

弾性地盤上における基礎および構造物の振動（その2）

—基礎と地盤に関する動力学的研究—

山原 浩

§ 12. 上部構造に粘性減衰がある場合の2質点系

12. 1 強制振動

大型のコンプレッサー、タービン、発電機等は一般に鉄筋コンクリートまたは鉄骨の架台上に設置される。

これらを理論的なモデルに置換えるとき、当然上部構造にも粘性減衰を有するのであるから、図-48のようになる。

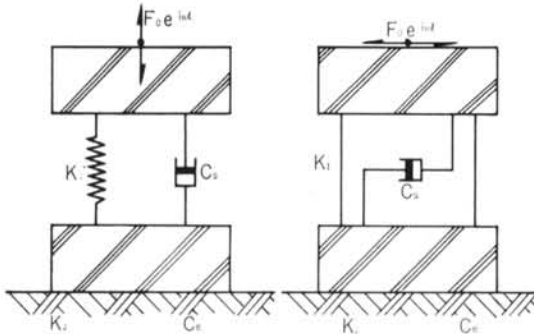


図-48

地盤の弾性常数は静的な場合のばね常数、粘性減衰は波動リアクタンスに相当する。

運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{u}_1 + C_s(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + K_1(u_1 - u_2) &= F_0 e^{i\omega t} \\ M_2 \ddot{u}_2 + C_s(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + K_1(u_2 - u_1) + C_e \dot{u}_2 \\ &+ K_2 u_2 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (124)$$

ただし、

$$|u_1| = \sqrt{\frac{(m + \beta^2 - \alpha^2)^2 + 4(h_s m + h_e \beta)^2 \alpha^2}{\{(1 - \alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2) - m\alpha^2 - 4h_s h_e \beta \alpha^2\}^2 + 4\{h_s(\beta^2 - \alpha^2) + h_e \beta(1 - \alpha^2) - h_s m \alpha^2\}^2 \alpha^2}} \quad (125)$$

$$|u_2| = \beta^2 \sqrt{\frac{1 + 4h_s^2 \alpha^2}{\{(1 - \alpha^2)(\beta^2 - \alpha^2) - m\alpha^2 - 4h_s h_e \beta \alpha^2\}^2 + 4\{h_s(\beta^2 - \alpha^2) + h_e \beta(1 - \alpha^2) - h_s m \alpha^2\}^2 \alpha^2}} \quad (126)$$

である。

さて、地盤の等価の減衰常数 h_e は、

$$\left(\begin{array}{l} \text{上下} \\ \text{水平} \end{array} \right) \quad K_z = 4apV_s^2/(1-\nu) \quad C_e = \rho V_p \kappa \nu S \quad \left(\begin{array}{l} \text{水平} \\ \text{水平} \end{array} \right) \quad K_x = 8apV_s^2/(2-\nu) \quad C_e = \rho V_s \kappa h S$$

ここで

M_1 : 上部構造の質量

u_1 : 上部構造の変位

C_s : 上部構造の粘性係数 (structural damping)

K_1 : 上部構造のばね常数

M_2 : 下部構造の質量

u_2 : 下部構造の変位

C_e : 地盤の波動リアクタンス (dissipation damping)

K_2 : 地盤のばね常数

F_0 : 起振力振幅

ω : 円振動数

であり、地盤の粘性減衰は逸散型の減衰に比べて著しく小さいから無視している。

$$u_1 = A_9 e^{i\omega t}, \quad u_2 = B_9 e^{i\omega t}$$

として式(124)に代入し A_9, B_9 について整理すると

$$A_9 = \frac{K_1 + K_2 - \omega^2 M_2 + i\omega(C_s + C_e)}{D_{10}} F_0$$

$$B_9 = \frac{K_1 + i\omega C_s}{D_{10}} F_0$$

$$D_{10} = (K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - \omega^2(M_1 K_1 + C_s C_e) + i\{\omega C_s(K_2 - \omega^2 M_2) + \omega C_e(K_1 - \omega^2 M_1) - \omega^3 C_s M_1\}$$

となる。

加振力を $F = F_0 \frac{\cos}{\sin} \omega t$ とし、 $K_1/M_1 = \omega_1^2, K_2/M_2 = \omega_2^2,$

$\omega/\omega_1 = \alpha, \omega_2/\omega_1 = \beta, M_1/M_2 = m, C_s/2\sqrt{M_1 K_1} = h_s,$

$C_e/2\sqrt{M_2 K_2} = h_e, F_0/K_1 = (u_{st})_1, F_0/K_2 = (u_{st})_2$

とおくと

$$u_1 = |u_1| \frac{\cos}{\sin} \{\omega t + \varepsilon_{12}\}$$

$$u_2 = |u_2| \frac{\cos}{\sin} \{\omega t + \varepsilon_{13}\}$$

より,

$$(上下) \quad h_e = \frac{(1-\nu)\kappa_e\pi}{2\sqrt{2(1-2\nu)b_2}} \quad \dots\dots\dots(127)$$

$$(水平) \quad h_e = \frac{\kappa_h\pi}{4} \sqrt{\frac{2-\nu}{2b_2}} \quad \dots\dots\dots(128)$$

となり, M_2 に関する質量比 $b_2 = M_2/\rho a^3$ の関数として与えられる.

$\nu = 0.25$ として, 質量比 b_2 に対する h_e を表-3 および図-49に示した.

b_2	h_e	
	上	下
1	1.57	0.68
2	1.10	0.48
4	0.78	0.34
6	0.64	0.28
10	0.50	0.21
15	0.40	0.17
20	0.35	0.15
25	0.31	0.14

表-3

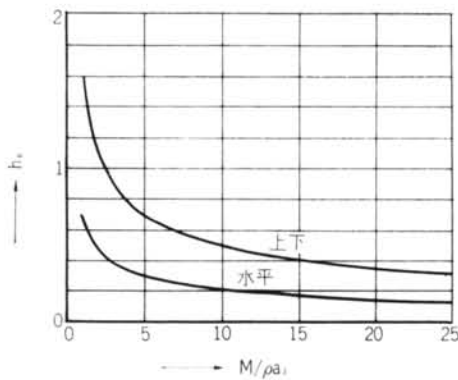


図-49

上部構造の減衰常数 h_s は, 一般の機械基礎の架台等では, $h_s = 0.01 \sim 0.05$ ぐらいであり, M_2 の質量比は1~4ぐらいに設計されるから, h_e は h_s に比べてかなり大きな値になっている.

一般には $h_e/h_s > 10$ と考えてよさそうである.

いま一例として, $\beta = \omega_2/\omega_1 = 2$, $h_s = 0.05$ とし, $h_e = 0.2, 0.5, 1.0$ に対する M_1 の共振曲線を, 式(125)から求めると図-50のようになる.

また M_2 に関する共振曲線を式(126)から計算すると, 図-51のようになる.

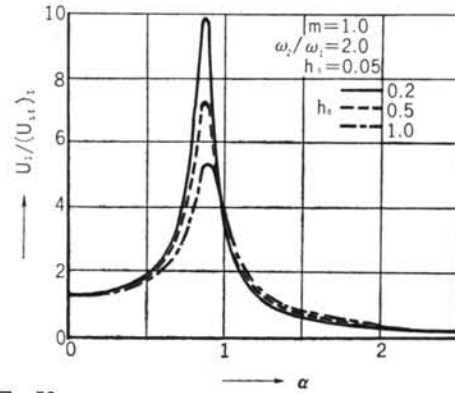


図-50

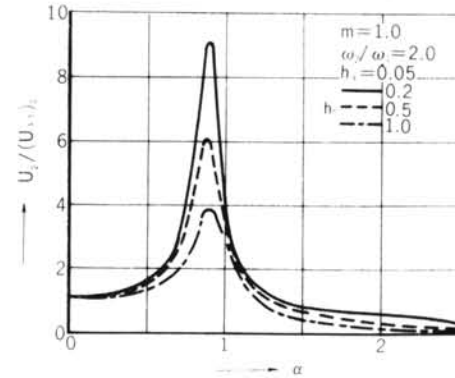


図-51

両図より, h_e の変化によって共振振動数はほとんど影響を受けないが, 共振時の振巾が著しく影響を受けることがわかる.

この事実は極めて重要な問題である.

一般に構造物の減衰常数を求めるのに, 図-52(a)に示すように, 構造物の屋上付近に起振機を据付け, 強制振動試験を行なう場合が多い.

