかも over damping の状態になり、式(77)は実根のみをもち、固有振動数は存在しないこともある。

表-1 は k, n に各種の値を入れて、式(77)を解いた結果を示したもので、図-27 はそれを図示したものである。

n	k	\mathfrak{R}_1	\mathfrak{R}_2	\mathfrak{I}_1	\mathfrak{I}_2
0.3	0.5	-0.442	(-1.087 -3.081)	0.708	0.000
	1.0	-0.153	-1.711	0.582	0.866
	1.5	-0.068	-1.490	0.446	1.266
	2.0	-0.036	-1.329	0.353	1.458
	3.0	-0.014	-1.112	0.246	1.647
	4.0	-0.007	-0.972	0.187	1.739
0.4	0.5	-0.382	-1.805	0.740	0.323
	1.0	-0.133	-1.482	0.587	1.218
	1.5	-0.059	-1.290	0.447	1.469
	2.0	-0.031	-1.151	0.354	1.602
	3.0	-0.012	-0.963	0.246	1.738
	4.0	-0.006	-0.842	0.187	1.806
1.5	0.5	-0.197	-0.932	0.806	1.587
	1.0	-0.069	-0.765	0.598	1.760
	1.5	-0.030	-0.666	0.450	1.839
	2.0	-0.016	-0.594	0.355	1.881
	3.0	-0.006	-0.497	0.246	1.924
	4.0	-0.003	-0.435	0.187	1.944

表-1

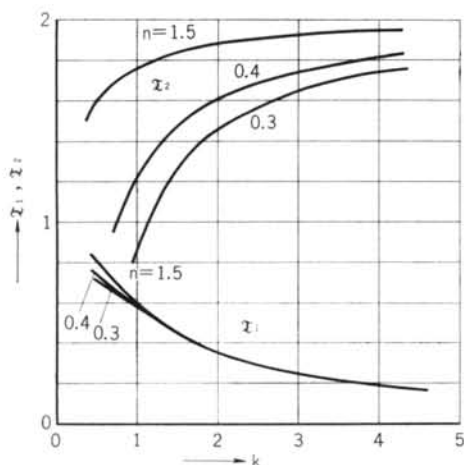


図-27 \mathfrak{I}_1 および \mathfrak{I}_2

§ 7. 剛な建物の固有周期

前章の結果を、比較的低層の剛な建物を想定し、その固有周期の算定に応用してみよう。

実際に建物の固有振動とは、現行の高さ制限内にある鉄筋コンクリート造では、その動きの大部分がロッキングであることが幾多の研究⁽⁴⁾によって報告されている。

すなわち、地盤によって支えられた建物の剛体運動における周期として考えた方が、実情に近いと思われる。ただし、本章では円形基礎を想定しているのであるが、もし矩形基礎で正方形に近い場合は、田見見氏の理論によって、相当する円形基礎の半径を次のように換算することができる。

$$a = 0.55\sqrt{S} \quad (7)$$

さて、一般の建物の密度比 n は 0.4 (平均密度が土の 40% という意) ぐらいであろう。

一方、建物を支持する地盤は、もし軟弱であれば杭などによって補剛されるのであるから、横波の伝播速度 V_s は 150~

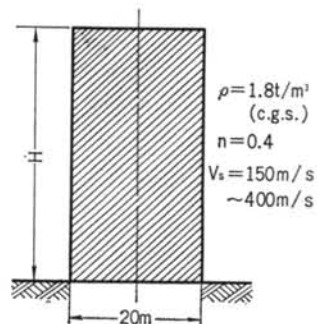


図-28

400m/s ぐらいに分布しているであろう。

いま、図-28に示すように、 $2a=20\text{m}$ 、 $V_s=150\sim 400\text{m/s}$ 、 $n=0.4$ として、建物の高さ H に対する固有周期 $T_{x\phi}$ (1次) を求めてみよう。

$$\omega_{x\phi}^2 = K_x/M = 4V_s^2/(2-\nu)\pi a^2nk \quad (78)$$

であるから、式(78)より、

$$T_{x\phi} = 2\pi/\omega_{x\phi} = 2\pi/\mathfrak{I}_1\omega_{x\phi} = \pi a \sqrt{(2-\nu)\pi nk} / \mathfrak{I}_1 V_s \quad (79)$$

$k=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の場合について式(79)を計算し、表-2を得る。図-29はこれを図示したものである。

かくして、われわれが経験的に知る建物の固有周期とほぼ一致した結果が得られる。

また実際に建物の固有周期が、建物自体の剛性よりもむしろ地盤の硬軟によって決まるという事実も、本論の原理によって説明することができるのではなかろうか。

k	H (m)	$T_{x\phi}$ (sec.)		
		$V_s=200\text{m/s}$	$V_s=300\text{m/s}$	$V_s=400\text{m/s}$
0.5	10	0.223	0.148	0.111
1.0	20	0.397	0.265	0.198
1.5	30	0.639	0.426	0.319
2.0	40	0.931	0.620	0.465

表-2

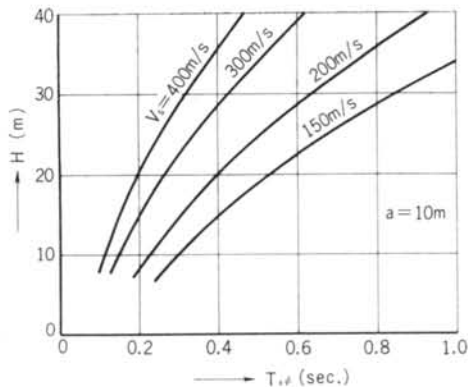


図-29 図-28に示す建物の1次の固有周期

運動方程式は、

$$M\ddot{U}_x + C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d) + K_x(u_x - \phi d) = 0 \quad (81)$$

$$J_y\ddot{\phi} + C_\phi\dot{\phi} + K_\phi\phi - C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d)d - K_x(u_x - \phi d)d = 0 \quad (82)$$

ここで、

$$\dot{U}_x = -\omega^2 u_0 e^{i\omega t} + \ddot{u}_x \quad \text{であるから、式(81)は、}$$

$$M\ddot{u}_x + C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d) + K_x(u_x - \phi d) = \omega^2 u_0 M e^{i\omega t} \quad (83)$$

となる。

$$\text{水平に対する変位波動を} \quad x(u_t) = A_7 \exp\{i\omega(t - \kappa_h z / V_s)\}$$

$$\text{回転に対する変位波動を} \quad z(u_t) = \alpha B_7 \exp\{i\omega(t - \kappa_v z / V_p)\}$$

とおけば、

$$u_x = A_7 e^{i\omega t} \quad \phi = B_7 e^{i\omega t}$$

$$x(p_t)_{z=0} = -iA_7 \rho V_s \kappa_h \omega e^{i\omega t} \quad \int_0^z (p_t)_{z=0} x dS = -iB_7 \rho V_p \kappa_v I_y \omega e^{i\omega t}$$

$\rho V_s \kappa_h S = C_x$, $\rho V_p \kappa_v I_y = C_\phi$ とおいて、式(82), (83)より未定係数 A_7 , B_7 を決定すると、

$$A_7 = \omega^2 u_0 M \{ (K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2) + i\omega(C_\phi + C_x d^2) \} / \Delta_6 \quad B_7 = \omega^2 u_0 M (K_x d + i\omega C_x d) / \Delta_6$$

ただし、

$$\Delta_6 = (K_x - \omega^2 M)(K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2) - \omega^2 C_x C_\phi - K_x^2 d^2 + i\omega \{ (K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2) C_x + (K_x - \omega^2 M)(C_\phi + C_x d^2) - 2K_x C_x d^2 \}$$

よって、地盤の震動を $U_0 = u_0 \frac{\cos}{\sin} \omega t$ とおくと、

$$u_x = \omega^2 u_0 M \sqrt{\frac{(K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2)^2 + \omega^2 (C_\phi + C_x d^2)^2}{\Delta_7}} \frac{\cos}{\sin} \{ (\omega t + \varepsilon_9 - \varepsilon_8) \}$$

$$\phi = \omega^2 u_0 M \sqrt{\frac{K_x^2 d^2 + \omega^2 C_x^2 d^2}{\Delta_7}} \frac{\cos}{\sin} \{ (\omega t + \varepsilon_{10} - \varepsilon_8) \}$$

ただし、

$$\Delta_7 = \{ (K_x - \omega^2 M)(K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2) - C_x C_\phi \omega^2 + K_x^2 d^2 \}^2 + \omega^2 \{ (K_\phi - \omega^2 J_y + K_x d^2) C_x + (K_x - \omega^2 M)(C_\phi + C_x d^2) - 2K_x C_x d^2 \}^2$$

