

基礎の回転および水平動を伴うせん断振動系

小西康之
山原浩
大築志夫

はじめに

弾性地盤上に立つ構造物に外力が作用したとき、構造物はそれ自体の弾性的変形のほか、地盤の変形による影響を受けるであろう。

一般の建物等の運動を2次元的に考えれば、特に細長くない限り弾性的変形の大部分をせん断変形が占め、地盤の変形は水平動と基礎まわりの回転動に分類される。

本研究は構造物を一様なせん断棒と見なし、基礎の回転と水平動が加わった振動系の非減衰自由振動問題に関して、一般的な解析を試みたものである。

この種の問題に関しては、過去に梅村^{文1)}および筆者の一人^{文2)}によって固有値方程式の解が与えられている。

構造物をせん断棒と考えているため、無限数の固有値が存在し、運動の一般解は無限数の固有関数にそれぞれ未定係数を乗じて加え合わせたものになる。

これら無限数の未定係数は初期条件によって定められるが、これを直交理論を使って一般的な解を導いた。

これより、任意の impulse に対する解が求まるから、このような系に対する任意地動に対する応答も計算できるはずである。そして系全体の応答が求まれば、その中の構造体変形がとり出せるから、その時の構造体の応力も計算できる。

また、建物の自由振動試験等の解析にも重要な役割りを果たしうるものと思われる。

§ 1. 固有値方程式

図-1 に示すように、弾性地盤上に立つ構造物を、基礎における回転と水平動および上部構造のせん断変形の3つの運動の自由度を持つものとする。

構造体の任意の点における振動変位 x は、つぎのように表わされる。^{註1)}

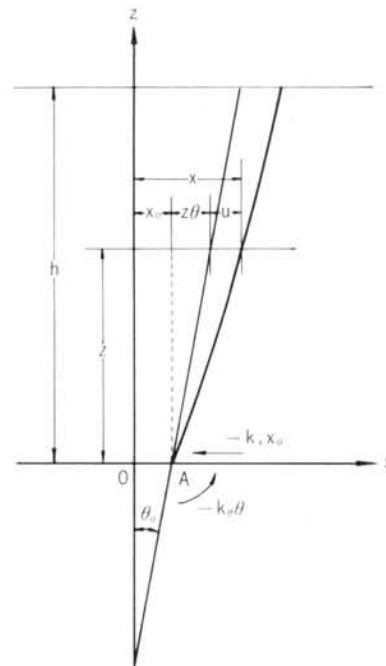


図-1

$$x = (u + \theta_0 z + x_0) e^{i\omega t} \dots\dots\dots(1)$$

ここで

u : 構造体のせん断変位振巾

θ_0 : 基礎の回転角振巾

x_0 : 基礎と地盤間の相対変位振巾

z : 接地面から計った構造体の高さ

ω : 円振動数 t : 時間 $i = \sqrt{-1}$

である。いま

K_x : 地盤の水平ばね常数

K_θ : 地盤の回転ばね常数

G : 構造体のせん断剛性

f_θ : 回転運動の固有振動数

f_x : 水平運動の固有振動数

f_s : 構造体自体の1次の固有振動数

I_A : 構造体の地盤面を中心とした慣性モーメント

ρ : 構造体の密度
 S : 構造体の断面積
 h : 構造体の全高

とすれば

$$\left. \begin{aligned} f_\theta &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_\theta}{I_A}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3K_\theta}{\rho h^3 S}} \\ f_x &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_x}{M}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_x}{\rho h S}} \\ f_s &= \frac{1}{4h} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(2)$$

より

$$\left. \begin{aligned} K_\theta &= \frac{4}{3} \pi^2 f_\theta^2 \rho h^3 S \\ K_x &= 4\pi^2 f_x^2 \rho h S \\ G &= 16 f_s^2 \rho h^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(3)$$

となる。

構造体の運動方程式は

$$\rho \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 x}{\partial z^2} \dots\dots\dots(4)$$

また境界条件はつぎのように与えられる。

$$z=0; \quad x = x_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(5)$$

$$\int_0^h \rho S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dz = -K_x x_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(6)$$

$$\int_0^h \rho S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} z dz = -K_\theta \theta_0 e^{i\omega t} \dots\dots\dots(7)$$

$$z=h; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots(8)$$

さて、 A, B を未定係数として

$$u = A \sin \lambda z + B \cos \lambda z - \theta_0 z - x_0 \dots\dots\dots(9)$$

とおいて式(1)に代入すれば

$$x = (A \sin \lambda z + B \cos \lambda z) e^{i\omega t} \dots\dots\dots(10)$$

式(10)を式(5)に代入して

$$\rho \omega^2 = G \lambda^2 \dots\dots\dots$$

$$\therefore \omega^2 = \lambda^2 G / \rho = 16 f_s^2 h^2 \lambda^2 \dots\dots\dots(11)$$

境界条件式(5)より

$$B = x_0 \dots\dots\dots(12)$$

境界条件式(8)より

$$\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=h} = \lambda A \cos \lambda h - \lambda x_0 \sin \lambda h - \theta_0 = 0$$

$$\therefore A = \frac{1}{\cos \lambda h} \left(x_0 \sin \lambda h + \frac{\theta_0}{\lambda} \right) \dots\dots\dots(13)$$

境界条件式(6)より

$$\int_0^h \rho S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} dz = -\frac{\rho S \omega^2}{\lambda} \{ (1 - \cos \lambda h) A + x_0 \sin \lambda h \} e^{i\omega t} = -K_x x_0 e^{i\omega t}$$

ここで、 $p = \pi/2 \cdot f_x / f_s$, $\varphi = \lambda h$ とおき、式(3), (11), (13) を代入し整理すると

$$\frac{\theta_0 h}{x_0} = \frac{p^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi}{1 - \cos \varphi} \dots\dots\dots(14)$$

となる。

また境界条件式(7)より

$$\int_0^h \rho S \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} z dz = -\frac{\rho S \omega^2}{\lambda^2} \{ A (\sin \lambda h - \lambda h \cos \lambda h) + x_0 (\lambda h \cos \lambda h + \cos \lambda h - 1) \} e^{i\omega t} = -K_\theta \theta_0 e^{i\omega t}$$