そして構造物を図-52(b)に示すような1質点減衰系と見なし, 次式によって減衰常数を算定する方法が慣用されている.^{文5)}

$$h = \Delta\omega/2\omega_r \quad \dots\dots\dots(129)$$

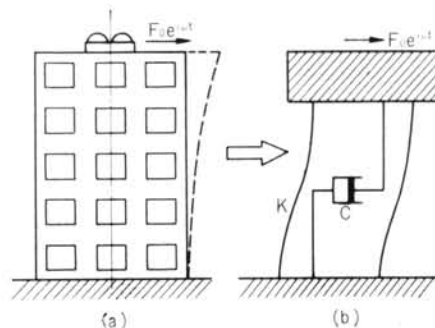


図-52

ここで、 4ω は $u > u_{max}/\sqrt{2}$ なる振動数 ω の範囲であり、 ω_r は共振時の振動数である。

このような方法で構造物の減衰常数を算定すると、地盤の逸散型の減衰効果を見捨てる結果、実際の構造物自体の減衰常数を過大に評価することになる。

ちなみに、図-50の共振曲線より、式(129)を使って減衰常数 h'_s を求めると、

$$h_e = 0.2 \text{ のとき } h'_s = 0.063$$

$$h_e = 0.5 \text{ のとき } h'_s = 0.085$$

$$h_e = 1.0 \text{ のとき } h'_s = 0.122$$

となり、 $h_s = 0.05$ に比べてかなり大きな値になる。

もし上部構造が柔らかく、その固有振動数が下部構造に比べて著しく小さいときには事情が大分変わってくる。

いま $\omega_2/\omega_1 = 5$ とし、 h_s は図-50の例と同じく 0.05 とし式(125)を計算すると図-53のようになる。

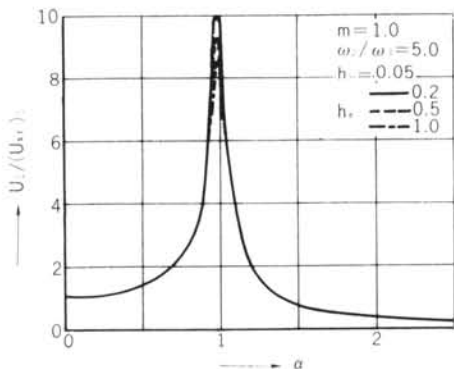


図-53

すなわち、 h_e の変化が上部構造の共振曲線にそれ程影響しない。

言い換えれば、強制振動試験から得られる共振曲線は、上部構造のみの特性に近く、これから得られる減衰常数は、上部構造固有の値に接近する。

したがって、鉄骨造のように比較的柔な建物では、地盤の影響を受けることが少なく、建物のばね定数や減衰常数を直接読取ることができる。

もし比較的低層の剛な建物になると、上部構造に現われる減衰特性に、基礎および地盤の影響が著しく大きくなるのが予想される。

この点に関して、N.N. Nielsen の実験報告^{文6)} が非常に参考になる。

彼は5階建の鉄筋コンクリート造建物と、9階建の鉄骨造建物について、起振機による強制振動試験を行ない、前者の減衰常数を0.018~0.022、後者は0.005であったと報告している。

鉄筋コンクリート造が鉄骨造に比べて大きな減衰性を

持っているのは、構造様式の違いもあるだろうが、地盤に対する両者の剛性の差からも説明されそうである。

彼自身両者の減衰性の差異について、前者が逸散型の減衰の影響を受けているのではないかと論及している。

また、日本で行なわれた各種の実験報告^{文7)} によると、通常の建物の減衰常数は平均0.05ぐらいで、彼の実験結果よりかなり大きな値を示している。

この理由を Nielsen は、日本の実験方法が Run-down test によるもので、Steady-state test によらなければ、正確な減衰特性は得られないと指摘している。

筆者は最近 Run-down test と Steady-state test の比較を克明に行ない、Run-down test であっても加速または減速を十分に緩やかに行なえば、両者の差が全くないことを確認してみた。

そして、過去にわれわれが行なっていた程度の Run-down test であれば、Steady-state test の結果とほとんど一致することも確かめた。

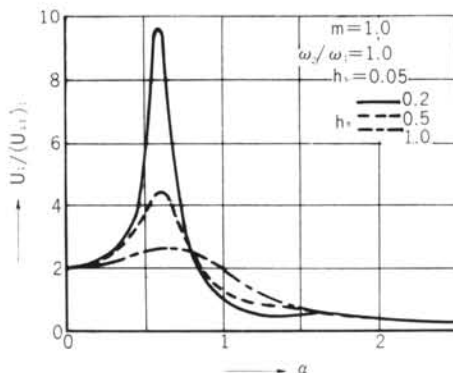


図-54

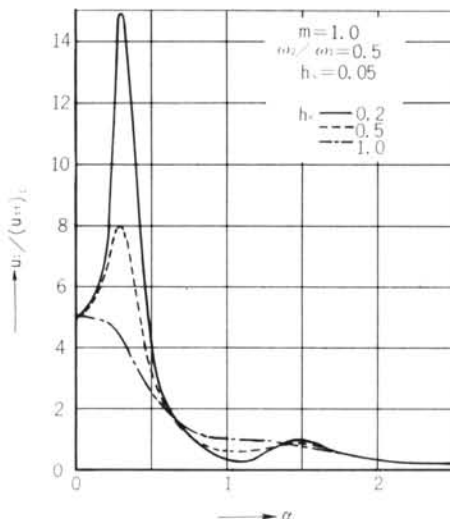


図-55

したがって、減衰常数値に関する彼我の差は、結局は両者の構造物の剛性の違いに起因しているとも考えられる。Nielsen の実験に供した建物(R.C.造5階建)の1次の固有振動数は2.3c/sであった。同規模の日本の建物であれば、3~4 c/s ぐらいが一般的である。日本の建物は比較的剛性が高いため、それだけ地盤の逸散型の減衰の影響を受け、先に述べたように、見かけ上建物の減衰が大きく観測されたとも考えられる。

これらの傾向をより具体的に示すために、 $\omega_2/\omega_1=1.0$ および 0.5 の場合について、式(125)の計算結果を図-54、55 に示した。

12. 2 地震動

図-48のモデル系に関して、地盤が震動するときの各質点の応答について調べてみよう。ただし、本章では地震動を調和波形の連続動として、特に地盤による効果を検討することを目的とした。ラムダムな自然地震を入力とする場合には、いずれも線型振動問題であるから、質点系の応答計算のプログラムがそのまま利用できる。

さて、運動方程式は

$$\left. \begin{aligned} M_1 \ddot{u}_1 + C_s(\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + K_1(u_1 - u_2) &= \omega^2 M_1 u_0 e^{i\omega t} \\ M_2 \ddot{u}_2 + C_s(\dot{u}_2 - \dot{u}_1) + K_1(u_2 - u_1) + C_e \dot{u}_2 + K_2 u_2 &= \omega^2 M_2 u_0 e^{i\omega t} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(130)$$

ここで、 u_0 は地震動の変位振巾である。

$u_1 = A_{10} e^{i\omega t}$, $u_2 = B_{10} e^{i\omega t}$ として式(130)に代入し、 A_{10} , B_{10} について整理すると

$$A_{10} = \frac{[K_1 + K_2 - \omega^2 M_2 + i\omega(C_s + C_e)] M_1 + (K_1 + i\omega C_1) M_2}{\Delta_{10}} \omega^2 u_0$$

$$B_{10} = \frac{(K_1 - \omega^2 M_1 + i\omega C_s) M_2 + (K_1 + i\omega C_s) M_1}{\Delta_{10}} \omega^2 u_0$$

$$\Delta_{10} = (K_1 - \omega^2 M_1)(K_2 - \omega^2 M_2) - \omega^2(M_1 K_1 + C_s C_e) + i\{\omega C_s(K_2 - \omega^2 M_2) + \omega C_e(K_1 - \omega^2 M_1) - \omega^3 C_s M_1\}$$

となる。

地震動を $U = u_0 e^{i\omega t}$ として

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= |u_1| \frac{\cos}{\sin}(\omega t + \varepsilon_{15} - \varepsilon_{14}) \\ u_2 &= |u_2| \frac{\cos}{\sin}(\omega t + \varepsilon_{16} - \varepsilon_{14}) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots(131)$$

ただし

$$|u_1| = \alpha^2 \sqrt{\frac{(1+m+\beta^2-\alpha^2)^2 + 4\{h_s(1+m) + h_e\beta\}^2 \alpha^2}{\{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2 - 4h_s h_e \beta \alpha^2\}^2 + 4\{h_s(\beta^2-\alpha^2) + h_e\beta(1-\alpha^2) - h_s m \alpha^2\}^2 \alpha^2}} \cdot u_0 \dots\dots\dots(132)$$

$$|u_2| = \alpha^2 \sqrt{\frac{(1+m-\alpha^2)^2 + 4h_s^2(1+m)^2 \alpha^2}{\{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2 - 4h_s h_e \beta \alpha^2\}^2 + 4\{h_s(\beta^2-\alpha^2) + h_e\beta(1-\alpha^2) - h_s m \alpha^2\}^2 \alpha^2}} \cdot u_0 \dots\dots\dots(133)$$

$$\varepsilon_{14} = \tan^{-1} \frac{2\alpha\{h_s(\beta^2-\alpha^2) + h_e\beta(1-\alpha^2) - h_s m \alpha^2\}}{(1-\alpha^2)(\beta^2-\alpha^2) - m\alpha^2 - 4h_s h_e \beta \alpha^2} \dots\dots\dots(134)$$

$$\varepsilon_{15} = \tan^{-1} \frac{2\alpha\{h_s(1+m) + h_e\beta\}}{1+m+\beta^2-\alpha^2} \dots\dots\dots(135)$$

$$\varepsilon_{16} = \tan^{-1} \frac{2h_s(1+m)\alpha}{1+m-\alpha^2} \dots\dots\dots(136)$$

である。

1例として、 $m=1.0$, $\omega_2/\omega_1=2.0$, $h_s=0.05$ とし、 $h_e=0.2, 0.5, 1.0$ としたとき、式(132)より M_1 の共振特性を描くと図-56のようになる。