ここで、

$$K_x/M = \omega_x^2, \quad K_\phi/J_y = \omega_\phi^2, \quad \omega/\omega_x = \alpha, \quad \omega_\phi/\omega_x = \beta, \quad M/J_y = m, \quad 2\sqrt{MK_x} = C_{cx}, \quad 2\sqrt{J_y K_\phi} = C_{c\phi}, \quad u_x \text{ および } \phi \text{ の振巾}$$

を $|u_x|$, $|\phi|$ とおくと、

$$|u_x| = \frac{\omega^2 u_0 M}{K_x} \sqrt{\frac{(\beta^2 - \alpha^2 + m d^2)^2 + (2C_\phi/C_{c\phi} + 2C_x/C_{c\phi} \cdot d^2)^2 \alpha^2 \beta^2}{\Delta_8}} \quad (84)$$

$$|\phi| = \frac{\omega^2 u_0 M d}{K_\phi} \beta^2 \sqrt{\frac{1 + (2C_x/C_{c\phi})^2 \alpha^2}{\Delta_8}} \quad (85)$$

§ 8. 地震動による剛な構造物の運動

本章では、調和波形地震動による剛な構造物の運動特性を検討してみよう。

図-30に示すように、地盤の震動を1次元的に考えたとき、空間に固定された座標系に対する基礎重心の座標を U_x 、地盤に対する座標を u_x とすれば、

$$U_x = u_0 e^{i\omega t} + u_x \quad (86)$$

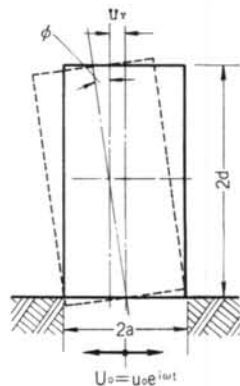


図-30 高い剛構造物の地震動

ただし,

$$d_8 = \{ (1-\alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2 + md^2) - 4C_x C_d / C_{ex} C_{e\phi} \cdot \alpha^2 \beta - md^2 \}^2 + \{ (\beta^2 - \alpha^2 + md^2) 2C_x / C_{ex} \cdot \alpha + (1-\alpha^2)(2C_d / C_{e\phi} + 2C_x / C_{e\phi} \cdot d^2) \alpha \beta - 4C_x / C_{e\phi} \cdot \alpha \beta d^2 \}^2$$

ここで, $\omega^2 u_0 M / K_x$ は慣性力による静的な変位, $\omega^2 u_0 M d / K_\phi$ は慣性力による静的な回転角に相当する.

また, 位相差 $\epsilon_8, \epsilon_9, \epsilon_{10}$ は,

$$\epsilon_8 = \tan^{-1} \frac{(\beta^2 - \alpha^2 + md^2) 2C_x / C_{ex} \cdot \alpha + (1-\alpha^2)(2C_d / C_{e\phi} + 2C_x / C_{e\phi} \cdot d^2) \alpha \beta - 4C_x / C_{e\phi} \cdot \alpha \beta d^2}{(1-\alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2 + md^2) - 4C_x C_d / C_{ex} C_{e\phi} \cdot \alpha^2 \beta - md^2} \quad (86)$$

$$\epsilon_9 = \tan^{-1} \frac{(2C_d / C_{e\phi} + 2C_x / C_{e\phi} \cdot d^2) \alpha \beta}{\beta^2 - \alpha^2 + md^2}, \quad \epsilon_{10} = \tan^{-1} 2C_x / C_{ex} \cdot \alpha \quad (87)$$

さて, $\omega^2 u_0 M / K_x = u_0 \alpha^2$, $\omega^2 u_0 M d / K_\phi = 12k^2 \alpha^2 u_0 / \beta^2 (3 + 4k^2) d$ であり, 式(4)の関係を使い, $\nu = 0.25$, $\kappa_0 = 1.33$, $\kappa_h = 0.92$ として式(84), (85)を n , k をパラメーターとして表わすと,

$$|u_x| = u_0 \alpha^2 \sqrt{\frac{\{9.33 - (3 + 4k^2)\alpha^2 + 12k^2\}^2 + (4.05 + 6.47k^2)^2 \alpha^2 / nk}{d_9}} \quad (88)$$

$$|\phi| = \frac{u_0}{d} \cdot 12k^2 \alpha^2 \sqrt{\frac{1 + 0.29\alpha^2 / nk}{d_9}} \quad (89)$$

ただし,

$$d_9 = \{9.33 - (12.33 + 16k^2 + 2.19/nk)\alpha^2 + (3 + 4k^2)\alpha^4\}^2 + \{9.08 - (5.67 + 8.63k^2)\alpha^2\}^2 \alpha^2 / nk$$

となる.

また位相差 $\epsilon_8, \epsilon_9, \epsilon_{10}$ は,

$$\epsilon_8 = \tan^{-1} \frac{\{9.08 + 6.47k^2 - (5.67 + 2.16k^2)\alpha^2\} \alpha / \sqrt{nk}}{9.33 - (12.33 + 16k^2 + 2.19/nk)\alpha^2 + (3 + 4k^2)\alpha^4} \quad (90)$$

$$\epsilon_9 = \tan^{-1} \frac{4.05\alpha / \sqrt{nk}}{9.33 - (3 + 4k^2)\alpha^2 + 12k^2}, \quad \epsilon_{10} = \tan^{-1} 0.54\alpha / \sqrt{nk} \quad (91)$$

となる.

図-31は一般の鉄筋コンクリート造建物 ($n=0.4$) を想定し, 式(88)について一例を示したものである.

図-32はロッキングの回転角を式(89)より計算したものである.

構造物の任意の点における変位は, 水平動 (swaying) と回転動 (rocking) が合成される. いま, 構造物の中心線を通る最上部の水平変位振巾を図示すると, 図-33のようになる.

同図より, 水平動も回転動も類似した傾向を示し, 水平動による振巾の方が, 回転動によるものよりやや大きいことが理解される.

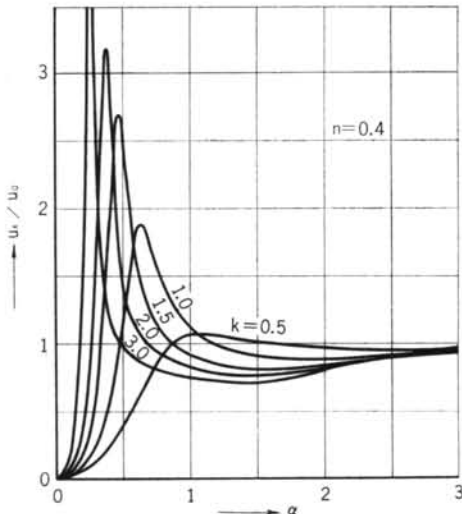


図-31 高い剛構造物の地震動における水平相対変位特性

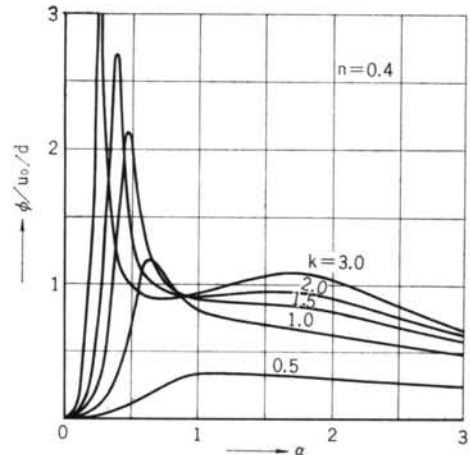


図-32 高い剛構造物の地震動における回転角変位特性

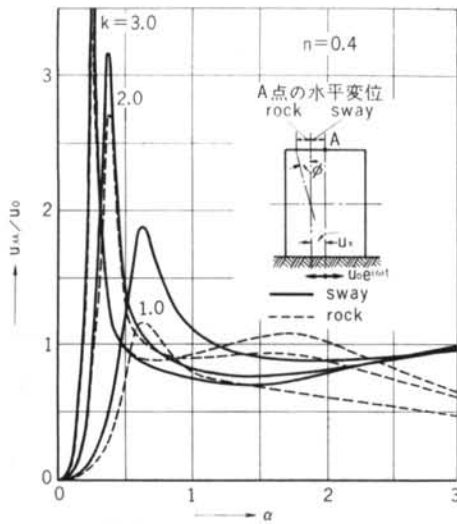


図-33 高い剛構造物の地震動におけるswayingとrocking

図-34は式(9), (10)より地震動に対する構造物の水平および回転運動の位相差を示したものである。

なお、構造物の重心の絶対振巾 U_x は、式(8)にて、

$$D = \alpha^2 \sqrt{\frac{\{9.33 - (3 + 4k^2)\alpha^2 + 12k^2\}^2 + (4.05 + 6.47k^2)^2\alpha^2/nk}{49}}$$