ここで、 $q = \pi/2 \cdot f_\theta / f_s$, $\varphi = \lambda h$ とおき、式(3), (11), (13) を代入し整理すると

$$\frac{\theta_0 h}{x_0} = \frac{1 - \cos \varphi}{(1 + q^2/3) \cos \varphi - \sin \varphi / \varphi} \dots\dots\dots(15)$$

となる。

式(14)と式(15)より

$$\frac{p^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi}{1 - \cos \varphi} = \frac{1 - \cos \varphi}{(1 + q^2/3) \cos \varphi - \sin \varphi / \varphi}$$

これを φ について整理すれば

$$\left(\frac{3p^2}{\varphi^2} + 3 + q^2 \right) \varphi \sin \varphi - \{ p^2(3 + q^2) - 6 \} \cos \varphi - 6 = 0 \dots\dots\dots(16)$$

となり、同式が本問題における固有値方程式である。

§ 2. 固有振動数

式(16)の固有値方程式に p, q を与えれば φ を定めることができる。

しかし φ の値は無数に存在し、それらを小さい方から順に

$$\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \dots, \varphi_n, \dots$$

と表わすことにしよう。

式(16)は代数的には φ について解くことができないので、これを Newton-Raphson 法によって電子計算機を使って求めることにした。^{註3)}

式(2)の第3式と式(11)より

$$\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{f}{f_s} \dots\dots\dots(17)$$

となる。ここで f は本振動系の固有振動数であり、 φ_n に相応して f_n と表わすことにしよう。

かくして f_s, f_θ, f_x が定まれば f_n を求めることができる。

いま、 $p/q (= f_x/f_\theta)$ をパラメーターとし、 f_θ/f_s に対する f_n/f_s を作図すると 図-2 のようになる。

同図より当然のことながら、地盤が構造物に比べて限りなく堅くなれば ($f_\theta/f_s \rightarrow \infty$)、固有振動数は構造物自体の固有振動数に一致し ($f_i/f_s \rightarrow 1.0$)、また反対に構造物が地盤に比べて限りなく剛になれば ($f_\theta/f_s \rightarrow 0$)、固有

振動数は構造物自体の固有振動数より限りなく小さくなる ($f_i/f_s \rightarrow 0$) 傾向を知ることができる。

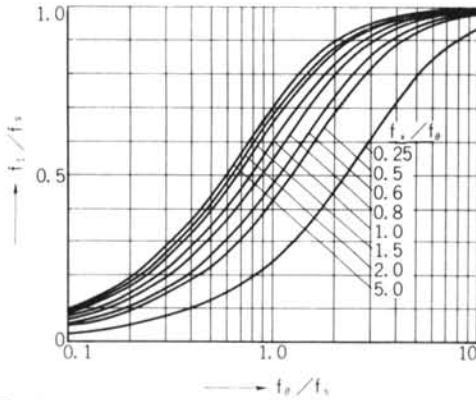


図-2

図-3 は同様に高次の固有振動数について示したものである。

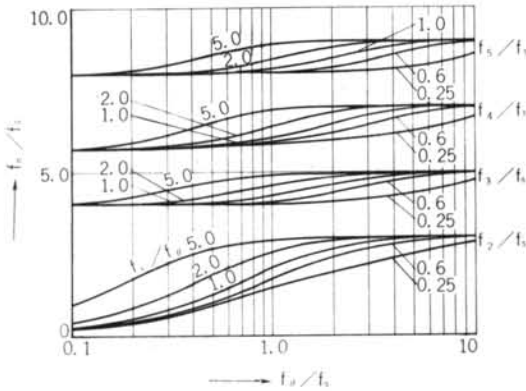


図-3

§ 3. 一般解

振動変位 x に関する一般解は、式(6)より得られる個々の次数の解に任意定数を乗じて加え合わせたものであるから、式(10)より

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (A_n \sin \lambda_n z + B_n \cos \lambda_n z) e^{i\omega_n t}$$

ここで β_n/B_n , A_n/B_n をそれぞれ改めて β_n , a_n とおき、 $\lambda_n z = \varphi_n z/h = \varphi_n Z$ ($z/h = Z$) とおけば

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n (a_n \sin \varphi_n Z + \cos \varphi_n Z) e^{i\omega_n t} \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。ただし式(12), (13)より

$$a_n = \frac{\rho^2 - \varphi_n \sin \varphi_n}{(1 - \cos \varphi_n) \varphi_n}$$

ここで、各次数の振動型の間には時間的な位相差を持つかもしれないから、 β_n を複素数として考えることにしよう。

いま式(18)を第 k 次まで考えるとすれば、 k 個の未知数 $\beta_n (n=1, 2, \dots, k)$ を含むことになる。それらは初期条件により各次数について k 個の連立方程式が得られるから、それを解くことによって定まる。

それを解くのに直交理論を用いることにしよう。^{文3, 4)}

$$x_n = \beta_n (a_n \sin \varphi_n Z + \cos \varphi_n Z) e^{i\omega_n t} \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

とおけば、この関数系はすべての n について $\beta_n = 0$ でないかぎり一次独立であり、これより正規直交列を得るために

$$\gamma_{ij} = (x_i^* x_j) \quad (i, j=1, 2, 3, \dots, n) \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\Psi_n = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \dots & \gamma_{1n} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \dots & \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n-1,1} & \gamma_{n-1,2} & \dots & \gamma_{n-1,n} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{vmatrix} \quad \dots\dots\dots (21)$$

とおく。

ここで * なる記号は複素共役関数を意味する。

$$(x_i^* x_j) = \int_0^1 x_i^* x_j dZ = \beta_i^* \beta_j e^{i(\omega_j - \omega_i)t} M_{ij} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ただし

$$M_{ij} = \int_0^1 (a_i \sin \varphi_i Z + \cos \varphi_i Z) (a_j \sin \varphi_j Z + \cos \varphi_j Z) dZ \\ = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1+a_j a_i}{\varphi_j - \varphi_i} \sin(\varphi_j - \varphi_i) + \frac{1-a_j a_i}{\varphi_j + \varphi_i} \sin(\varphi_j + \varphi_i) \right. \\ \left. + \frac{a_j - a_i}{\varphi_j - \varphi_i} \{1 - \cos(\varphi_j - \varphi_i)\} + \frac{a_j + a_i}{\varphi_j + \varphi_i} \{1 - \cos(\varphi_j + \varphi_i)\} \right\} \quad \dots\dots\dots (23)$$