また、式(133)より u_2 について計算すれば図-57のようになる。同図において振動数の高い範囲で大きな振巾を示すのは、地震動の振巾を一定としているためである。

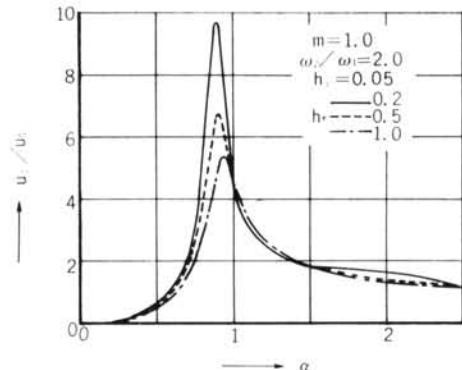


図-56

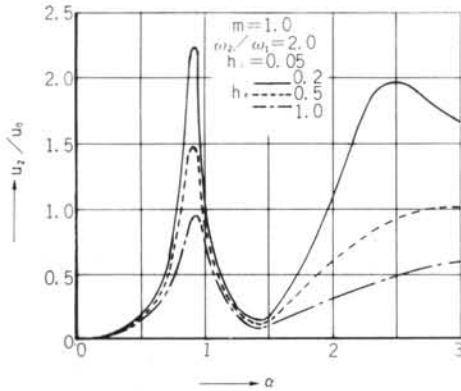


図-57

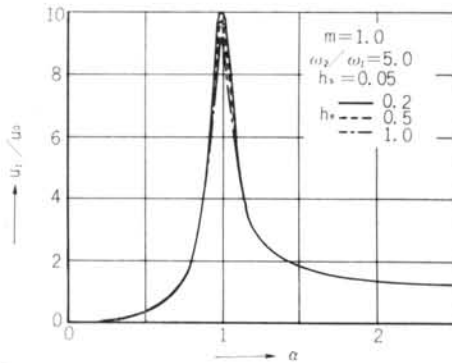


図-58

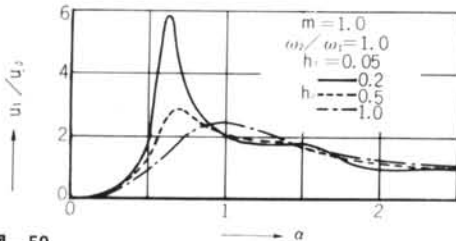


図-59

図-56, 57より、逸散型の減衰常数 h_e の変化によって、共振振動数には大きな影響を受けないが、共振時の振巾がかなり変動することがわかる。

しかし、上部構造が非常に柔らかくなると、図-58に示すように、逸散型の減衰効果はほとんど無視される。

逆に、上部構造が比較的剛になると、図-59に示すように、逸散型の減衰常数 h_e によって、各質点の共振特性は著しく変化し、その共振振動数までがかなり変動することがわかる。

以上述べたように、本章の検討によって、実際に建物等の固有振動数や減衰性を論ずる場合、つぎのような注意が必要であることが結論される。

(1) 上部構造が比較的柔な場合は、地盤の動学的な影

響を受けることが少なく、基礎部で完全固定とする仮定が許される。

(2) 上部構造が比較的剛になると、逸散型の減衰効果によって、共振振動数は大きな影響を受けなくても、上部構造に現われる見かけ上の減衰常数はかなり大きくなる。

(3) 上部構造がさらに剛になると、見かけの減衰常数がさらに大きくなるほか、共振振動数もかなり低下する。

実際の建物を図-48のモデル系に置き換えたとき、 B がどの程度になるかが問題である。

過去の幾多の実測資料から推定すると、公団住宅程度の R.C. 造建物で上記の(3)、高さ30m級の S.R.C. 造で(2)、それ以上の高さをもつ鉄骨造建物が(1)に相当するくらいであろう。

§ 13. 地下構造物の底面におけるばね常数

前章までは、基礎の接地面がすべて地表面にあるとして論じてきた。

実際の構造物には地下部分を含む場合の方が多い。

地下部分があることによって、力学的には基礎底面までの土かぶり圧の効果と、側面土の効果加わることになる。

それらを動的な問題として解くことは、数学的に甚だ困難でもあり、筆者の知る限りでは未だその種の公式の論文は発表されていないようである。

しかし、これを静的な問題として、基礎頂部に水平力が作用するとして、深い基礎の地盤反力と変位については、鳥海氏の解⁽⁸⁾があり、この種の問題の既発表の唯一の論文になっているようだ。

鳥海氏は、地盤を半無限弾性体、ポアソン比を各地層共通に $1/4$ とし、基礎は側圧を受けながらせん断変形のみをし、ロッキングは除外している。

ただ、解の一般式とそれを誘導するプロセスが、現在のところ未発表なので、残念ながら直接参考をすることができない。

もし、基礎の底面と側面の反力が、互いに独立に作用するものとすれば、それぞれの解析はむしろ容易なのであるが、実際には底面の応力による地盤内の変形が側面にも生じ、逆に側面の応力による変形が底面にも影響するはずである。

したがって、厳密には両者の相互作用として解かなければならないのであるが、段階的に問題を具体化する意

図から、本章では先ず側面の効果を考えず、底面のみによる地盤反力を問題にすることにした。

13. 1 上下方向

図-60に示すように、地表面からの深さ D なる地中の円形構造物に、静的な鉛直の力 P が作用したとする。

底面の任意の点に鉛直の力 dP が作用するとき、地中の任意の点 (x, y, z) における z 方向の変位 $d\zeta$ は、Mindlin²⁹⁾ によってつぎのように与えられている。

$$d\zeta = \frac{dP}{16\pi(1-\nu)\mu} \left[\frac{(z-D)^2}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{5-12\nu+8\nu^2}{R_2} + \frac{(3-4\nu)(z+D)^2-2Dz}{R_2^3} + \frac{6(z+D)^2zD}{R_2^5} \right] \dots\dots\dots(137)$$

ここで、 $R_1 = \sqrt{r^2 + (z-D)^2}$ 、 $R_2 = \sqrt{r^2 + (z+D)^2}$ 、 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ である。

基礎底面における応力を等分布に仮定すれば、鉛直荷重 P による基礎底面中心の上下変位 ζ は、式(137)で $z=0$ とおき

$$\zeta = \frac{P}{16\pi(1-\nu)\mu} \cdot \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{3-4\nu}{r} + \frac{5-12\nu+8\nu^2}{\sqrt{r^2+4D^2}} + \frac{4(3-4\nu)D^2-2D^2}{\sqrt{(r^2+4D^2)^3}} + \frac{24D^4}{\sqrt{(r^2+4D^2)^5}} \right] r dr d\theta \dots\dots\dots(138)$$

となる。これを計算し

$$\zeta = \frac{P}{8\pi(1-\nu)a^2\mu} \cdot d_{11} \dots\dots\dots(139)$$

ただし

$$d_{11} = (3-4\nu)a + (5-12\nu+8\nu^2)(\sqrt{a^2+4D^2} - 2D) + (5-8\nu) \left(D - \frac{2D^2}{\sqrt{a^2+4D^2}} \right) + D - \frac{8D^4}{\sqrt{(a^2+4D^2)^3}}$$

となる。よって、深さ D における上下のばね常数 $(K_z)_{z=D}$ は

$$(K_z)_{z=D} = \frac{P}{\zeta} = \frac{8\pi(1-\nu)a^2\mu}{d_{11}} \dots\dots\dots(140)$$

となる。

一方、地表面($D=0$)における上下のばね常数 $(K_z)_{z=0}$ は、接地圧を等分布に仮定したとき、註 2. (同題目その 1) より

$$(K_z)_{z=0} = \pi a \mu / (1-\nu)$$

であるから、 $(K_z)_{z=D}$ を $(K_z)_{z=0}$ の比として表わせば

$$\bar{K}_v = \frac{(K_z)_{z=D}}{(K_z)_{z=0}} = \frac{8(1-\nu)^2}{4\nu} \dots\dots\dots(141)$$

ただし

$$4\nu = 3-4\nu + (5-12\nu+8\nu^2)(\sqrt{1+16Z^2} - 4Z) + (5-8\nu) \left(2Z - \frac{8Z^2}{\sqrt{1+16Z^2}} \right) + 2Z - \frac{128Z^4}{\sqrt{(1+16Z^2)^3}}$$