とし、 $\varepsilon = \varepsilon_0 - \varepsilon_9$ とおけば、

$$U_x = u_0 \left\{ \frac{\cos}{\sin} \omega t + D \frac{\cos}{\sin} (\omega t - \varepsilon) \right\} = u_0 \left[\sqrt{D^2 + 2D \cos \varepsilon + 1} \sin(\omega t \pm \varepsilon') \right] \quad (9)$$

図-35は上式より重心の絶対振巾を示したものである。以上は、すべて地震動の変位振巾を一定とした場合であるが、もし地震動の加速度振巾 \mathcal{A}_0 を一定として与えれば、 $\mathcal{A}_0 = \omega^2 u_0$ であるから、式(8), (9)より、

$$|u_x| = \frac{\mathcal{A}_0 M}{K_x} \sqrt{\frac{\{9.33 - (3 + 4k^2)\alpha^2 + 12k^2\}^2 + (4.05 + 6.47k^2)^2\alpha^2/nk}{49}} \quad (10)$$

$$|\phi| = \frac{\mathcal{A}_0 M d}{K_\phi} \cdot 9.33 \sqrt{\frac{1 + 0.29\alpha^2/nk}{49}} \quad (11)$$

となる。

ここで、 $\mathcal{A}_0 M / K_x$ および $\mathcal{A}_0 M d / K_\phi$ は、慣性力が静的に作用したときの水平変位および回転角ということで理解しやすい。

図-36は式(9), 図-37は式(11)について図示したもので $u_{st} = \mathcal{A}_0 M / K_x$, $\phi_{st} = \mathcal{A}_0 M d / K_\phi$ である。

図-36において、 k が大きくなると振巾が著しく大きくなり、しかも、 α の小さい範囲において大きな値を示すのは、 u_{st} (静的な慣性力による水平変位) を単位としているため、 k が大きくなればロッキングによる影響が著しく、水平変位の大部分を占めるからである。

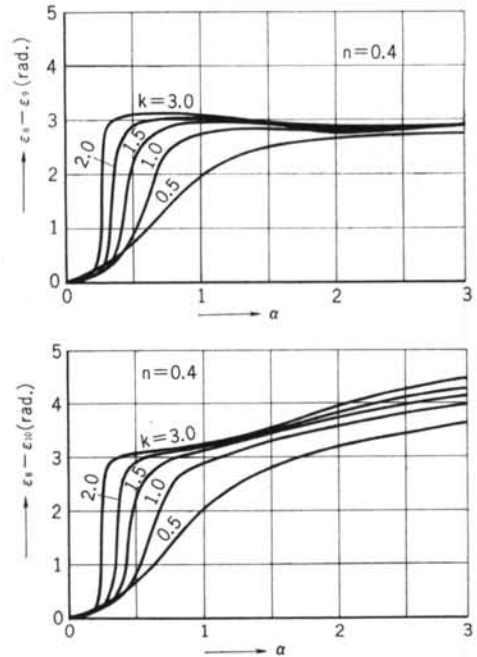


図-34 高い剛構造物の地震動に対する水平運動の位相差

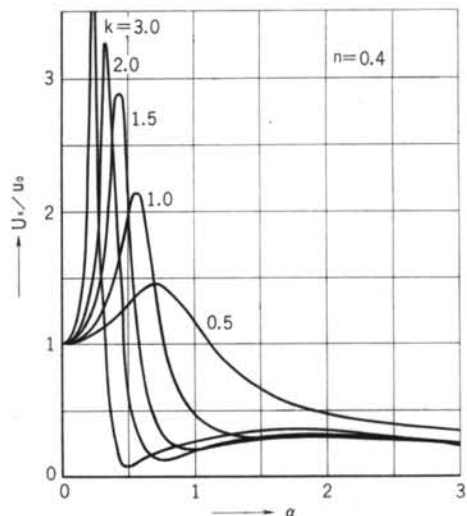


図-35 高い剛構造物の地震動における水平絶対変位

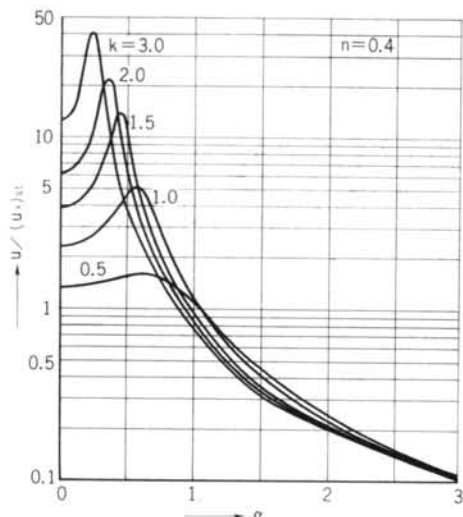


図-36 地震動の加速度振巾を一定とした場合の水平相対変位振巾特性

§ 9. Digital Computer による剛構造建物の地震応答計算法

前章までは、弾性地盤上に置かれた剛構造物の運動をすべて調和波形の連続波として扱い、その運動のさまざまな特性を調べてきた。

本章では、ラムダムな地震入力に対する一般の剛構造建物の応答を、Digital Computer によって求める方法を述べることにしよう。

剛構造建物であっても、原子力施設やその他の重要構築物において、動的検討を行なうことは、耐震設計上極めて重要なことでもある。

図-38に示すように、弾性地盤上におかれた建物を、水平一回転連成系に置きかえる。

ここで、 C_x 、 C_ϕ は前章までに説明したように、波動リアクタンスに相当する見かけの粘性係数であり、摩擦等による地盤の粘性抵抗は無視することにした。

運動方程式は、

$$M\ddot{u}_x + C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d) + K_x(u_x - \phi d) = -M\ddot{x}$$

$$J_y\ddot{\phi} + C_\phi\dot{\phi} + K_\phi\phi - C_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d)d - K_x(u_x - \phi d)d = 0$$

ここで、 $K_x/M = \omega_x^2$ 、 $K_\phi/J_y = \omega_\phi^2$ 、 $M/J_y = m$ 、 $\omega_\phi/\omega_x = \beta$ とおき、 $C_{cx} = 2\sqrt{MK_x}$ 、 $C_{c\phi} = 2\sqrt{J_yK_\phi}$ (critical damping)、 $C_x/C_{cx} = h_x$ 、 $C_\phi/C_{c\phi} = h_\phi$ 、 $C_x/C_{c\phi} = h_x\phi$ として表わせば、式(9)は、

$$\ddot{u}_x + 2h_x\omega_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d) + \omega_x^2(u_x - \phi d) = -\ddot{x}$$

$$\ddot{\phi} + 2h_\phi\beta\omega_x\dot{\phi} + \beta^2\omega_x^2\phi - 2h_x\phi\beta\omega_x(\dot{u}_x - \dot{\phi}d)d - m\omega_x^2d(u_x - \phi d) = 0$$

各変数の因子を、

$$\ddot{u}_x \rightarrow a_{xn}, \quad \dot{u}_x \rightarrow v_{xn}, \quad u_x \rightarrow u_{xn}, \quad \ddot{\phi} \rightarrow a_{\phi n}, \quad \dot{\phi} \rightarrow v_{\phi n}, \quad \phi \rightarrow u_{\phi n} \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

と、デジタルな量に変換すれば、

$$v_{xn} = v_{xn-1} + (a_{xn-1} + a_{xn})\tau/2 \quad u_{xn} = u_{xn-1} + v_{xn-1}\tau + a_{xn-1}\tau^2/3 + a_{xn}\tau^2/6$$

$$v_{\phi n} = v_{\phi n-1} + (a_{\phi n-1} + a_{\phi n})\tau/2 \quad u_{\phi n} = u_{\phi n-1} + v_{\phi n-1}\tau + a_{\phi n-1}\tau^2/3 + a_{\phi n}\tau^2/6$$