である。

しからは、 Ψ は x_1, x_2, \dots, x_n の一次結合で、 $(x_i \Psi_n)$ は上記行列式の最終行を $(x_i^* x_1), \dots, (x_i^* x_n)$, すなわち $\gamma_{1i}, \dots, \gamma_{ni}$ で置きかえたものであるから $(x_i \Psi_n) = 0$ となる。

したがって Ψ_n は $\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_{n-1}$ と直交する。

つぎに Ψ_n の正規化であるが、一般に

$$\Gamma_0 = 1, \quad \Gamma_n = |\gamma_{ij}| \quad \dots\dots\dots (24)$$

とおけば、正規直交列 Φ_n は

$$\Phi_n = \frac{\Psi_n}{\sqrt{\Gamma_{n-1} \Gamma_n}} \quad \dots\dots\dots (25)$$

で表わされる。

式(21)及び式(22)より

$$\Psi_1 = x_1 = \beta_1 C_1 e^{i\omega_1 t}$$

$$\Psi_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ x_1 & x_2 \end{vmatrix} = \beta_1^2 \beta_2 (M_{11} C_2 - M_{12} C_1) e^{i\omega_2 t}$$

$$\begin{aligned} \Psi_3 &= \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3 \left(\begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & C_3 \\ M_{21} & M_{22} & \end{vmatrix} C_3 - \begin{vmatrix} M_{11} & M_{13} \\ M_{21} & M_{23} \end{vmatrix} C_2 \right. \\ &\quad \left. + \begin{vmatrix} M_{12} & M_{13} \\ M_{22} & M_{23} \end{vmatrix} C_1 \right) e^{i\omega_3 t} \end{aligned}$$

一般に Ψ_n は

$$\Psi_n = (\beta_{n-1}!) \beta_n \left\{ \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} |\Delta_{nk}| C_k \right\} e^{i\omega_n t} \dots\dots\dots \text{②6}$$

ただし

$$\beta_n \text{ は複素数 } \beta_n, \beta_n^* \text{ の絶対値で } \beta_n = \sqrt{\beta_n^* \beta_n},$$

$$C_k = a_k \sin \varphi_k Z + \cos \varphi_k Z$$

$$(\beta_n)! = \beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_1$$

(Δ_{nk}) は (M_{nn}) における M_{nk} の余因子行列である。

一方 Γ_n については式②0, ②2より

$$\Gamma_1 = \gamma_{11} = \beta_1^2 M_{11}$$

$$\Gamma_2 = \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{vmatrix} = \beta_1^2 \beta_2^2 \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{vmatrix} = \beta_1^2 \beta_2^2 |M_{22}|$$

$$\begin{aligned} \Gamma_3 &= \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{vmatrix} = \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 \begin{vmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{vmatrix} \\ &= \beta_1^2 \beta_2^2 \beta_3^2 |M_{33}| \end{aligned}$$

一般に

$$\Gamma_n = (\beta_n^2)! |M_{nn}| \dots\dots\dots \text{②7}$$

である。

よって式②5, ②6, ②7より

$$\begin{aligned} \Phi_n &= \frac{\Psi_n}{\sqrt{\Gamma_{n-1} \Gamma_n}} \\ &= \frac{\beta_n}{\beta_n \sqrt{|M_{n-1, n-1}| |M_{nn}|}} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} |\Delta_{nk}| C_k \dots\dots\dots \text{②8} \end{aligned}$$

かくして関数列 x_n から正規直交列 Φ_n を作る事ができた。

そこで α_n を係数として

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Phi_n \dots\dots\dots \text{②9}$$

とおけば、両辺の Φ_n^* との内積を考えると

$$(\Phi_n^* x) = \int \Phi_n^* \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \Phi_n dZ = \alpha_n \dots\dots\dots \text{③0}$$

$$\left(\because \int \Phi_n^* \Phi_n dZ = 1, \int \Phi_n^* \Phi_k dZ = 0 \text{ ただし } n \neq k \right)$$

ここで α_n は初期条件を与えることによって式③0より

定められるが、初期条件の与え方に様々な場合が考えられるので、それぞれの場合について α_n を求めることにしよう。

(1) $t=0$ における変位が与えられた場合

$t=0$ における変位を $x(Z)_{t=0}$ と表わせば、式③0より

$$\begin{aligned} \alpha_n &= (\Phi_n^* x)_{t=0} \\ &= \frac{\beta_n^*}{\beta_n} \frac{1}{\sqrt{|M_{n-1, n-1}| |M_{nn}|}} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} |\Delta_{nk}| \\ &\quad \int_0^1 C_k x(Z)_{t=0} dZ \end{aligned}$$

よって式②9より

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{i\omega_n t}}{|M_{n-1, n-1}| |M_{nn}|} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} |\Delta_{nk}| \cdot \\ &\quad \int_0^1 C_k x(Z)_{t=0} dZ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} |\Delta_{nk}| C_k \dots\dots\dots \text{③1} \end{aligned}$$

(2) $t=0$ における速度が与えられた場合

時間に関する微分を $\dot{\cdot}$ なる記号で表わせば

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \dot{\Phi}_n \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \omega_n \Phi_n \end{aligned}$$

$$(\Phi_n^* \dot{x}) = \left(\Phi_n^*, e^{i\frac{\pi}{2}} \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \omega_n \Phi_n \right) = e^{i\frac{\pi}{2}} \alpha_n \omega_n$$

$$\therefore \alpha_n = \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}}}{\omega_n} (\Phi_n^* \dot{x})$$