である。

ここで、 \bar{K}_v は基礎底面が地表にある場合に対する上下ばね常数の比であり、 Z は無次元化された深さ ($Z=D/2a$) である。

$\nu=0.25$ および $\nu=0.50$ として、式(141)を数値計算すると図-61を得る。

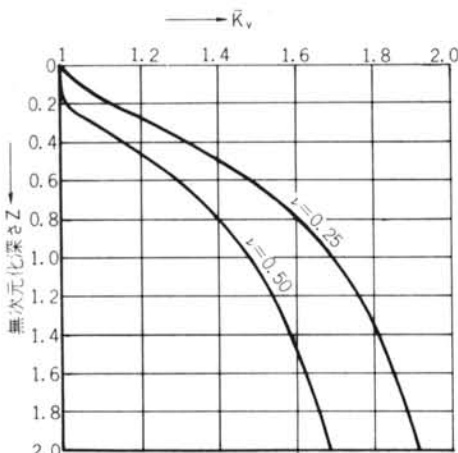


図-61

13. 2 水平方向

図-62に示すように、基礎底面に水平力 dQ が作用したとき、

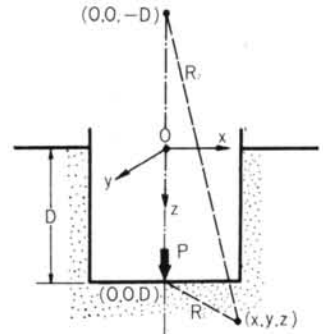


図-60

地中の任意の点における x 方向の変位 $d\xi$ は、Mindlin⁹⁾ によってつぎのように与えられている。

$$\Delta\xi = \frac{\Delta Q}{16\pi\mu(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)x^2}{R_2^3} + \frac{2Dz}{R_2^2} - \frac{6Dzx^2}{R_2^3} \right. \\ \left. + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+D} \left\{ 1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+D)} \right\} \right] \dots\dots\dots(142)$$

いま、基礎底面におけるせん断力を等分布に仮定すれば、基礎底面における微小部分のせん断力は

$$\Delta Q = Q/\pi a^2$$

したがって、せん断力 Q による基礎中心の水平変位 ξ は、式(142)で $z=D$, $x=r \cos \theta$ とおいて

$$\xi = \frac{Q}{4\pi\mu} \cdot \frac{1}{\pi a^2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[\frac{3-4\nu}{r} + \frac{1}{\sqrt{r^2+4D^2}} + \frac{r^2 \cos^2 \theta}{r^3} + \frac{(3-4\nu)r^2 \cos^2 \theta + 2D^2}{\sqrt{(r^2+4D^2)^3}} \right. \\ \left. - \frac{6D^2 r^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{(r^2+4D^2)^3}} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{\sqrt{r^2+4D^2}+2D} \left\{ 1 - \frac{r^2 \cos^2 \theta}{\sqrt{r^2+4D^2}(\sqrt{r^2+4D^2}+2D)} \right\} \right] r dr d\theta$$

となる。これを計算し

$$\xi = \frac{Q}{16\pi(1-\nu)a^2\mu} \cdot A_{12} \dots\dots\dots(143)$$

ただし

$$A_{12} = 2(a_1 + a_2 + a_3 + a_4) + a_5 + a_6 - a_7 - a_8 \\ a_1 = (3-4\nu)a \\ a_2 = \sqrt{a^2+4D^2} - 2D \\ a_3 = D - 2D^2/\sqrt{a^2+4D^2} \\ a_4 = 4(1-\nu)(1-2\nu) \{ \sqrt{a^2+4D^2} - 2D \log(\sqrt{a^2+4D^2}+2D) - 2D + 2D \log 4D \} \\ a_5 = a \\ a_6 = (3-4\nu) \{ \sqrt{a^2+4D^2} + 4D^2/\sqrt{a^2+4D^2} - 4D \} \\ a_7 = D^2 \{ 8D^2/\sqrt{(a^2+4D^2)^3} - 6/\sqrt{a^2+4D^2} + 2/D \} \\ a_8 = 4(1-\nu)(1-2\nu) \{ \sqrt{a^2+4D^2} - 4D \log(\sqrt{a^2+4D^2}+2D) - 2D + 4D \log 4D \}$$

となる。

よって、深さ D における水平のばね常数 $(K_x)_{z=D}$ は

$$(K_x)_{z=D} = \frac{Q}{\xi} = \frac{16\pi(1-\nu)a^2\mu}{A_{12}} \dots\dots\dots(144)$$

となる。

一方、地表面における水平のばね常数 $(K_x)_{z=0}$ は、接地圧を等分布に仮定したとき、註 5。(同題目その1)より

$$(K_x)_{z=0} = 2\pi a\mu/(2-\nu)$$

であるから、 $(K_x)_{z=D}$ を $(K_x)_{z=0}$ の比として表わせば

$$\bar{K}_H = \frac{(K_x)_{z=D}}{(K_x)_{z=0}} = \frac{8(1-\nu)(2-\nu)}{A_H} \dots\dots\dots(145)$$

ただし

$$A_H = 2(b_1 + b_2 + b_3 + b_4) + 1 + b_5 - b_6 - b_7 \\ b_1 = 3-4\nu \\ b_2 = \sqrt{1+16Z^2} - 4Z \\ b_3 = 2Z - 8Z^2/\sqrt{1+16Z^2} \\ b_4 = 4(1-\nu)(1-2\nu) \{ \sqrt{1+16Z^2} + 4Z \log 8Z/(\sqrt{1+16Z^2}+4Z) - 4Z \} \\ b_5 = (3-4\nu) \{ \sqrt{1+16Z^2} + 16Z^2/\sqrt{1+16Z^2} - 8Z \}$$

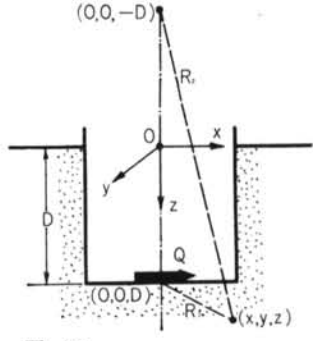


図-62

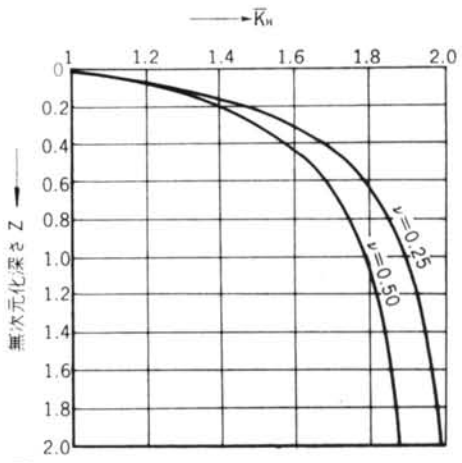


図-63

$$b_6 = 128Z^4/\sqrt{(1+16Z^2)^3} - 24Z^2/\sqrt{1+16Z^2} + 4Z$$

$$b_7 = 4(1-\nu)(1-2\nu) \{ \sqrt{1+16Z^2} + 8Z \log 8Z/(\sqrt{1+16Z^2} + 4Z) - 4Z \}$$

である。

$\nu=0.25$ および $\nu=0.50$ として、式(145)を数値計算すると図-63のようになる。

13. 3 回 転

図-64に示すように、地表面からの深さ D なる基礎盤に、鉛直の力 $4P$ が作用したとき、中心から r の距離における変位 4ζ は、式(137)より

$$4\zeta = \frac{4P}{16\pi(1-\nu)\mu} \left[\frac{3-4\nu}{r} + \frac{5-12\nu+8\nu^2}{\sqrt{r^2+4D^2}} + \frac{4(3-4\nu)D^2-2D^2}{\sqrt{(r^2+4D^2)^3}} + \frac{24D^4}{\sqrt{(r^2+4D^2)^5}} \right] \dots\dots\dots(146)$$

その点における r 方向の傾斜 ϕ_r は

$$\phi_r = \frac{\partial 4\zeta}{\partial r} = -\frac{4P}{16\pi(1-\nu)\mu} \left[\frac{3-4\nu}{r^2} + \frac{(5-12\nu+8\nu^2)r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^3}} + \frac{6(5-8\nu)D^2r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^5}} + \frac{120D^4r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^7}} \right]$$

x 方向の傾斜は

$$\phi_x = \phi_r \cos \theta$$

したがって、もし上記の点に力 $4P$ が作用すれば、中心における回転角 ϕ_{0x} は

$$\phi_{0x} = \frac{4P}{16\pi(1-\nu)\mu} \left[\frac{3-4\nu}{r^2} + \frac{(5-12\nu+8\nu^2)r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^3}} + \frac{6(5-8\nu)D^2r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^5}} + \frac{120D^4r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^7}} \right] \cos \theta$$

結局、円形基礎の中心における y 軸まわりの回転角は、 σ_z を分布圧力として

$$\phi = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^a \sigma_z \left[\frac{3-4\nu}{r^2} + \frac{(5-12\nu+8\nu^2)r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^3}} + \frac{6(5-8\nu)D^2r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^5}} + \frac{120D^4r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^7}} \right] \cos \theta \cdot r dr d\theta \dots\dots\dots(147)$$

ここで、基礎盤の回転による接地面の圧力を三角分布と仮定すると

$$\sigma_z = kx$$

k は比例定数、 $x = r \cos \theta$

であるから、基礎盤におけるモーメントの釣り合いから、

$$M_y = \int_s \sigma_z x ds = k \int_s x^2 ds = k I_y$$

$\therefore k = M_y/I_y$ (I_y は基礎底面の断面2次モーメント)

となる。よって、式(147)より

$$\phi = \frac{1}{16\pi(1-\nu)\mu} \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{M_y}{I_y} \left[\frac{3-4\nu}{r^2} + \frac{(5-12\nu+8\nu^2)r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^3}} + \frac{6(5-8\nu)D^2r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^5}} + \frac{120D^4r}{\sqrt{(r^2+4D^2)^7}} \right] \cos^2 \theta \cdot r^2 dr d\theta \dots\dots(148)$$