ただし、 τ は加速度入力 $\ddot{x}(t)$ の時間軸を等分割する時間巾である。

よって、式(9)をデジタルな表現に直せば、

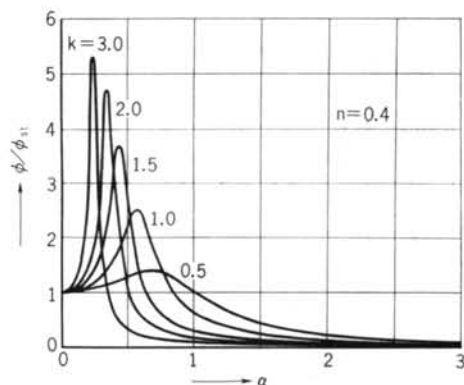


図-37 地震動の加速度振巾を一定とした場合の回転角変位振巾特性

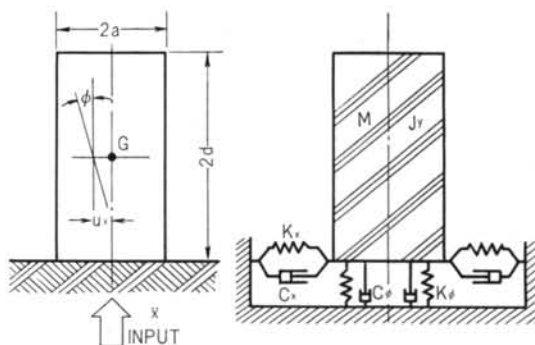


図-38 弾性地盤上の高い剛構造物のモデル置換

$$\left. \begin{aligned} a_{xn} + 2h_x \omega_x (v_{xn} - v_{\phi n} d) + \omega_x^2 (u_{xn} - u_{\phi n} d) &= -\ddot{x} \\ a_{\phi n} + 2h_{\phi} \beta \omega_x v_{\phi n} + \beta^2 \omega_x^2 u_{\phi n} - 2h_{x\phi} \beta \omega_x (v_{xn} - v_{\phi n} d) d - m \omega_x^2 d (u_{xn} - u_{\phi n} d) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{98}$$

ここで、

$$\omega_x \tau = \theta, \quad \omega_x^2 u_{xn} = U_{xn}, \quad \omega_x v_{xn} = V_{xn}, \quad a_{xn} = A_{xn}, \quad \omega_x^2 u_{\phi n} d = U_{\phi n}, \quad \omega_x v_{\phi n} d = V_{\phi n}, \quad a_{\phi n} d = A_{\phi n} \quad \text{99}$$

とおくと、式98は、

$$\left. \begin{aligned} A_{xn} + 2h_x V_{xn} + U_{xn} - U_{\phi n} - 2h_x V_{\phi n} &= -\ddot{x} \\ A_{\phi n} + (2h_{\phi} \beta + 2h_{x\phi} \beta d^2) V_{\phi n} + (\beta^2 + md^2) U_{\phi n} - md^2 U_{xn} - 2h_{x\phi} \beta d^2 V_{xn} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{(100)}$$

式(100)に式99から得られる関係を代入し、 A_{xn} について整理すると、

$$A_{xn} = \frac{-1}{1+h_x\theta+\theta^2/6} \left\{ \ddot{x}_n + U_{xn-1} + (2h_x + \theta) V_{xn-1} + (h_x\theta + \frac{\theta^2}{3}) A_{xn-1} \right. \\ \left. - U_{\phi n-1} - (2h_x + \theta) V_{\phi n-1} - (h_x\theta + \frac{\theta^2}{3}) A_{\phi n-1} + A_{\phi n} \frac{\theta^2}{6} \right\}$$

同様に、 $A_{\phi n}$ について整理すると、

$$A_{\phi n} = \frac{-1}{1+(h_{\phi}\beta+h_{x\phi}\beta d^2)\theta+(\beta^2+md^2)\theta^2/6} \left[(\beta^2+md^2) U_{\phi n-1} + \{2h_{\phi}\beta+2h_{x\phi}\beta d^2+(\beta^2+md^2)\theta\} V_{\phi n-1} \right. \\ \left. + \{(h_{\phi}\beta+h_{x\phi}\beta d^2)\theta+(\beta^2+md^2)\frac{\theta^2}{3}\} A_{\phi n-1} - md^2 U_{xn-1} - (md^2\theta+2h_{x\phi}\beta d^2) V_{xn-1} \right. \\ \left. - (md^2\frac{\theta^2}{3}+h_{x\phi}\beta d^2\theta) A_{xn-1} + (md^2\frac{\theta^2}{6}+h_{x\phi}\beta d^2\theta) A_{xn} \right]$$

両式より、 $A_{\phi n}$ を消去し、 A_{xn} について整理すれば、

$$A_{xn} = \frac{36K_2}{\theta^3(N\theta+6M)-36K_1K_2} \left[\ddot{x} + (1-K_4N) U_{xn-1} + \{(1-K_4N)\theta+2P\} V_{xn-1} + \{(1-K_4N)\frac{\theta^2}{3}+P\theta\} A_{xn-1} \right. \\ \left. + (K_4L-1) U_{\phi n-1} + \{(K_4L-1)\theta+2Q\} V_{\phi n-1} + \{(K_4L-1)\frac{\theta^2}{3}+Q\theta\} A_{\phi n-1} \right] \quad \text{(101)}$$

同様に、 A_{xn} を消去し、 $A_{\phi n}$ について整理すると、

$$A_{\phi n} = \frac{36K_1}{\theta^3(N\theta+6M)-36K_1K_2} \left[K_3 \ddot{x} + (K_3-N) U_{xn-1} + \{(K_3-N)\theta+2R\} V_{xn-1} + \{(K_3-N)\frac{\theta^2}{3}+R\theta\} A_{xn-1} \right. \\ \left. + (L-K_3) U_{\phi n-1} + \{(L-K_3)\theta+2S\} V_{\phi n-1} + \{(L-K_3)\frac{\theta^2}{3}+S\theta\} A_{\phi n-1} \right] \quad \text{(102)}$$

ただし、

$$\left. \begin{aligned} N &= md^2, \quad M = h_{x\phi} \beta d^2, \quad K_1 = 1 + h_x \theta + \theta^2/6, \quad K_2 = 1 + (h_{\phi} \beta + M) \theta + (\beta^2 + N) \theta^2/6, \\ K_3 &= (N \theta^2/6 + M \theta)/K_1, \quad K_4 = \theta^2/6 K_2, \quad L = \beta^2 + N, \quad P = h_x - M K_4, \quad Q = K_4 (h_{\phi} \beta + M) - h_x, \\ R &= K_3 h_x - M, \quad S = h_{\phi} \beta + M - K_3 h_x \end{aligned} \right\} \text{(103)}$$

である。かくして、式99より、

$$\left. \begin{aligned} V_{xn} &= V_{xn-1} + A_{xn-1} \frac{\theta}{2} + A_{xn} \frac{\theta}{2} & U_{xn} &= U_{xn-1} + V_{xn-1} \theta + A_{xn-1} \frac{\theta^2}{3} + A_{xn} \frac{\theta^2}{6} \\ V_{\phi n} &= V_{\phi n-1} + A_{\phi n-1} \frac{\theta}{2} + A_{\phi n} \frac{\theta}{2} & U_{\phi n} &= U_{\phi n-1} + V_{\phi n-1} \theta + A_{\phi n-1} \frac{\theta^2}{3} + A_{\phi n} \frac{\theta^2}{6} \end{aligned} \right\} \text{(104)}$$

となり、 $t=0$ より出発し、式(101)、(102)、(104)を順次繰返し計算することによって、剛構造建物の地震応答が得られる。

必要なデータ：

- (1) 建物の寸法、 α および d
矩形基礎で正方形に近い場合には、 $\alpha = 0.55 \sqrt{S}$ より換算する。
- (2) 建物の平均密度 ρ' と地盤の密度 ρ
- (3) 支持地盤の横波速度 V_s

予備計算：($\nu=0.25$ とする)

- (1) 巾高比 $k=d/a$
- (2) 密度比 $n=\rho'/\rho$
- (3) 水平の静的固有振動数 $\omega_x=0.85V_s/a\sqrt{nk}$ 註10)
- (4) 水平の減衰常数 $h_x=0.27/\sqrt{nk}$ 註11)
- (5) 回転の減衰常数 $h_\phi=0.66/\sqrt{nk(3+4k^2)}$ 註12)
- (6) $\beta=3.06/\sqrt{3+4k^2}$ 註13)
- (7) $N=12k^2/(3+4k^2)$ 註14)
- (8) $M=3.24k^2/(3+4k^2)\sqrt{nk}$ 註15)

本計算：

- (1) 初期条件 $t=0$ のとき, $\ddot{x}_0=A_{x0}=A_{\phi 0}=V_{x0}=V_{\phi 0}=U_{x0}=U_{\phi 0}=0$
- (2) $t=n\tau(n=1,2,3,\dots)$ において, 式(101), 式(104)の第1および第2式, 式(102), 式(104)の第3および第4式の順に, 逐次計算する。

以上の関係式によるプログラムを点検する目的で, 次の例題について実際に計算してみた。図-39に示すように, いま直径20m, 高さ40mの円形の建物を想定し, $n=0.4$,