$t=0$ における速度を $\dot{x}(Z)_{t=0}$ と表わせば

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{e^{-i\frac{\pi}{2}} \beta_n^*}{\omega_n \beta_n} \frac{1}{\sqrt{|M_{n-1, n-1}| |M_{nn}|}} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} |\Delta_{nk}| \\ &\quad \int_0^1 C_k \dot{x}(Z)_{t=0} dZ \end{aligned}$$

よって式②9より

$$\begin{aligned} x &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_n} \frac{e^{i(\omega_n t - \frac{\pi}{2})}}{\beta_n \sqrt{|M_{n-1, n-1}| |M_{nn}|}} \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} |\Delta_{nk}| \cdot \\ &\quad \int_0^1 C_k \dot{x}(Z)_{t=0} dZ \sum_{k=1}^n (-1)^{n+k} |\Delta_{nk}| C_k \dots\dots\dots \text{③2} \end{aligned}$$

式②9が本問題の一般解であり、初期条件の与え方によって式③1, ③2のようになる。

§ 4. 例 題

(1) $t=0$ で最高部に水平力 P_0 を加え、これを突然と除いた場合

全長にわたりせん断力 P_0 は一定であるから

$$x(Z)_{t=0} = \frac{P_0}{K_x} + \left(\frac{P_0 h^2}{K_\theta} + \frac{P_0 h}{SG} \right) Z$$

上式に式(3)を代入すると

$$x(Z)_{t=0} = \frac{P_0}{16\rho h S f_s^2} \left\{ \frac{1}{p^2} + \left(\frac{3}{q^2} + 1 \right) Z \right\} \dots\dots\dots (33)$$

$$\int_0^1 C_k x(Z)_{t=0} dZ = \int_0^1 (a_k \sin \varphi_k Z + \cos \varphi_k Z) (b_x + b_\theta Z) dZ = \frac{b_x}{\varphi_k} \{ a_k (1 - \cos \varphi_k) + \sin \varphi_k \}$$

$$+ \frac{b_\theta}{\varphi_k^2} \{ a_k (\sin \varphi_k - \varphi_k \cos \varphi_k) + \cos \varphi_k + \varphi_k \sin \varphi_k - 1 \} \dots\dots\dots (36)$$

ただし

$$a_k = \frac{p^2 - \varphi_k \sin \varphi_k}{(1 - \cos \varphi_k) \varphi_k} \dots\dots\dots (37)$$

式(3)より M_{ij} が計算され、マトリックス (M_{nn}) が定まり、その余因子行列 $|d_{nk}|$ も計算される。^{註2)}

かくして式(3)より x は計算される。

一例として $f_x = f_\theta = f_s$ の場合を計算すると

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= 1.347b_0(4.570 \sin 0.932Z + \cos 0.932Z)e^{i\omega_1 t} \\ x_2 &= -0.410b_0(0.421 \sin 3.216Z + \cos 3.215Z)e^{i\omega_2 t} \\ x_3 &= 0.100b_0(0.377 \sin 6.639Z + \cos 6.639Z)e^{i\omega_3 t} \\ x_4 &= -0.054b_0(0.145 \sin 9.453Z + \cos 9.453Z)e^{i\omega_4 t} \\ x_5 &= 0.029b_0(0.194 \sin 12.757Z + \cos 12.757Z)e^{i\omega_5 t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (38)$$

ただし

$$b_0 = \frac{P_0}{\rho h S \omega_s^2}, \quad \omega_k = 4 f_s \varphi_k \dots\dots\dots (39)$$

図-4 はこの結果を示したものである。

(2) $t=0$ で最高部に P_0 、中間の任意の位置に P_1 なる力に加え、両方の力を突然同時に除いた場合(図-5)

P_1 の作用点の高さを h_1 とすれば

$0 \leq Z \leq h_1/h$ のとき

$$x(Z)_{t=0} = \frac{P_0 + P_1}{K_x} + \left\{ \frac{P_0 h^2 + P_1 h_1 h}{K_\theta} + \frac{(P_0 + P_1)h}{SG} \right\} Z$$

$h_1/h < Z \leq 1$ のとき

$$x(Z)_{t=0} = \frac{P_0 + P_1}{K_x} + \frac{P_1 h_1}{SG} + \left\{ \frac{P_0 h^2 + P_1 h_1 h}{K_\theta} + \frac{P_0 h}{SG} \right\} Z \dots\dots\dots (40)$$

上式に式(3)を代入し、 $h_1/h = \eta$ 、 $P_1/P_0 = \xi$ とおけば

$0 \leq Z \leq \eta$ のとき

$$x(Z)_{t=0} = b_{x1} + b_{\theta 1} Z \dots\dots\dots (41)$$

$$b_{x1} = \frac{P_0}{\rho h S \omega_s^2} \cdot \frac{\pi^2 (1 + \xi)}{4 p^2}$$

$$b_{\theta 1} = \frac{P_0}{\rho h S \omega_s^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{3(1 + \eta \xi)}{q^2} + 1 + \xi \right\}$$

$\eta < Z \leq 1$ のとき

$$x(Z)_{t=0} = b_{x2} + b_{\theta 2} Z \dots\dots\dots (42)$$

$$b_{x2} = \frac{P_0}{\rho h S \omega_s^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{1 + \xi}{p^2} + \xi \eta \right)$$

$$b_{\theta 2} = \frac{P_0}{\rho h S \omega_s^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \left\{ \frac{3(1 + \eta \xi)}{q^2} + 1 \right\}$$

ここで

$$b_x = \frac{P_0}{16\rho h S f_s^2 p^2} = \frac{P_0}{\rho h S \omega_s^2} \cdot \frac{\pi^2}{4 p^2} \dots\dots\dots (34)$$

$$b_\theta = \frac{P_0}{16\rho h S f_s^2} \left(\frac{3}{q^2} + 1 \right) = \frac{P_0}{\rho h S \omega_s^2} \cdot \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{3}{q^2} + 1 \right) \dots\dots\dots (35)$$