となる。これを計算し

$$\phi = \frac{M_y}{4\pi a^4 \mu (1-\nu)} (c_1 + c_2 + c_3 + c_4) \dots\dots\dots(149)$$

$$c_1 = (3-4\nu)a$$

$$c_2 = (5-12\nu+8\nu^2) \left\{ \sqrt{a^2+4D^2} + \frac{4D^2}{\sqrt{a^2+4D^2}} - 4D \right\}$$

$$c_3 = (5-8\nu) \left\{ \frac{8D^4}{\sqrt{(a^2+4D^2)^3}} - \frac{6D^2}{\sqrt{a^2+4D^2}} + 2D \right\}$$

$$c_4 = \frac{96D^6}{\sqrt{(a^2+4D^2)^5}} - \frac{40D^4}{\sqrt{(a^2+4D^2)^3}} + 2D$$

となる。よって、回転のばね常数 $(K_\theta)_{z=D}$ は

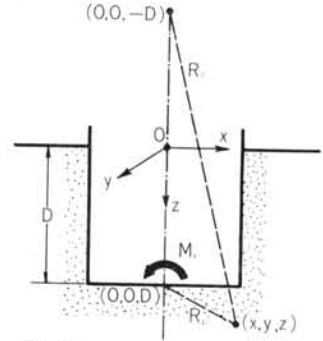


図-64

$$(K_{\phi})_{z=D} = \frac{4\pi a^4(1-\nu)\mu}{c_1+c_2+c_3+c_4} \dots\dots\dots(150)$$

となる。

一方、地表面における回転のばね常数 $(K_{\phi})_{z=0}$ は、接地圧を三角分布としたとき、

$$(K_{\phi})_{z=0} = \pi a^3 \mu / 2(1-\nu)$$

であるから、 $(K_{\phi})_{z=D}$ を $(K_{\phi})_{z=0}$ の比として表わすと、

$$K_R = \frac{(K_{\phi})_{z=D}}{(K_{\phi})_{z=0}} = \frac{8(1-\nu)^2}{d_1+d_2+d_3+d_4} \dots\dots\dots(151)$$

$$d_1 = 3-4\nu$$

$$d_2 = (5-12\nu+8\nu^2) \left\{ \sqrt{1+16Z^2} + \frac{16Z^2}{\sqrt{1+16Z^2}} - 8Z \right\}$$

$$d_3 = (5-8\nu) \left\{ \frac{128Z^4}{\sqrt{(1+16Z^2)^3}} - \frac{24Z^2}{\sqrt{1+16Z^2}} + 4Z \right\}$$

$$d_4 = \frac{6144Z^6}{\sqrt{(1+16Z^2)^5}} - \frac{640Z^3}{\sqrt{(1+16Z^2)^3}} + 4Z$$

となる。

$\nu=0.25$ および $\nu=0.50$ として、式(151)を数値計算すると図-65のようになる。

以上、地下構造物について基礎底面におけるばね常数を、上下、水平、回転の3つの場合について求めてみた。

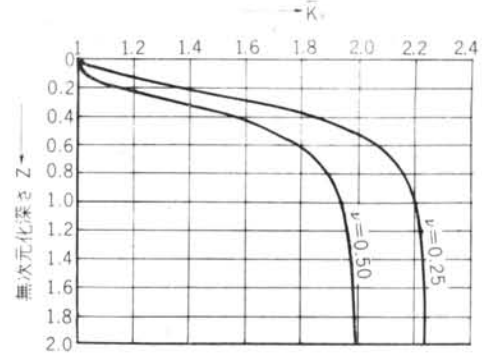


図-65

無次元化深さ Z	K_V		K_H		K_R	
	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$	$\nu=0.25$	$\nu=0.5$
0.1	1.06	1.00	1.27	1.24	1.13	1.02
0.2	1.14	1.03	1.46	1.40	1.35	1.14
0.3	1.23	1.09	1.59	1.50	1.61	1.34
0.4	1.33	1.16	1.67	1.58	1.81	1.53
0.5	1.41	1.23	1.73	1.63	1.96	1.67
0.6	1.48	1.29	1.78	1.68	2.05	1.77
0.7	1.55	1.35	1.82	1.71	2.11	1.84
0.8	1.60	1.39	1.85	1.74	2.15	1.88
0.9	1.65	1.43	1.87	1.76	2.18	1.91
1.0	1.69	1.47	1.89	1.78	2.19	1.93
1.2	1.76	1.54	1.92	1.81	2.22	1.96
1.4	1.81	1.59	1.95	1.84	2.23	1.97
1.6	1.86	1.63	1.96	1.86	2.24	1.98
1.8	1.89	1.66	1.98	1.87	2.24	1.99
2.0	1.92	1.69	1.99	1.88	2.24	1.99

表-4

結果は、表-4 および 図-61, 63, 65 に示すように、基礎盤が深くなるにつれて、地盤のばね常数は地表面の場合に比べてかなり増大することがわかる。

このような現象を、土かぶり圧の効果と呼ぶことにしよう。

したがって、地下構造物は側壁面による地盤の拘束が加わるほか、基礎底面における地盤剛性もかなり大きくなることわかる。

§ 14. 地下構造物の側面におけるばね常数

この問題を厳密に解くことは、甚だむずかしい。

それは、地中応力が剛な地中構造物によって拘束を受けるためである。

そこで本章では、図-66に示すように、地中に比較的薄い円板があったとし、それに水平力 Q が作用したとき、地盤の反力は側面のみから受けるものとして、側面における地盤のばね常数を試算してみた。

また、側面における地盤反力の分布は、加力方向に垂直な投影面に均等分布とする。

図-66を参照し、側面の任意の微小長さにおける応力 $dQ = Qah \cos \theta d\theta$ / $4ah$ による、基礎中心部の変位は、式(142)において、 $R_1 = a$ 、 $R_2 = \sqrt{a^2 + 4D^2}$ 、 $x = a \cos \theta$ において

$$d\xi = \frac{Q}{16\pi\mu(1-\nu)} \cdot \frac{1}{4ah} \left\{ \frac{3-4\nu}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2+4D^2}} + \frac{\cos^2\theta}{a} + \frac{(3-4\nu)a^2 \cos^2\theta + 2D^2}{\sqrt{(a^2+4D^2)^3}} - \frac{6D^2 a^2 \cos^2\theta}{\sqrt{(a^2+4D^2)^5}} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{\sqrt{r^2+4D^2}+2D} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)a^2 \cos^2\theta}{\sqrt{a^2+4D^2}(\sqrt{a^2+4D^2}+2D)^2} \right\} ah \cos\theta d\theta$$

となる。

したがって、水平力 Q による基礎中心の変位 ξ は¹⁵⁾

$$\xi = 2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\xi = \frac{Q}{32\pi\mu(1-\nu)} \cdot d_{13} \dots\dots\dots(152)$$

ただし

$$d_{13} = \frac{3-4\nu}{a} + \frac{1}{\sqrt{a^2+4D^2}} + \frac{2D^2}{\sqrt{(a^2+4D^2)^3}} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{\sqrt{a^2+4D^2}+2D} + \frac{2}{3} \left\{ \frac{1}{a} + \frac{(3-4\nu)a^2}{\sqrt{(a^2+4D^2)^3}} - \frac{6a^2 D^2}{\sqrt{(a^2+4D^2)^5}} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)a^2}{\sqrt{a^2+4D^2}(\sqrt{a^2+4D^2}+2D)^2} \right\} \dots\dots\dots(153)$$

である。よって、深さ D における側面のばね常数を $(K_t)_{z=D}$ とおくと、

$$(K_t)_{z=D} = \frac{16\pi\mu(1-\nu)}{d_{13}} = \frac{16\pi(1-\nu)a\mu}{d_{13}} \dots\dots\dots(154)$$

$$d_{13} = 3-4\nu + \frac{1}{\sqrt{1+16Z^2}} + \frac{8Z^2}{\sqrt{(1+16Z^2)^3}} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{\sqrt{1+16Z^2}+4Z} + \frac{2}{3} \left\{ 1 + \frac{3-4\nu}{\sqrt{(1+16Z^2)^3}} - \frac{24Z^2}{\sqrt{(1+16Z^2)^5}} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{(1+16Z^2)(\sqrt{1+16Z^2}+4Z)^2} \right\} \text{ となる。}$$

ここで、 Z は無次元化深さ $D/2a$ である。

式(154)において、 $Z=0$ とおくと

$$(K_t)_{z=0} = 6\pi a\mu / (3-\nu) \dots\dots\dots(155)$$

となって、基礎底面におけるばね常数(均等分布の場合) $(K_x)_{z=0} = 2\pi a\mu / (2-\nu)$ の $3(2-\nu)/(3-\nu)$ 倍になっている。