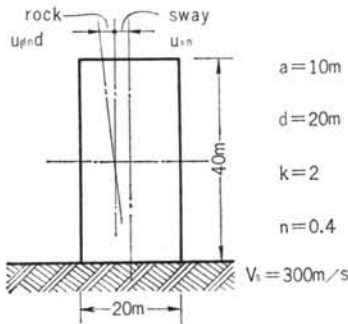


図-39 例題のモデル

$V_s=300\text{m/s}$ と仮定した。

この建物の固有周期を §7 の方法で計算すると, $T_{x\phi}=0.91\text{sec.}$ になる。

入力として与える地震波を,

$$\ddot{x}=\omega^2 u_0 \sin \omega t$$

とし, $\omega/\omega_x=\alpha$ であるから,

$$\ddot{x}=\alpha^2 \omega_x^2 u_0 \sin \alpha \omega_x t \quad (105)$$

と表現される。いま, $u_0=0.1\text{cm}$, $\alpha=0.5$ とすれば,

$$\ddot{x}=203.2 \sin 14.26 t \quad (106)$$

となる。すなわち, 加振度振幅203.2gal, 振動数2.27c/sの正弦波ということになる。

$\tau=0.02\text{sec.}$ として, この地震応答を求めると図-40のようになる。

同図より, 地震が入射後ほぼ2秒後には定常状態に入り, $|u_{xn}|=1.3\text{mm}$, $|u_{\phi n d}|=1.2\text{mm}$ となる。

この値は §8 の式88, 式89より求めた値とほぼ完全に一致し, このような方法によって剛構造建物の地震応答を求めることは, 実用上問題はないようである。

§10. 2質点系の地震動

前章までは, 主として弾性地盤上におかれた剛体の運動について論じてきた。一般に, 高層建物の動的解析で試みられているように, 構造物を質点系に置きかえたとき, 地盤による波動リアクタンスが各質点の運動にどんな効果を与えるだろうか, 甚だ興味深い問題でもある。

本章では, その最も簡単な例として, 2質点系の調和波形地震動の場合を考えてみよう。

図-41を参照し, 運動方程式は,

$$M_1 \ddot{U}_1 + K_1(u_1 - u_2) = 0 \quad (107)$$

$$M_2 \ddot{U}_2 + K_1(u_2 - u_1) + K_2 u_2 - S(p_t)_{z=0} = 0 \quad (108)$$

ここで,

M_1 : 上部質点の質量 M_2 : 下部質点の質量

U_1 : 上部質点の絶対変位 U_2 : 下部質点の絶対変位

u_1 : 地盤に対する上部質点の変位

u_2 : 地盤に対する下部質点の変位

K_1 : 上部質点を支えるばね常数

K_2 : 地盤のばね常数

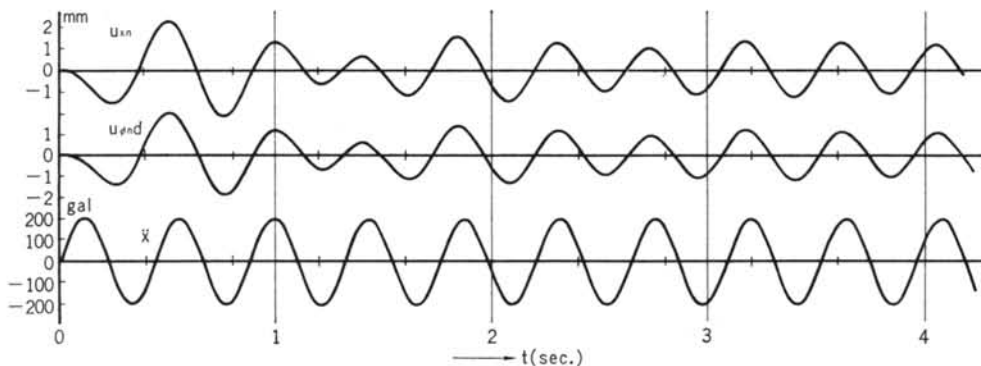


図-40 調和波形連続波による地震応答計算例

$$U_1 = u_0 e^{i\omega t} + u_1, \quad U_2 = u_0 e^{i\omega t} + u_2 \quad (109)$$

であるから、式(107), (108)は、

$$M_1 \ddot{u}_1 + K_1(u_1 - u_2) = u_0 \omega^2 M_1 e^{i\omega t} \quad (110)$$

$$M_2 \ddot{u}_2 + K_1(u_2 - u_1) + K_2 u_2 - S(p_t)_{z=0} = u_0 \omega^2 M_2 e^{i\omega t} \quad (111)$$

M_2 より地盤に輻射される波動は A_8 を未定係数として、

$$u_1 = A_8 \exp\{i\omega(t - \kappa z/V)\}$$

M_1 の変位は B_8 を未定係数として、 $u_1 = B_8 e^{i\omega t}$

で与えられるから、式(110), (111)より、

$$A_8 = \frac{(K_1 - \omega^2 M_1)\omega^2 M_2 + K_1 \omega^2 M_1}{(K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - K_1 \omega^2 M_1 + i\omega C_e (K_1 - \omega^2 M_1)} u_0$$

$$B_8 = \frac{\omega^2 \{(M_1 + M_2)K_1 + M_1 K_2 - \omega^2 M_1 M_2 + i\omega C_e M_1\}}{(K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - K_1 \omega^2 M_1 + i\omega C_e (K_1 - \omega^2 M_1)} u_0$$

ここで、 $C_e = \rho V \kappa S$ で、 S は基礎の接地面積である。

いま、地震動を $U_0 = u_0 \frac{\cos}{\sin} \omega t$ とすれば、

$$u_1 = \omega^2 u_0 \sqrt{\frac{\{(M_1 + M_2)K_1 + M_1 K_2 - \omega^2 M_1 M_2\}^2 + \omega^2 C_e^2 M_1^2}{\{(K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - K_1 \omega^2 M_1\}^2 + \omega^2 C_e^2 (K_1 - \omega^2 M_1)^2}} \frac{\cos}{\sin} \{(\omega t + \varepsilon_{12} - \varepsilon_{11})\}$$

$$u_2 = \omega^2 u_0 \sqrt{\frac{(K_1 - \omega^2 M_1)M_2 + K_1 M_1}{\{(K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - K_1 \omega^2 M_1\}^2 + \omega^2 C_e^2 (K_1 - \omega^2 M_1)^2}} \frac{\cos}{\sin} \{(\omega t - \varepsilon_{11})\}$$

となる。ここで、 u_1 および u_2 の振巾を $|u_1|$, $|u_2|$ とし、 $K_1/M_1 = \omega_1^2$, $K_2/M_2 = \omega_2^2$, $\omega/\omega_1 = \alpha$, $\omega_2/\omega_1 = \beta$, $M_1/M_2 = m$, $2\sqrt{M_2 K_2} = 2M_2 \omega_2 = C_{ce}$ とおくと、

$$|u_1| = \frac{\omega^2 u_0 M_1}{K_1} \sqrt{\frac{(1+m+\beta^2-\alpha^2)^2 + (2C_e/C_{ce})^2 \alpha^2 \beta^2}{\{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2\}^2 + (2C_e/C_{ce})^2 \alpha^2 \beta^2 (1-\alpha^2)^2}} \quad (112)$$

$$|u_2| = \frac{\omega^2 u_0 M_2}{K_2} \cdot \frac{\beta^2(1-\alpha^2+m)}{\sqrt{\{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2\}^2 + (2C_e/C_{ce})^2 \alpha^2 \beta^2 (1-\alpha^2)^2}} \quad (113)$$

また、位相差 ε_{11} , ε_{12} は、

$$\varepsilon_{11} = \tan^{-1} \frac{\alpha\beta(2C_e/C_{ce})(1-\alpha^2)}{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2} \quad (114) \quad \varepsilon_{12} = \tan^{-1} \frac{\alpha\beta(2C_e/C_{ce})}{1+m+\beta^2-\alpha^2} \quad (115)$$

式(112), (113)が本例の解の一般形である。

なお、 $\omega^2 u_0 M_1/K_1$ および $\omega^2 u_0 M_2/K_2$ は、それぞれ M_1 および M_2 の慣性力による静的な変位に相当する。

さて、いま地震動を水平動として考えれば、

$$\omega^2 u_0 M_1/K_1 = u_0 \alpha^2 \quad \omega^2 u_0 M_2/K_2 = u_0 \alpha^2/\beta^2 \quad \left(\frac{2C_e}{C_{ce}}\right)^2 = \frac{(2-\nu)\pi^2 \kappa h^2}{8} \cdot \frac{\rho \alpha^2}{M_2}$$

となるから、 $\nu=0.25$ として式(112), (113)を整理すると、

$$|u_1| = u_0 \alpha^2 \sqrt{\frac{(m+\beta^2-\alpha^2)^2 + 1.83\alpha^2 \beta^2/b_2}{\{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2\}^2 + 1.83\alpha^2 \beta^2 (1-\alpha^2)^2/b_2}} \quad (116)$$

$$|u_2| = u_0 \alpha^2 \frac{1-\alpha^2+m}{\sqrt{\{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2\}^2 + 1.83\alpha^2 \beta^2 (1-\alpha^2)^2/b_2}} \quad (117)$$