とおくと

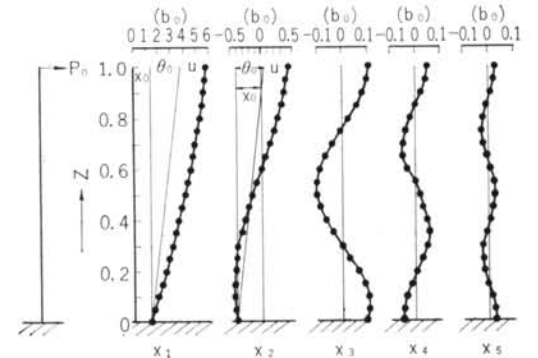


図-4

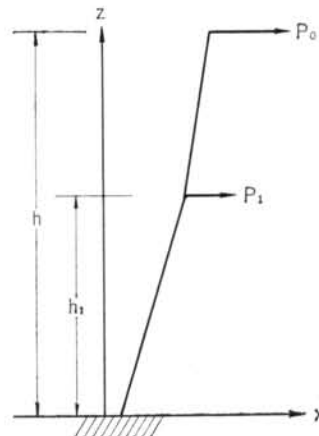


図-5

したがって

$$\int_0^1 C_k x(Z)_{t=0} dZ = \int_0^\eta C_k x(Z)_{t=0} dZ + \int_\eta^1 C_k x(Z)_{t=0} dZ$$

$$= \frac{b_{x1}}{\varphi_k} \{a_k(1 - \cos \varphi_k \eta) + \sin \varphi_k \eta\}$$

$$+ \frac{b_{\theta 1}}{\varphi_k^2} \{a_k(\sin \varphi_k \eta - \varphi_k \eta \cos \varphi_k \eta) + \cos \varphi_k \eta + \varphi_k \eta \sin \varphi_k \eta - 1\}$$

$$+ \frac{b_{x2}}{\varphi_k} \{a_k(\cos \varphi_k \eta - \cos \varphi_k) + \sin \varphi_k - \sin \varphi_k \eta\}$$

$$+ \frac{b_{\theta 2}}{\varphi_k^2} \{a_k(\sin \varphi_k - \varphi_k \cos \varphi_k - \sin \varphi_k \eta + \varphi_k \eta \cos \varphi_k \eta) + \varphi_k \sin \varphi_k + \cos \varphi_k - \varphi_k \eta \sin \varphi_k \eta - \cos \varphi_k \eta\}$$

.....(43)

かくして式(3)に代入して x_n を計算することができる。

一例として前例に準じ、 $f_x = f_\theta = f_s$ の場合について、 $\xi = -1/2$, $\eta = 1/2$

として5次の項までを数値計算すると次のようになる。

$$x_1 = 0.882b_0(4.570 \sin 0.932Z + \cos 0.932Z)e^{i\omega_1 t}$$

$$x_2 = -0.486b_0(0.412 \sin 3.216Z + \cos 3.216Z)e^{i\omega_2 t}$$

$$x_3 = 0.149b_0(0.377 \sin 6.639Z + \cos 6.638Z)e^{i\omega_3 t}$$

$$x_4 = -0.051b_0(0.145 \sin 9.453Z + \cos 9.453Z)e^{i\omega_4 t}$$

$$x_5 = 0.015b_0(0.194 \sin 12.757Z + \cos 12.757Z)e^{i\omega_5 t}$$

ただし

$$b_0 = \frac{P_0}{\rho h S \omega_s^2}, \quad \omega_k = 4f_s \varphi_k$$

図-6はこの結果を示したものである。

同図は図-4との比較のため同一スケールで表わしてある。

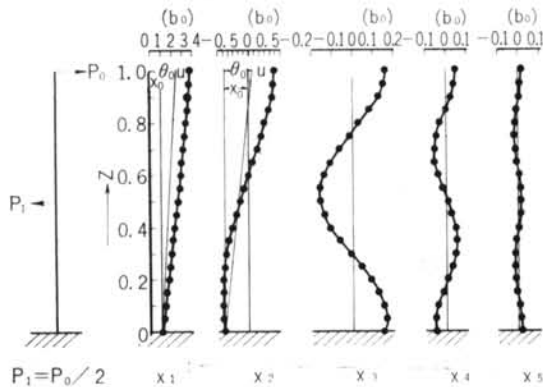


図-6

両図より P_1 の作用点が、3次のモードの腹に近い場合、3次のモードが、かなり誇張されていることがわかる。

(3) $t=0$ で構造物の全長にわたって等しい速度 v_0 が与えられた場合

$0 \leq Z \leq 1$ の全域において

$$\dot{x}(Z)_{t=0} = v_0$$

よって

$$\int_0^1 C_k \dot{x}(Z)_{t=0} dZ = \int_0^1 (a_k \sin \varphi_k Z + \cos \varphi_k Z) v_0 dZ$$

$$= \frac{v_0}{\varphi_k} \{a_k(1 - \cos \varphi_k) + \sin \varphi_k\} \dots \dots \dots (44)$$

上式を式(3)に代入して x_n は計算される。

前例に準じ、 $f_x = f_\theta = f_s$ の場合について数値計算するときのようになる。

$$x_1 = 0.532b_0'(4.570 \sin 0.932Z + \cos 0.932Z)e^{i\omega_1 t}$$

$$x_2 = 0.195b_0'(0.421 \sin 3.216Z + \cos 3.216Z)e^{i\omega_2 t}$$

$$x_3 = 0.022b_0'(0.377 \sin 6.639Z + \cos 6.639Z)e^{i\omega_3 t}$$

$$x_4 = 0.0090b_0'(0.145 \sin 9.453Z + \cos 9.453Z)e^{i\omega_4 t}$$

$$x_5 = 0.0035b_0'(0.194 \sin 12.757Z + \cos 12.757Z)e^{i\omega_5 t}$$

ただし

$$b_0' = \frac{v_0}{\rho h S \omega_s^3}, \quad \omega_k = 4f_s \varphi_k$$

である。

図-7はこの結果を図で示したものである。

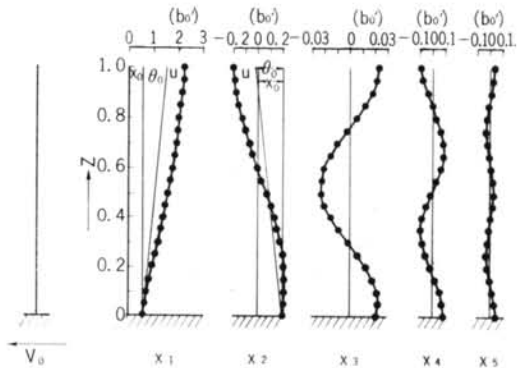


図-7

§5. 応用例

以上述べてきたように、弾性地盤上に立つ構造物を、基礎の回転および水平動を伴うせん断振動系と考えた場合、 f_x , f_θ , f_s (または p , q) をパラメータとして連成の固有振動数が定まり、初期条件を与えればその運動を決定することができる。