図-67は、式(154)について計算した結果を図示したものである。

同図より、側面のばね常数は、地表面付近において急激に低下

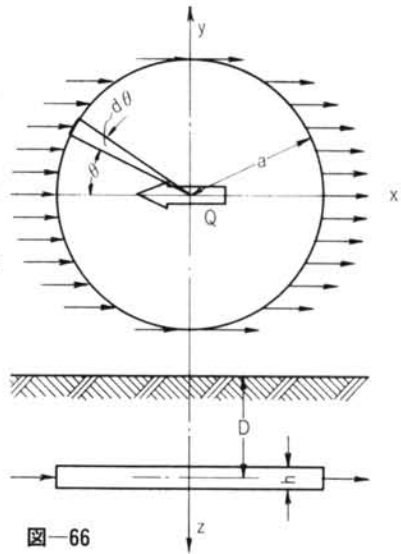


図-66

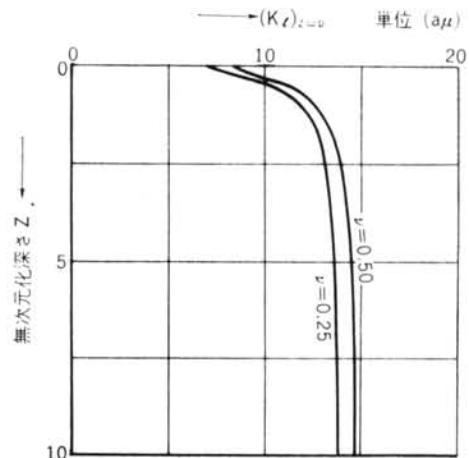


図-67

し、無次元化深さ Z が3を越える付近からはほぼ一定値に収斂していることがわかる。

さらに重要なことは、側面のばね常数は、基礎の半径 a および無次元化深さ Z の関数になっていることである。この傾向は、鳥海氏の結果^{文10)}と良く一致している。

本章の結果を、一般の地下構造物の地盤反力の問題に適用する場合、側圧と底面せん断力に分担される割合が容易には解析されない。

今後の重要問題として残すことにした。

しかし、くい等の水平抵抗を論ずる場合、すべての地盤反力を側圧によって受けるため、本章の結果は直ちに活用し得ると思われる。

くいの水平抵抗に関しては、古くから多くの研究が成されている。

しかし、地盤反力に関してはいずれも次式の仮定から出発している。

$$q = Kx \quad \dots\dots\dots(156)$$

ここで、 q はくいの単位長さ当りの反力(t/m)であり、 x は水平変位、 K は横方向反力係数と呼ばれ、土質力学では一般に E_s なる記号で表わしている。

Y. L. Chang^{文11)}は、近似的に $E_s = \text{const}$ として問題を解くことを提案している。

A. E. Cummings^{文12)}および L. A. Palmer & J. B. Thompson^{文13)}は実験的につぎのような提案をし、いずれも深さによって E_s が増加することを条件にしている。

$$\text{Cummings } E_s = \frac{E_{s0}(L-z)}{L} \quad \dots\dots\dots(157)$$

$$\text{Palmer } E_s = K_0 \left(\frac{z}{L}\right)^n \quad \dots\dots\dots(158)$$

これらの傾向を定性的に表現すれば、**図-68**のようになるであろう。

本論の傾向は、丁度 Chang と Palmer の中間にあることがわかる。

さて、本論の結果を、既往の研究成果と定量的に検討する目的で、つぎのような比較をしてみた。

K. Terzaghi^{文14)}は、横方向反力係数 E_s はくい巾 B に比例するものとして、その比例係数 k_h を coefficient of horizontal subgrade reaction と称し、粘性土と砂質土に分けてつぎのように提案している。

$$E_s = k_h B \quad \dots\dots\dots(159)$$

(1) 粘性土の場合

$$k_h = 30k_{h1}/B = 20\bar{k}_{h1}/B \quad \dots\dots\dots(160)$$

ここで、 k_{h1} は巾30cmの帯状の板に対する値であり、 \bar{k}_{h1} は30×30cmの正方形板に対する値であり、 \bar{k}_{h1} をつぎのように提案している。

粘土のコンシステンシー	stiff	Very stiff	Hard
粘土の圧縮強度 kg/cm ²	1~2	2~4	4以上
\bar{k}_{h1} の提案値 kg/cm ³	2.4	4.8	9.6

表-5

式(160)を式(159)に代入すると

$$E_s = 20\bar{k}_{h1} \quad \dots\dots\dots(161)$$

となって、 E_s はくい巾 B に無関係になり、 \bar{k}_{h1} に上記の提案値を代入すれば、**図-69**の破線(1), (2), (3)のようになる。

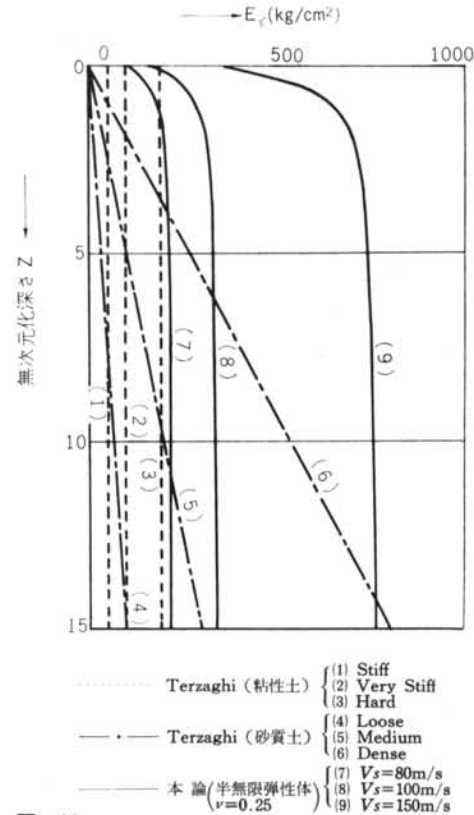


図-69

(2) 砂質土の場合

$$k_h = n_h z / B \quad \dots\dots\dots(162)$$

ここで、 n_h を constant of horizontal subgrade reaction

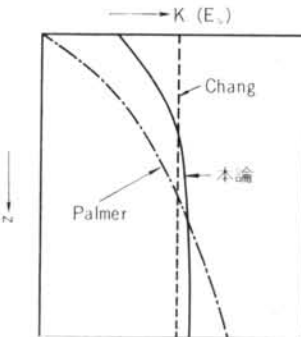


図-68

と呼び、巾30 cmのくいに對してつぎの値を提案している。

砂の相対密度	Loose	Medium	Dense
乾砂または湿砂に對する $n_h \text{ kg/cm}^3$	0.22	0.67	1.8

表一六

式(162)を式(159)に代入すると

$$E_s = n_h z$$

となるが、深さ z を無次元化深さ $Z = z/B$ で置換すれば

$$E_s = n_h B Z \quad \dots\dots\dots(163)$$

となる。

上記の提案値を使って、式(163)を計算すると図一六9の1点鎖線(4), (5), (6)のようになる。

さて、本論の結果すなわち式(154)において、 $2a = 30 \text{ cm}$ として数値計算をすると、図一六9の実線(7), (8), (9)のようになる。

同図より、Terzaghi のいわゆる土質工学的慣用値とは、かなり傾向および値が異なっていると言えよう。

これは、土質工学的慣用値が、比較的大きな変形を伴った実験的値であるのに対し、本論のように、半無限(semi-infinite)、均質(isotropic)、一様(homogeneous)な弾性体と仮定したところに本質的な問題があるのかもしれない。

しかし、Terzaghi の提案であっても、粘性土の場合に結局はくいに無関係に E_s 値が定められること、また深さの考慮が全く無視されていることなど、必ずしも実際に適切だとは思われない。

実際に、 E_s 値の想定に関しては、前記3氏のほかY.L. Changの提案^{文11)} D.A. Hopkinsの提案^{文15)} 福岡、宇都の研究^{文16)} などがあつた、未だ定説が確立されるに至っていないのが実情である。

今後に残された課題として、これ以上の検討は後日テーマを改めて行なうことにしたい。

§ 15. ポアソン比と弾性波速度の問題点

本論の諸数値計算において、ポアソン比をすべて0.25として与えてきた。これは、この種の各理論において慣用されている値で、すなわち地盤を等方等質の弾性体と見なしている。

実際の地盤のポアソン比については、幾多の研究者によって実測され、多くの報告書が発表されている。

実測は、供試体に荷重を加え、横方向の変形を計るような静的な方法や、弾性波の伝播速度から求める動的な方法など、さまざまな方法が工夫されている。

しかし、それらの測定方法によって得られる結果に相当なバラツキを生じているのは、自然の地盤の不可解な性質の一面を物語っているのではないだろうか。

N.N. Ivanov と T.P. Ponomarev^{文17)} は、粘土の供試体の圧縮試験において、横方向の変形がないことから、粘土のポアソン比を0としている。

K. Terzaghi^{文17)} は、3軸圧縮試験において、縦横2方向の圧力の比を測定し、砂のポアソン比を0.3、粘土を0.41~0.43としている。

G. I. Pokrovsky^{文17)} は、特殊な装置を工夫し、やはり横方向の圧力比を測定し、粘土のポアソン比として0.38~0.40を得ている。

Ramspeck^{文17)} は、縦波および横波の伝播速度の比を測定し、湿った粘土のポアソン比は0.5に近く、黄土で0.44、砂質土で0.42~0.47(1例だけ0.31)であつたと報告している。

N. A. Tsytovich^{文17)} は、砂質土を $\nu = 0.15 \sim 0.25$ 、砂またはシルト混りの粘土を $\nu = 0.30 \sim 0.35$ 、粘土を $\nu = 0.35 \sim 0.40$ とすることを奨めている。