となる。ただし、 b_2 は下部基礎の質量比で、 $b_2 = M_2/\rho a^3$ である。また、位相差に関しては、

$$\varepsilon_{11} = \tan^{-1} \frac{1.35\alpha\beta(1-\alpha^2)\sqrt{b_2}}{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2} \quad (118) \quad \varepsilon_{12} = \tan^{-1} \frac{1.35\alpha\beta\sqrt{b_2}}{1+m+\beta^2-\alpha^2} \quad (119)$$

となる。一例として、 $m=1.0$, $b_2=1.0$ として式(116), (117)を計算し、図-42, 図-43に示した。

図-42から、 β が大きくなると共振時にかなり振巾が大きくなること、また、上部系に減衰抵抗を考慮しなくても M_1 の振巾は無限大にならないことなどが理解される。

また、同図は横軸を α 、すなわち ω_1 を単位として表わされているが、上部構造の固有周期の変化による応答の変化を調べるには、§4でも述べたように、 ω_2 を単位として表現した方が便利である。

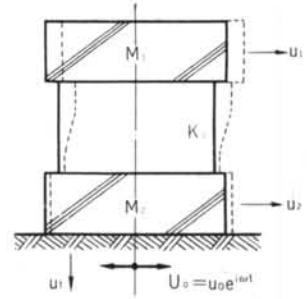


図-41 2質点系の地震動

$\omega/\omega_2 = \alpha/\beta$ なることを使って、図-42に相当する図を書き改めたものが図-44である。

同図より、上部構造の固有振動数を小さくすることは高い振動数に対して有利であるが、共振時にはかなり振巾が大きくなることわかる。

図-45は質量比 b_2 の変化に対する共振特性の変化を示す一例である。同図より、 b_2 の変化は共振時の振巾には大きく影響するが、その振動数にはあまり関係しないことわかる。

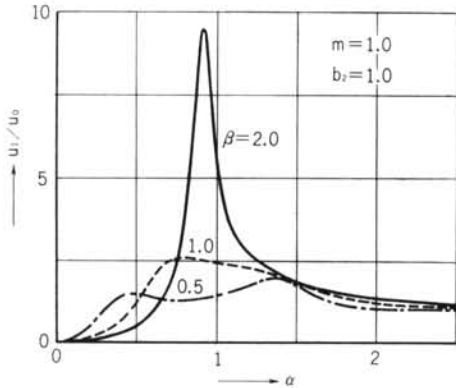


図-42 2質点系の地震動における M_1 の変位振巾特性

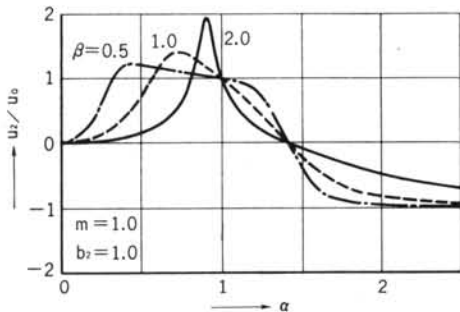


図-43 2質点系の地震動における M_2 の変位振巾特性

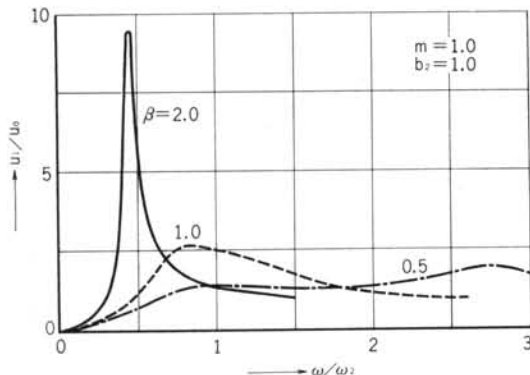


図-44 図-42の横軸を ω_2 を単位として表わしたの

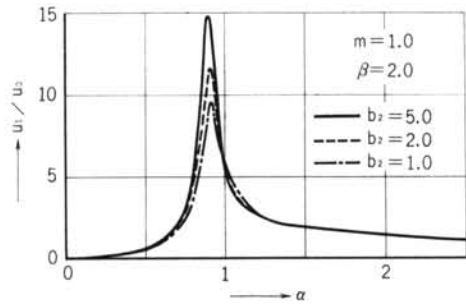


図-45 M_2 の質量比の変化に対する M_1 の変位振巾特性の変化

§ 11. 矩形基礎の計算

前章までは、すべて円形断面をもった基礎および構造物について扱ってきた。

しかし、一般の構造物の基礎は、大部分が矩形断面になっている。矩形断面とすることによって、計算上の取扱いが極めて複雑になるので、実用上は矩形基礎を等価の円形基礎に置きかえて考えるのが便利であろう。

このような置換によって、

- (1) 接地面積を等しくする
- (2) 上下、水平のばね常数を等しくする
- (3) 回転のばね常数を等しくする

ことが望ましい。

しかし、これら三つの条件をすべて満たすような置換は不可能である。

まず、(1)の接地面積を等しくするためには、矩形断面の面積を S_R 、等価半径による円形断面の面積を S_e と

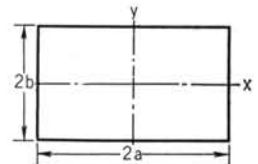


図-46 矩形基礎断面

すると、 $S_R = 4ab$ 、 $S_e = \pi a_e^2$ (a_e は円形断面に置換した等価半径)であるから、

$$a_e = \frac{2}{\sqrt{\pi}} a \sqrt{\frac{b}{a}} = 1.13a \sqrt{\frac{b}{a}} \quad (120)$$

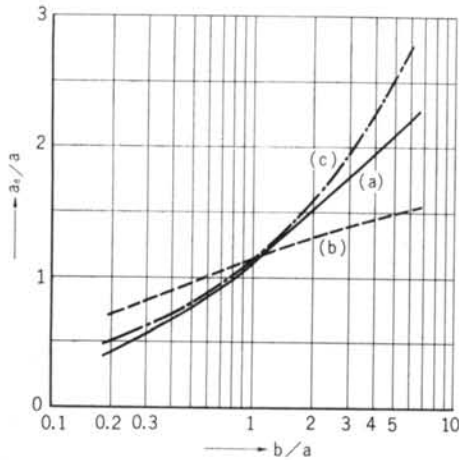
となる。

図-47の(c)曲線は、これを示したものである。

次に、(2)の上下、水平のばね常数を等しくするために、例を上下にとり、田治見氏^{文2)}の結果を引用すれば、

$$a_e = \frac{2}{\pi} a \left\{ \lg \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + \frac{b}{a} \lg \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{a}{b} \right) \right\} \quad (121)$$

となる。同図の(a)曲線は、これを示したものである。



図一47 上下のばね常数(a), 回転のばね常数(b), 接地面積(c)を等しくしたときの等価半径

また、(3)の回転のばね常数を等しくするためには、回転軸をy軸にとり、やはり田治見氏の結果を引用し、

$$a_e^3 = \frac{4}{\pi} a^3 \left[\log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{b}{a} \right) + \left(\frac{b}{a} \right)^3 \left\{ \frac{a}{2b} \sqrt{1 + \left(\frac{a}{b} \right)^2} - \frac{1}{2} \log \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{a}{b} \right) \right\} \right] \quad (122)$$

となる。

図一47の(b)曲線は、これを示したものである。

さて、図一47より、(a)、(c)曲線はほぼ近接しているが、(b)曲線だけが異質的な傾向を示している。

すなわち、 $b/a=1$ (正方形)の附近では、三つの条件がほぼ満たされるが、 b/a が1より離れるほど三者の開きが大きくなるのがわかる。

これらの結果より、矩形基礎の計算に当って、次のような注意が必要であることがわかる。

(1) 回転運動を考えないとき、または、無視できる場合には、 b/a のかなり広い範囲($0.2 < b/a < 5$ ぐらい)にわたって、次式による円形断面への換算は実用上問題は無い。

$$a_e = 0.55 \sqrt{S} \quad (123)$$

(2) 回転運動を考えると、または、無視できない場合には、式(123)による換算は、せいぜい $0.7 < b/a < 1.4$ ぐらいの範囲で考えないと、回転による誤差が大きくなる。

(3) $b/a < 0.7$, $b/a > 1.4$ ぐらいの場合で、回転の効果が大きいと思われる場合には、(a)、(b)両曲線の間値ぐらいで、等価半径の換算を行なって近似するのがよいであろう。