一般に f_x, f_θ は、地盤を質量のないばねと見なして算定される。そのばね常数の算定には、古くから様々な方法が提案されているが、ここでは地盤を半無限弾性体として、弾性論から得られる静的ばね常数を使うことにした。^{文8)}

この方法では、地盤の横波の伝播速度が必要であるが一般に縦波の伝播速度の測定が容易かつ正確に行なわれるため、ポアソン比を適宜に仮定して横波速度を換算することにした。

一方、基礎を完全固定としたときの構造物の固有振動数 f_s は、一般に構造物を質点系に置きかえ、ホルツァー法やストドラ法によって計算される。

f_x, f_θ の算定にはポアソン比や地下側面土の影響など f_s の算定には各種2次構造部材の効果など、それぞれ誤差を含む要素を多分に持っている。

したがって、実際上いずれがより正確な値を与えるか今日のところ断言することはできない。

しかし、実際に構造物が完成すれば、これらの連成による固有振動数 $f_n (n=1, 2, 3, \dots)$ を、実測によって正確に知ることができる。

したがって、 f_x, f_θ, f_s のうち2つが定められれば、 f_n の実測値を使って残りの1つを定めることができる。

そこで本章では、 f_x, f_θ の計算値をもとにして、 f_n の実測値から、構造物自体の固有振動数 f_s を計算することにした。

1) ホテルエンパイヤビル^{文5)}

同建物の外形寸法を図-8に示す。また支持地盤の縦波伝播速度は実測により1430 m/s となっている。

地盤のポアソン比を 0.45^{文7)} とすると、横波伝播速度 V_s は

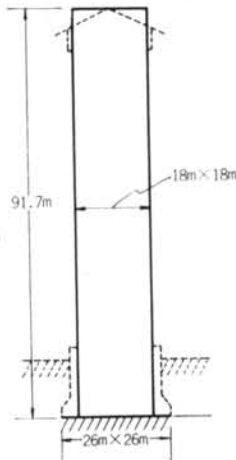


図-8

$$V_s = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)} V_p = 430 \text{ m/s}$$

これから地盤の回転および水平のばね常数は^{文8)}

$$\rho_s = 1.8 \text{ t/m}^3 (\text{c.g.s.}), a_e = 0.55 \sqrt{26 \times 26} = 14.3 \text{ m}$$

として

$$K_\theta = \frac{8\rho_s V_s^2 a_e^3}{3(1-\nu)} = 4.81 \times 10^8 \text{ tm/rad}$$

$$K_x = \frac{8\rho_s V_s^2 a_e}{2-\nu} = 2.51 \times 10^6 \text{ t/m}$$

建物の平均密度 $\rho = 0.45 \text{ t/m}^3 (\text{c.g.s.}), h = 91.7 \text{ m}$,

$S = 18^2 \text{ m}^2$ として

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3K_\theta}{\rho h^3 S}} = 1.64 \text{ c/s}$$

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_x}{\rho h S}} = 6.83 \text{ c/s}$$

$$\therefore f_x/f_\theta = 4.16$$

一方、同建物の固有振動数 f_1 は実測により0.94 c/s となっている。これより同建物自体の固有振動数 f_s を図-2 から読取ると

$$f_s = 1.16 \text{ c/s}$$

となる。

2) 大井町第一生命ビル

同建物の外形寸法を図-9に示す。

実測値との比較のため高層部は鉄骨だけの状態で考えることにしよう。^{文6)}

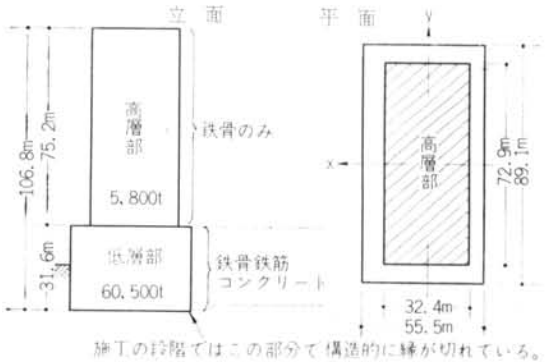


図-9

支持地盤の縦波伝播速度は、実測により1500 m/s となっている。

地盤のポアソン比を0.45^{文7)} とすれば

$$V_s = \sqrt{(1-2\nu)/2(1-\nu)} V_p = 450 \text{ m/s}$$

同建物の場合、基礎版が1:1.96の比率をもつ矩形版であるから、短辺、長辺の2方向について考える。(短辺方向)

回転ばね常数を等しくする等価半径^{文8)}

$$= \frac{45.5}{2} \times 1.31 = 29.8 \text{ m}$$

水平ばね常数を等しくする等価半径

$$= \frac{45.5}{2} \times 1.50 = 34.1 \text{ m}$$

$\rho_s = 1.8 \text{ t/m}^3 (\text{c.g.s.})$ として

$$K_\theta = \frac{8\rho_s V_s^2 a_e^3}{3(1-\nu)} = 4.78 \times 10^9 \text{ tm/rad}$$

$$K_x = \frac{8\rho_s V_s^2 a_e}{2-\nu} = 2.51 \times 10^6 \text{ t/m}$$

$$I_y = \frac{60500}{9.8} \left(\frac{4 \times 31.6^2 + 45.5^2}{12} \right) + \frac{5800}{9.8}$$

$$\left(53.4^2 + \frac{75.2^2 + 32.4^2}{12}\right) = 5.14 \times 10^6 \text{ tms}^2$$

$$M = \frac{60500 + 5800}{9.8} = 6.77 \times 10^3 \text{ ts}^2/\text{m}$$

よって

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_\theta}{I_y}} = 4.86 \text{ c/s}$$