また、R.Z. Katsenelenbogen は、1軸および3軸の圧縮試験から、ポアソン比は含水量に無関係で、砂質分が多いほど小さく、純粋な粘土で0.50、30%の砂混入で0.42であつたとしている。

このように、ポアソン比は測定方法によって大きなバラツキを示すのであるが、ただ共通して言えることは、砂質土より粘性土の方が大きいことである。

本論のように、動的な問題として、しかも極めて微小変形を対象としている場合には、静的な方法でしかも大変形における測定値をそのまま使うわけにはいかないであらう。

もし、縦波と横波が区別して正確に計れる方法があれば、その伝播速度の比からポアソン比を推定する方法が最も適当であると思われる。

完全弾性体としたとき、縦波速度 V_p と横波速度 V_s との間に

$$\frac{V_p}{V_s} = \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad \dots\dots\dots(164)$$

の関係があり、ポアソン比 ν に対する V_p/V_s を図示すると図一七0のようになる。

V_p , V_s のうち、とりわけ V_s の計測が甚だ厄介なものであるが、過去に幾多の実測にもとづく資料が発表されている。

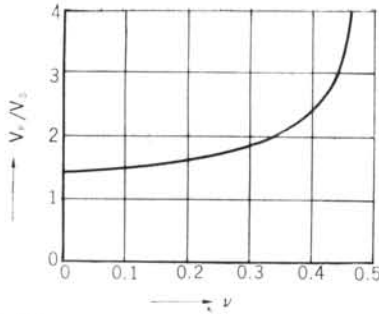


図-70

D.D. Barkanの文献^{文18)}によると、表-7 のようになっている。同表の ν 値は、式(164)の関係から算出したものである。

土質分類	γ (t/m ³)	V_p	V_s	V_p/V_s	ν
湿った粘土	1.8	1,500	150	10.0	0.49
黄土(Loess)	1.64	800	260	3.1	0.44
締った砂れき	1.67	480	250	1.9	0.31
細砂	1.62	300	110	2.7	0.42
中砂	1.62	550	160	3.4	0.45
れき(中粒)	1.8	750	180	3.9	0.46

表-7

このように、実際の地盤のポアソン比は、土質分類によってかなりひらきがあるが、少なくとも本論あるいはこの種の各理論で仮定している0.25より大きいことは確かであろう。

そこで、ポアソン比の変化によって、各要素がどのような影響を受けるのか調べてみよう。

まず、地盤のばね常数であるが、 $\nu=0.25$ の場合を1.0として、各 ν 値に対する K_x (水平)、 K_z (上下)、 K_ϕ (回転)を示すと図-71のようになる。

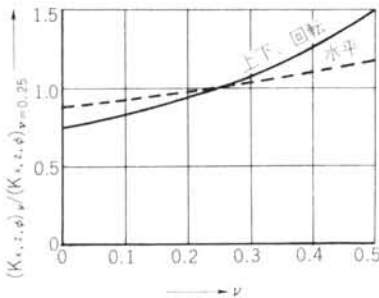


図-71

$\nu=0.4$ とすれば、 K_x は約10%、 K_z 、 K_ϕ は約25%大きくなる程度である。

つぎに、波動リアクタンス C_x 、 C_z 、 C_ϕ であるが、や

はり $\nu=0.25$ のときを1.0として、各 ν 値に対する変化の傾向を図-72に示した。

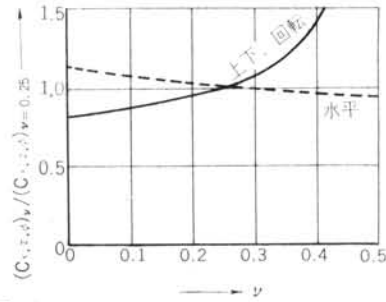


図-72

同図より、水平動の場合の C_x はポアソン比にあまり関係しないが、上下、回転動の場合にはかなり大きくなる($\nu=0.4$ で約40%)ことがわかる。

本論の適用に当たって、ポアソン比を各土質分類によって、どの程度に考えたらいいか大きな問題ではあるが、信頼できる資料の少ない今日では、近似計算を前提とし、従来の慣用値0.25を採って大きな矛盾は生じないであろう。

つぎに、弾性波の伝播速度の決定であるが、縦波は比較的計測が容易であっても、横波速度に換算する際にやはりポアソン比が問題になる。

横波速度を直接に測定する方法も、2, 3提案され実際に利用されているが、敷地や周囲の制約を受け、実用上いろいろの障害がある。

弾性波の伝播速度は、地層の種類、標準貫入試験の N 値、あるいは内部摩擦角とか粘着力などと密接な関係を持っているであろう。

直接に測定することが面倒であるだけに、これらの関係を調べておく実用上甚だ便利なのであるが、今のところよくわかっていない。

近年、弾性論の応用によって、地盤に関する力学が急速に発達したのであるが、一層の実用化をはかるために、弾性体としての地盤の本質的な性質(E , μ , ν etc.)を、実用的な角度から追求する必要性を痛感する次第である。

§.16 Ground Compliance の K , C 置換について

半無限弾性地盤上に置かれた質量のない円板に、 $F = F_0 e^{i\omega t}$ なる調和波形の力が加わったとき、その中心の変位 u は一般式として、

$$u = \frac{F_0}{\mu a} [f_1 + i f_2] e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(165)$$

なる形で与えられる。文19～文27)

上式の $[f_1 + i f_2] / \mu a$ に相当する項を Ground Compliance と呼び、剛性(stiffness)の逆数の次元を持ち、半無限弾性地盤の動学的特性を示す重要な値となっている。

Ground Compliance という呼名は、Thomson and Kobori の文献^{文25)}において初めて使われているようだ。

このような伝達力を考慮して、機械基礎あるいは建物の振動を論ずるとき、Ground Compliance を等価的な意味のばねとダッシュポットに置きかえて、新たに運動方程式を立てることが便利であり、一般的に行なわれている。

すなわち、式(165)の複素数部を等価の意味のばね常数 K_E と粘性係数 C_E に置きかえたとすれば

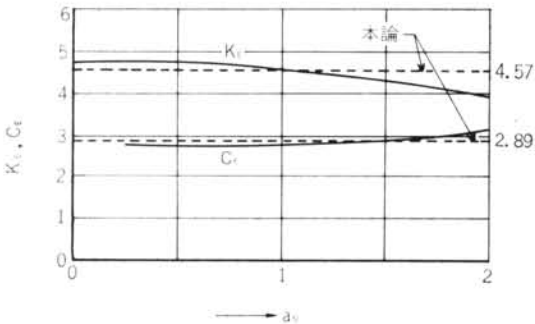
$$f_1 + i f_2 = \frac{1}{K_E + i a_0 C_E} \quad \dots\dots\dots(166)$$

より

$$K_E = \frac{f_1}{f_1^2 + f_2^2} \quad \dots\dots(167) \quad C_E = \frac{-f_2}{a_0(f_1^2 + f_2^2)} \quad \dots\dots(168)$$

となる。ここで a_0 は無次元化振動数、 $a_0 = \omega a \sqrt{\rho/\mu} = \omega a / V_s$ である。

1例として、水平動に関する Arnold の結果^{文24)}から、式(167)、(168)より K_E 、 C_E を求めると図-73 のようになる。



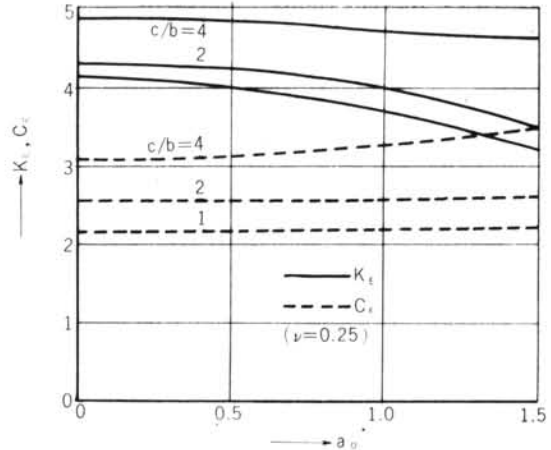
Ground Compliance より換算した等価の意味のばね常数 K_E と粘性係数 C_E (Arnold の水平動の解より) 破線は本論の値

図-73

また、小堀氏が矩形基礎について行なった結果^{文28)}を引用すれば図-74 のようになる。

両図より、 a_0 が小さい範囲 ($0 < a_0 < 2$) では、 K_E 、 C_E もほぼ一定値になることがわかる。

すなわち、 a_0 が小さい領域では、Ground Compliance を等価の K_E 、 C_E に置きかえるとき、 K_E 、 C_E 共に振動



矩形基礎の Ground Compliance を等価の意味のばね常数 K_E と粘性係数 C_E に換算したもの(小堀氏の文献より引用)

図-74

数に無関係な定数として実用上問題はなさそうである。

実際に、機械基礎では ω が大きくても a が小さく、地震波では a が大きくても ω が小さく、 a_0 が 2 を越すことは稀であるとされている。^{註16)}

さて、本研究では、地盤上に置かれた円板が運動するとき、その接地面には変位に比例した復元力と、波動現象による応力がそれぞれ独立に作用するという仮定から出発している。