<註記>

註1) κ は平面波の場合には $\kappa=1$ であるが、半無限状の弾性地盤に逸散する場合は、田治見氏^{文2)}の計算によって上下動の場合はポアソン比にほとんど無関係に $\kappa=1.33$ 、水平動の場合は $\kappa=1.04(\nu=0)$, $0.92(\nu=0.25)$, $0.86(\nu=0.5)$ となっている。

したがって、本論の数値計算では、すべて $\nu=0.25$ とし、 $\kappa=1.33$ (上下), $\kappa=0.92$ (水平)としてある。

註2) 接地圧分布を等分布と仮定すれば、

$$w_z = \frac{1-\nu}{2\pi\mu} \cdot \frac{P}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{1}{r} dr d\theta = \frac{1-\nu}{\pi a \mu} P$$

よって、静的ばね常数は、

$$K_z = \pi a \mu / (1-\nu) = \pi a \rho V_s^2 / (1-\nu)$$

となり、式(7)の場合の $\pi/4$ 倍になっている。

註3) 静的ばね常数とは、Boussinesq や Cerruti の地中応力論から求めるのが合理的であり、式(6)、(10)で与えられるように、基礎の半径に比例するものである。

一般に、動的K値とか地盤係数で定義されているものは、基礎の接地面積に比例している。この点に根本的な差異があることを留意しておきたい。

註4) 波動効果を組込んだこの種の理論^{文1),2),3)}において、地盤に逸散する弾性波はすべて横波として扱われている。しかし、実際に固定基礎について行なった幾多の強制振動試験例によると、上下動の場合に著しい矛盾を生ずる。その矛盾は、波動をその発生機構からみて、縦波として扱うことによって解消される。

そこで本論では、上下動と回転動の場合の波動の形態をすべて縦波として扱ってある。縦波とすることによって、波動リアクタンスが $\sqrt{3}$ 倍になり、それだけ減衰効果が著しくなるのである。

参考までに、横波とした場合の式(8)に相当する解は、次のようになる。

$$u = \frac{u_{st} \frac{\cos}{\sin} \{ (\omega t - \epsilon) \}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{(1-\nu)\pi^2 \kappa^2}{4} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}}$$

註5) 接地圧分布を等分布と仮定すれば、

$$K_z = 2\pi a \mu / (2-\nu)$$

となる。したがって、式(11)に相当する解は、

$$u = \frac{u_{st} \frac{\cos}{\sin} \{ (\omega t - \epsilon) \}}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}\right)^2 + \frac{(2-\nu)\pi^2 \kappa^2}{2} \cdot \frac{\rho a^3}{M} \cdot \frac{\omega^2}{\omega_{st}^2}}}$$

となる。附図一1は Boussinesq 型分布と等分布の場合との差異を示したものである。

註6) 附図一2, 3, 4は本論の結果と、Arnold, 田治見氏の結果と比較したものである。ただし、比較のた

め、上下動における波動の形態を横波としてある。

附図-2では縦軸の単位を、

$$u_{st} = F_0/K_x = (2-\nu)F_0/8\rho V_s^2$$

で換算し、Arnold の表現に合わせてある。

附図-4の横軸の κa は、田治見氏のディメンションに合わせ、この図における κ は、本論の $\kappa\omega_{st}/V_s$ の意味である。したがって、質量比とは次の関係がある。

$$\begin{aligned} \kappa a &\rightarrow \kappa a \omega_{st}/V_s = 2\kappa\sqrt{2/(2-\nu)} \cdot \rho a^3/M & (\text{水平}) \\ &= 2\kappa\sqrt{1/(1-\nu)} \cdot \rho a^3/M & (\text{上下}) \end{aligned}$$

註7) 接地圧分布を三角分布と仮定すれば、

$$K_\phi = \pi\rho V_s^2 a^3/2(1-\nu)$$

となる。

註8) 本論で上下動における波動の形態を横波とすれば

$$h_e = 0.48W^{-1/2} S^{3/4}$$

となる。田治見氏の結果^{文2)}では、

$$h_e = 0.47W^{-1/2} S^{3/4}$$

であるから、ほぼ完全に一致している。

註9) 慣性比 $J/\rho a^5$ は、円形基礎の比較的薄い場合、

$J = Ma^2/4$ であるから、 $J/\rho a^5 = 0.25M/\rho a^3$ となる。

したがって、 $J/\rho a^5$ の0.23は $M/\rho a^3$ の0.92に相当する。

註10) $K_x = 8\rho V_s^2 a^3/(2-\nu)$ 、 $K_\phi = 8\rho V_s^2 a^3/3(1-\nu)$ なる

$$\text{ことを使って、}\omega_x = \sqrt{K_x/M} = 2V_s/a\sqrt{\pi(2-\nu)nk}$$

註11) $C_x = \rho V_s \kappa_h S$ であるから、

$$h_x = \kappa_h \sqrt{\pi(2-\nu)} / 8\sqrt{nk}$$

註12) $C_\phi = \rho V_p \kappa_v I_y$ であるから、

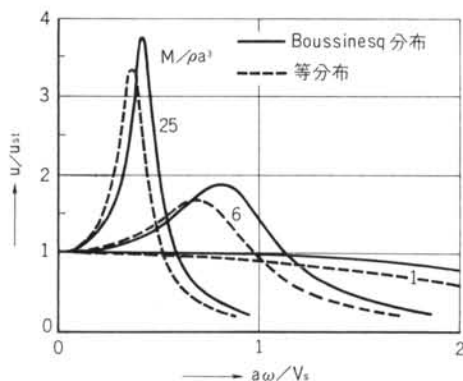
$$h_\phi = 3\sqrt{\pi(1-\nu)\kappa_v/8}\sqrt{2nk(3+4k^2)(1-2\nu)}$$

註13) $\beta = \omega_\phi/\omega_x = 2\sqrt{(2-\nu)/(1-\nu)(3+4k^2)}$

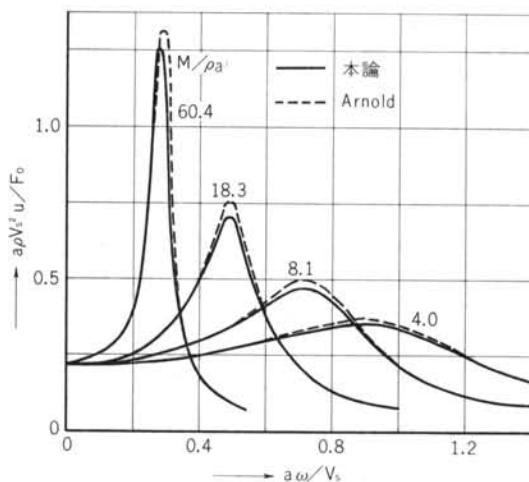
註14) $L = md^2 = Md^2/J_y = 12k^2/(3+4k^2)$

註15) $M = C_x/C_\phi \cdot d^2\beta$

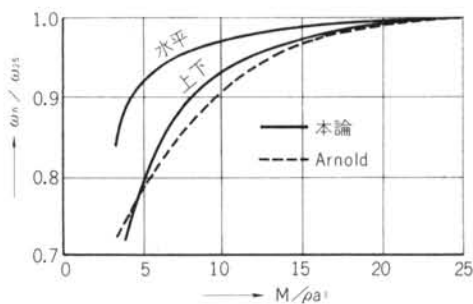
$$= 3\kappa_h k^2/2(3+4k^2) \cdot \sqrt{\pi(2-\nu)/nk}$$



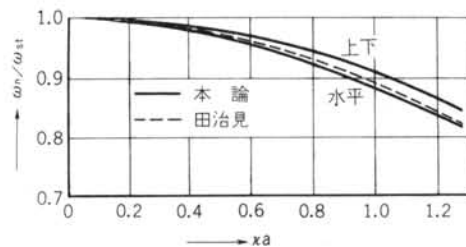
附図-1 基礎の接地圧を Boussinesq 分布および等分布と仮定したときの差異



附図-2 Arnold と本論の結果との比較



附図-3 Arnold と本論の結果との比較 (Arnold の結果は防振基礎設計法: 大築志夫著: より引用)



附図-4 田治見氏と本論の結果との比較

おわりに

最近、耐震工学の新しい傾向として、実際の地震による建物の運動を動的に追求しようとし、それがまた、中心的課題になっている。しかし、実際の建物は、それ自身が甚だ複雑な力学的構成になっている上に、さらに、不可解な地盤の上に建っているのであるから、その運動を理論的に正確に把えることは非常にむづかしい。