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_x}{M}} = 4.95 \text{ c/s}$$

$$\therefore f_x/f_\theta = 1.02$$

一方同建物の短辺方向の固有振動数 f_1 は実測により 1.27 c/s である。

したがって、高層部を上記の f_θ , f_x , f_1 を持つ一様なせん断棒と見なせば、高層部自体の固有振動数 f_s は 図-2 より

$$f_s = 1.35 \text{ c/s}$$

となる。

(長辺方向)

回転ばね常数を等しくする等価半径

$$= \frac{89.1}{2} \times 0.96 = 42.8 \text{ m}$$

水平ばね常数を等しくする等価半径

$$= \frac{89.1}{2} \times 0.79 = 35.2 \text{ m}$$

$$K_\theta = \frac{8\rho_s V_s^2 a_e^3}{3(1-\nu)} = 1.41 \times 10^{10} \text{ tm/rad}$$

$$K_x = \frac{8\rho_s V_s^2 a_e}{2-\nu} = 6.76 \times 10^6 \text{ t/m}$$

$$I_x = \frac{60500}{9.8} \left(\frac{4 \times 31.6^2 + 89.1^2}{12} \right) + \frac{5800}{9.8}$$

$$\left(53.4^2 + \frac{75.2^2 + 72.9^2}{12} \right) = 8.37 \times 10^6$$

よって

$$f_\theta = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_\theta}{I_x}} = 6.54 \text{ c/s}$$

$$f_x = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{K_x}{M}} = 5.03 \text{ c/s}$$

$$\therefore f_x/f_\theta = 0.77$$

一方同建物の長辺方向の固有振動数 f_1 は実測により 1.38 c/s である。

高層部を上記の f_θ , f_x , f_1 を持つ一様なせん断棒と見なせば、高層部自体の固有振動数 f_s は

$$f_s = 1.46 \text{ c/s}$$

となる。

一方低層部において完全固定とし、ホルツァー法によって高層部の固有振動数を求めると、短辺方向 1.28 c/s、長辺方向 1.40 c/s となる。

以上の結果を要約すると次表のようになる。

	f_θ	f_x	f_1	f_s	ホルツァー法による f_s の計算値
短辺方向	4.86	4.95	1.27	1.35	1.28
長辺方向	6.54	5.03	1.38	1.46	1.40

表-1 (単位 c/s)

つぎに同建物の最高部に、短辺方向に P_0 なる力を加え、これを突然に取除いた場合の応答を計算すると

$$x_1 = 0.096b_0(23.2 \sin 1.47Z + \cos 1.47Z)e^{i\omega_1 t}$$

$$x_2 = -0.032b_0(7.13 \sin 4.55Z + \cos 4.55Z)e^{i\omega_2 t}$$

$$x_3 = 0.018b_0(4.39 \sin 7.62Z + \cos 7.62Z)e^{i\omega_3 t}$$

$$x_4 = -0.013b_0(3.07 \sin 10.67Z + \cos 10.67Z)e^{i\omega_4 t}$$

$$x_5 = 0.0097b_0(2.42 \sin 13.74Z + \cos 13.74Z)e^{i\omega_5 t}$$

となる。

図-10はこれを図示したものである。

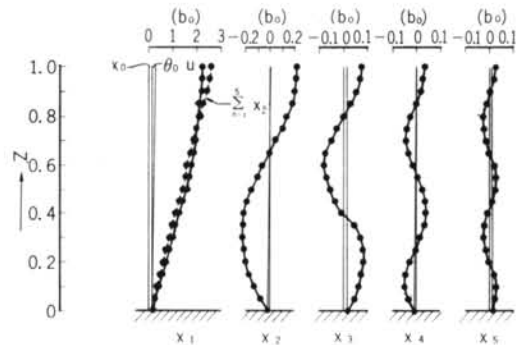


図-10

同図より、変形の大部分を高層部のせん断変形が占め、やはり1次のモードが圧倒的に優勢であることがわかる。

§6. スウェイ比およびロック比

建物の最上部に生ずる全変位 T に対する水平動による成分 S の割合 (S/T) をスウェイ比と呼ばれ、回転動による成分 R の割合 (R/T) をロック比と呼ばれている。

(図-11参照)

式(4)より

$$\frac{R}{S} = \frac{\rho^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi}{1 - \cos \varphi}$$

式(10), (12), (13)より

$$\frac{T}{S} = \frac{1}{\cos \varphi} \left(1 + \frac{R}{S} \frac{\sin \varphi}{\varphi} \right)$$

よって

$$\frac{S}{T} = \frac{\cos \varphi}{1 + \frac{R \sin \varphi}{S \varphi}} \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$\frac{R}{T} = \frac{\cos \varphi (\rho^2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi)}{(1 - \cos \varphi) \left(1 + \frac{R \sin \varphi}{S \varphi}\right)} \quad \dots\dots\dots (47)$$

また建物のせん断変位による成分を E とすれば

$$\frac{E}{T} = 1 - \frac{S}{T} - \frac{R}{T} \quad \dots\dots\dots (48) \quad \text{図-11}$$

となる。式(46), (47), (48)より f_x/f_θ をパラメーターとして自由振動におけるスウェイ比, ロック比, およびせん断変形の比を計算すると図-12, 13, 14 のようになる。

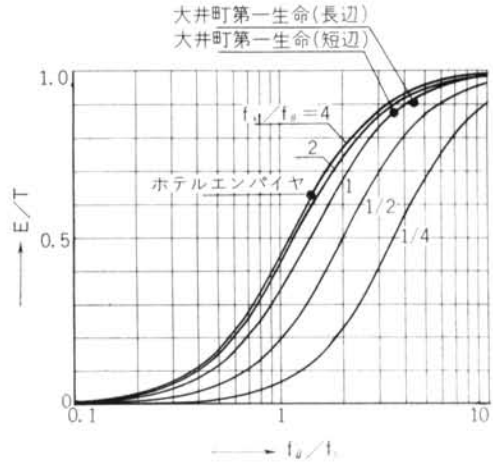
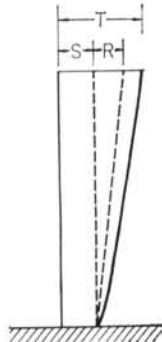


図-14

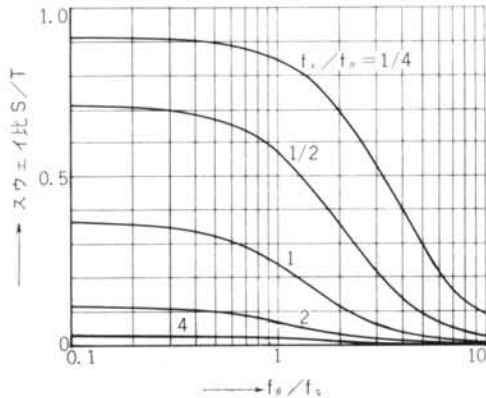


図-12

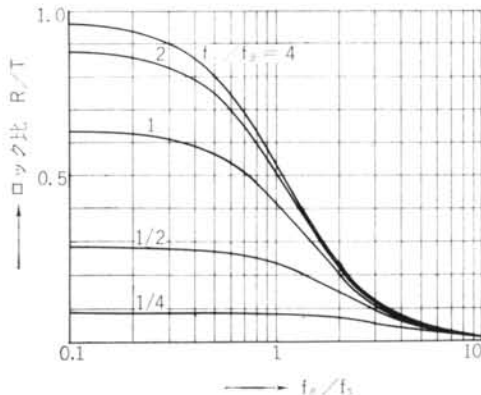


図-13

これらの図から, f_s , f_x , f_θ の組合せによって, 建物の剛体運動の占める割合および建物自体の弾性変形の占める割合を讀取ることができる。

また参考までに §5 で計算した 2 例の実際の建物について, E/T を図-14 に記入してある。

< 註 記 >

註 1. 非減衰系として考えているのであるから, 構造体の運動は必ず振動型となる。したがって変位 x は式(1)によって与えられる。

また, 変位 u , $\theta_0 z$, x_0 間に相互の位相差がないとしているのは, つぎのように証明される。

いま, u に対し $\theta_0 z$ は ε_1 , x_0 は ε_2 の位相差があったとすると

$$x = u e^{i\omega t} - \theta_0 z e^{i(\omega t + \varepsilon_1)} + x_0 e^{i(\omega t + \varepsilon_2)} \quad \dots\dots\dots (A)$$

式(4)に代入し

$$-\rho \omega^2 (u + \theta_0 z e^{i\varepsilon_1} + x_0 e^{i\varepsilon_2}) = G \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

上式の右辺は実数であるから, 左辺の虚数部を 0 とおいて

$$\theta_0 z \sin \varepsilon_1 + x_0 \sin \varepsilon_2 = 0$$

$z \neq \text{const}$ であるから

$$\sin \varepsilon_1 = \sin \varepsilon_2 = 0$$

$$\therefore \varepsilon_1 = m\pi \quad (m=0, 1, 2, 3, \dots)$$

$$\varepsilon_2 = n\pi \quad (n=0, 1, 2, 3, \dots)$$

よって, $e^{i\varepsilon_1} = \pm 1$, $e^{i\varepsilon_2} = \pm 1$ であるから,

式(A)は

$$x = (u \pm \theta_0 z \pm x_0) e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots (B)$$

となる。

式(B)において負号は実際問題として考えられないから捨てる。

註 2. $|M_{00}|$ 及び $|A_{11}|$ は (M_{ij}) からは定義されないが

$$\Psi_1 = \beta_1 e^{i\omega_1 t} C_1$$

であるから, $|M_{00}| = |A_{11}| = 1$ となる。

おわりに

本研究によって、任意の地動 v_0 について解が一義的に求まることは、少なくとも各次数のモードについて、任意の地動に対する応答も計算されるはずである。

これを実際の高層建物の地震応答の問題に応用するならば、地盤と建物の持つ減衰の効果を加える必要がある。

地盤と建物の減衰をそれぞれ独立に導入することは、著しく計算が複雑になるだろう。これを一般の基礎固定とした質点系理論で扱われているように、地盤も含めた建物の減衰常数なるものを考えることによって、減衰性

の導入を考えている。

かくして任意の地動に対する建物の剛体運動を含めた応答が求まれば、その中の建物自体に生ずる変形のみをとりだし、各部のせん断力や層間変位等を求めることができる。

ここに本研究の究極の目的があることを補足しておきたい。

末尾ながら、本研究に当って種々助言を賜った計画研究部の清水達雄氏、および各種例題の数値計算に協力いただいた力学研究部の藤井邦雄氏と広瀬道孝氏に心からの謝意を表する次第である。

<参考文献>

- 文 1. 梅村魁, 安藤範平: 建築骨組振動論: 建築学大系19, pp. 182.
- 文 2. Yukio Otsuki: A FEW COMMENTS ON DESIGN SEISMIC FORCE DISTRIBUTION: Proceedings of the 2nd Japan National Congress for Applied Mechanics, 1952, pp. 367.
- 文 3. R. クラウン, D. ヒルベルト: 数理物理学の方法: 斎藤利弥, 丸山滋弥訳, pp. 39~41
- 文 4. 高木貞治: 解析概論: pp. 269~271
- 文 5. 渡辺清治他 4 名: 横浜ドリームランド高層ホテル振動実験: 日本建築学会論文報告集号外 1965. 9, pp. 158~161
- 文 6. 清水建設研究所: 第一生命大井町ビル振動試験報告書: 1966. 1
- 文 7. 山原浩: 弾性地盤上における基礎および構造物の振動 (その 2): 清水建設研究所報第 7 号 1966. 4, pp. 71
- 文 8. 同 上: 同上 (その 1): 清水建設研究所報第 6 号 1965. 10