特に、地盤の持つ力学的要素が、建物の振動特性に及ぼす影響は大きい。最近、原子力関係の構築物やその他

の重要構造物のように、極めて剛な構造物であっても、設計上動的解析を要求されることすらある。

剛な建物においては、地盤の持つ弾性的要素がすべてあり、その究明は目下急務となっている。

本研究は、特に波動による減衰効果に新しい着想を加え、主として剛な構造物の振動性状を中心に、理論的に解析したものである。

元来、全く不可解と考えられている地盤の持つ力学的要素を具体化しようと努めたものであり、把えがたいその実体の一面相を暴露し得たものであれば幸いである。

本理論は、機械基礎のように模型的規模においては、

実験値と極めて良い一致をみるものであり、実在の建物等についても、比較する実測資料を目下蒐集中ではあるが、傾向として、現象の説明を合理的にされる見通しを得ている。

本研究は今後、地下壁の効果、矩形基礎の一般的取扱、柔構造物への応用、地盤が成層をなす場合の影響等に発展させる予定にしている。

最後に、本研究に当って、再三貴重な御意見を賜った大築志夫研究所長と、複雑な数値計算を快諾して下さった計算課の宮崎徳次郎課長および奥山吉松氏に、深い感謝と敬意を表する次第であります。

<参考文献>

- 1) 弾性地盤上の機械基礎強制振動の計算：鳥海勲：地震 Ser. II, Vol. 7 No. 4
- 2) 耐震理論に関する基礎的研究：田治見宏：生産技術研究所報告, Vol. 8 No. 4
- 3) 基礎地盤の Dynamic Compliance を考慮した構造物の線型地震応答 など一連の研究：小堀輝二：建築学会論文報告集, No. 103 etc.
- 4) 建物の動的耐震設計入門(4)：中川恭次：建築技術

■ 後 記

この種の問題の解法は案外古くから行なわれている。

1936年に Reissner⁽¹⁾ は、円形基礎に上下動の調和波振動を作用させたときの解を与え、この分野の研究の端緒を切った。彼は接地圧を均等分布とし、無次元化された振動数 $\omega_0 = \omega a \sqrt{\rho/\mu} = \omega a/V_s$ の関数として基礎の中心の変位を求めている。

後に彼は、基礎の中心軸まわりの振り振動の問題に拡張し、同様な解を与えている^{(2), (3)}。

その後 Sung⁽⁴⁾ は接地圧分布を均等分布のほか、Rigid Base および Parabolic Loading の3種類に仮定したときの解を出している。

つづいて鳥海⁽⁵⁾、Arnold⁽⁶⁾ 等も、円形基礎について同様な解析を行ない、前者では水平、上下および回転の場合の解を与えている。

さらに、Thomson および小堀^{(7), (8)} は、これらの考え方を矩形基礎に普遍し、接地圧を均等分布として解を与えている。

これら一連の研究では、動変位に関する最終解を、

$$\left. \begin{aligned} \text{円形基礎} \quad u &= F/a\mu \cdot [f_1 + if_2] \\ \text{矩形基礎} \quad u &= F/\pi^2 bc\mu \cdot [f_1 + if_2] \end{aligned} \right\} (a)$$

なる形で表わしている。

ここで、 b, c は矩形断面の2辺の1/2であり、

$[f_1 + if_2]/\pi^2 bc\mu$ に相当する項を Grand Compliance と呼び、剛性 (Stiffness) の逆数の次元を持っている。

田治見⁽⁹⁾ は、動変位に関する式を、

$$u = F/K_f \cdot [f_1 + if_2] \quad K_f: \text{静的剛性}$$

なる形で与え、 $[\quad]$ 内を振動アドミッタンスと呼び、オリジナルな方法で振動数の一般式として表わす解を与え Reissner や Arnold とほぼ一致した結果を得ている。

同氏は、さらに矩形基礎の場合の振動アドミッタンスを求めている。

以上、簡単に紹介したように、過去に優れた数々の論文が発表されているにもかかわらず、さらに本研究を行なっているのは、次のような理由による。

(1) 既往の研究は接地圧の分布を Fourier-Bessel 積分で表わし、それを境界条件に用いている。

そのため、Grand Compliance の計算の積分が極めて複雑で、これを数値計算によるほかになく、振動数 ω の一般式として表わすことができない。

(2) この種の問題を実用面で応用するとき、結局は等価のばね常数と減衰係数に置きかえることになるであろうが、その置きかえが計算技術上容易ではない。

(3) もともと理想化された仮定にもとづく解析であり、自然の地盤という甚だ曖昧な媒体を対象としているのであるから、いずれにせよ近似解であることに変わりない。

(4) 現象として逸散型の減衰効果は、いまやよく知られていて、地盤上の構造物の振動を論ずるとき、それを

無視することはできない。したがって、近似的でも、実用的な解法が望まれる。

ここで、本研究の近似的なることの意味を補足しておこう。

本研究で得られる地盤のばね常数 K は、静的な場合の理論値であり、動的な場合にもそのまま保存されるという前提にもとづいている。

また、波動現象にもとづく応力は、波動が接地面から平面波状に輻射されるものとして導入している。

かくして、質量のない footing について、その動的な変位を、既往の諸研究の結果と比較する意味で、

$$u = F/K + i\omega C_e = F/a\mu \cdot [f_1 + if_2] \quad (b)$$

なる形で表わせば、上下動の場合には、

$$f_1 = 4(1-\nu)/\{16 + (1-\nu)^2\kappa^2\pi^2 a_0^2\}$$

$$f_2 = -\kappa\pi(1-\nu)^2 a_0 / \{16 + (1-\nu)^2\kappa^2\pi^2 a_0^2\}$$

となる。

$\nu=0.25$ 、接地圧分布を Rigid Base として、Sung⁽⁴⁾の結果と比較すると、図-a のようになる。

同図より、 $a_0 (= \omega a / V_s)$ が小さい範囲 (0~0.15) では、両者の傾向がよく一致していることがわかる。

一方、小堀の結果⁽¹⁰⁾でも、Grand Compliance を等価のばね常数 K_e と粘性係数 C_e に換算したとき、 K_e および C_e が、 a_0 の小さい範囲 (0~2) においてほぼ一定値になることが示されている。すなわち、 a_0 の小さい

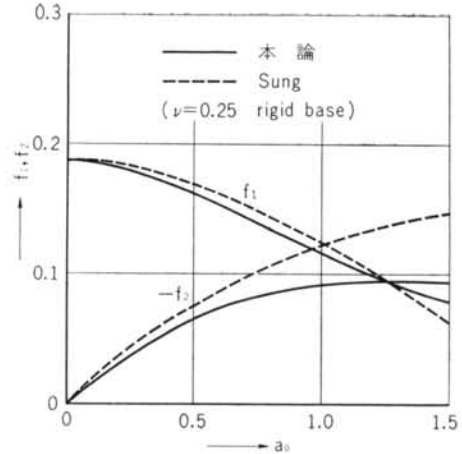


図-a

帯域では K_e, C_e ともに入力振動数に無関係な定数として与えられる可能性を示唆している。

実際に機械基礎または地震応答の問題で、 a_0 は 0~2 (Sung はこれを 0~1.5 としている) の範囲に入る場合が大部分であり、本論の適用に問題はないのである。

さらに、本論では多自由度を持つ連成系の解法が、一般の線型振動と同等の手法によって、 ω の一般式として導くことができる点、既往の論文にみられない利点の一つになっている。

<文献>

- (1) E. Reissner, "Stationäre axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes", Ingenieur-Archiv, vol. 7, 1936, pp. 381~396
- (2) E. Reissner, "Freie und erzwungene Torsionsschwingungen des elastischen Halbraumes", Ingenieur-Archiv, vol. 8, 1937, pp. 229~245
- (3) E. Reissner and H. F. Sagoci, "Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space", Journal of Applied Physics, vol. 15, 1944, pp. 652~662
- (4) T. Y. Sung, "Vibration in Semi-Infinite Solids Due to Periodic Surface Loading", ASTM Symposium on Dynamic Testing of Soils, ASTM Special Technical Publication, No. 156, 1953, pp. 35~63
- (5) I. Toriumi, "Vibrations in Foundations of Machines", Technology Report of the Osaka University, Japan, vol. 5, No. 146, 1955.
- (6) R. N. Arnold, G. N. Bycroft, and G. B. Warburton, "Forced Vibration of a Body on an Infinite Elastic Solid", Journal of Applied Mechanics, vol. 22, Trans. ASME, vol. 77, 1955, pp. 391~400
- (7) W. T. Thomson and T. Kobori, "Dynamic Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space", Journal of Applied Mechanics, vol. 30, 1963, pp. 579~584
- (8) T. Kobori, "Dynamical Response of Rectangular Foundation of an Elastic-Space", Proceedings of Japan National Symposium on Earthquake Engineerings, 1962, pp. 81~86
- (9) H. Tajimi, "Basic Theories on Aseismic Design of Structures", Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, vol. 8, No. 4, 1959
- (10) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木有, "弾性基礎の動的応答", 日本建築学会近畿支部大会論集文, 1954