変位に比例した復元力は、接地応力の分布を仮定し、地中応力を Boussinesq の分布としたときの基礎中心の変位から求めている。

このようにして得られる地盤のばね常数 K は、静的な場合の理論値であり、もともと振動数には無関係で、動的な場合にもそのまま保存されるとしている。

一方、波動現象にもとづく応力は、波動が接地面から平面波状に輻射されるものとして導入し、田治見氏の結果を使って補正している。

このようにして得られる波動応力は、外力に対し π の位相差をもち、振動速度に比例した反力として表わされ、その比例定数 C_e を波動リアクタンスと呼び、一般の粘性減衰と同じディメンションを持つことになる。

したがって C_e も振動数に無関係な定数である。

さて、本論の K 、 C_e 値を Ground Compliance から導かれる K_E 、 C_E 値と比較する目的で、つぎのような書きかえをしてみよう。

質量のない footing について、その動的な変位 u は $u = F_0 e^{i\omega t} / (K + i\omega C_e)$ $\dots\dots\dots(169)$

水平動の場合、 $K = 8a\mu / (2 - \nu)$ 、 $C_e = \rho V_s \kappa S$ であるから式(169)に代入して、

$$u = \frac{F}{a\mu} \cdot \frac{1}{\frac{8}{2-\nu} + ia_0\kappa\pi} e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(170)$$

となる。式(170)を式(165), (166)と比較して

$$K_E = \frac{8}{2-\nu} \quad \dots\dots(171) \quad C_E = \kappa\pi \quad \dots\dots(172)$$

となる。

$\nu=0.25$ のとき

$$K_E = 4.57, \quad C_E = 2.89$$

となり、ともに a_0 に無関係な定数として表わされる。

図-73の破線は、このようにして得られた K_E, C_E 値を示したもので、Ground Compliance より導かれた K_E, C_E 値と極めて良く一致している。

以上の説明で明らかなように、本論の K, C_e 値はもともと a_0 が小さい範囲 ($0 < a_0 < 2$) に適用する等価のばね常数および粘性係数なのである。

Ground Compliance を等価の K, C 値に置きかえて使用する限り、本論の適用は極めて有効になるのである。

つづいて本論の結果より逆に Ground Compliance に換算する方法を示し、他の諸研究結果と比較してみよう。

式(169)より

$$u = F_0 \left[\frac{K}{K^2 + \omega^2 C_e^2} - i \frac{\omega C_e}{K^2 + \omega^2 C_e^2} \right] e^{i\omega t}$$

$$= \frac{F_0}{a\mu} [f_1 + if_2] e^{i\omega t} \quad \dots\dots\dots(173)$$

とおけば、

a_0	f_1			$-f_2$		
	水平	上下	回転	水平	上下	回転
0	0.219	0.188	0.281	0	0	0
0.2	0.215	0.175	0.278	0.027	0.047	0.028
0.4	0.206	0.145	0.270	0.052	0.079	0.055
0.6	0.191	0.113	0.257	0.073	0.092	0.079
0.8	0.174	0.086	0.241	0.088	0.093	0.098
1.0	0.156	0.066	0.223	0.099	0.090	0.114
1.2	0.139	0.051	0.205	0.105	0.084	0.125
1.4	0.123	0.041	0.187	0.109	0.077	0.133
1.6	0.108	0.033	0.169	0.109	0.071	0.138
1.8	0.095	0.027	0.153	0.109	0.066	0.140
2.0	0.084	0.022	0.138	0.106	0.061	0.141

本論より算出した Ground Compliance の素子 ($\nu=0.25$ の場合)

$$u = \frac{F_0}{\mu a} [f_1 + if_2] e^{i\omega t}$$

表-8

(水平動)

$$f_{1H} = \frac{8(2-\nu)}{64 + a_0^2 \kappa_h^2 \pi^2 (2-\nu)^2}$$

$$-f_{2H} = \frac{a_0 \kappa_h \pi (2-\nu)^2}{64 + a_0^2 \kappa_h^2 \pi^2 (2-\nu)^2} \quad \dots\dots\dots(174)$$

(上下動)^{註17)}

$$f_{1V} = \frac{4(1-\nu)}{16 + a_0^2 \kappa_v^2 \pi^2 2(1-\nu)^3 / (1-2\nu)}$$

$$-f_{2V} = \frac{a_0 \kappa_v \pi (1-\nu)^2 \sqrt{2(1-\nu)} / (1-2\nu)}{16 + a_0^2 \kappa_v^2 \pi^2 2(1-\nu)^3 / (1-2\nu)} \quad \dots\dots(175)$$

(回転動)^{註18)}

$$f_{1R} = \frac{24(1-\nu)}{64 + 18a_0^2 \kappa_r^2 \pi^2 (1-\nu)^3 / 16(1-2\nu)}$$

$$-f_{2R} = \frac{9a_0 \kappa_r \pi (1-\nu)^2 \sqrt{2(1-\nu)} / 4\sqrt{1-2\nu}}{64 + 18a_0^2 \kappa_r^2 \pi^2 (1-\nu)^3 / 16(1-2\nu)} \quad \dots\dots(176)$$

となる。

図-75は、式(174)によって本論より換算した Ground Compliance の素子 f_{1H}, f_{2H} を図示したものである。

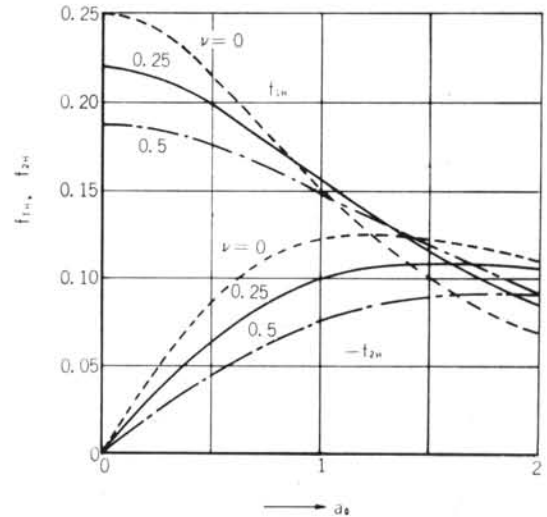


図-75

また、図-76は、 $\nu=0.25$ の場合について、Arnold の結果と比較したものである。

本論の結果が、Arnold の結果に最も良く一致する例でもある。

図-77は、上下動について式(175)および註17. の式から得られた結果と、Arnold, Sung の結果を重ねて示したものである。

基礎の接地面から逸散する波動の形態を横波とした方が、Arnold および Sung 等の結果に近いのであるが、幾多の実測資料に照合すると、これを縦波とした方が良

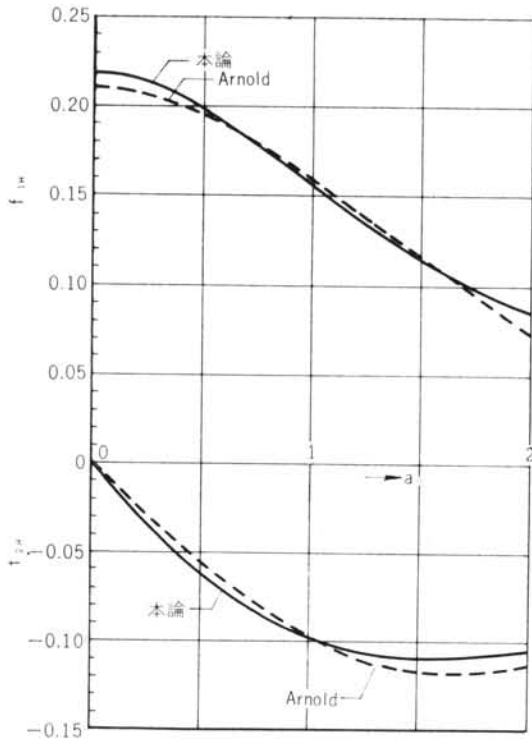


図-76

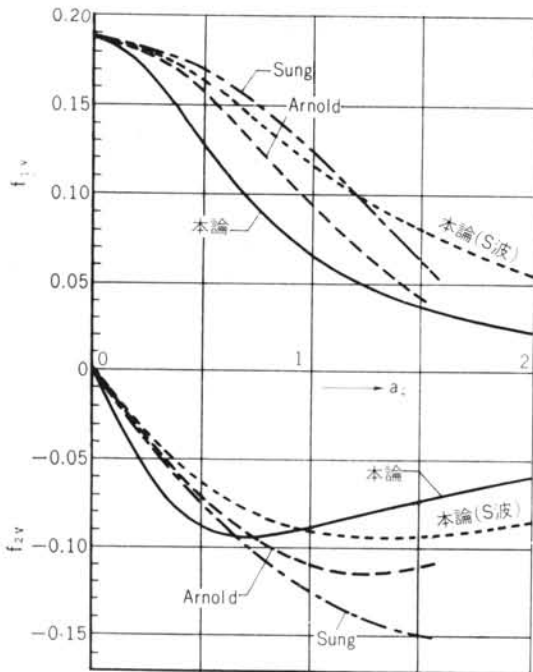


図-77

く適合するので、本論では上下、回転の場合の波動の形態を縦波としている。

図-78は回転動について、式(176)から導かれたものである。

これらのように、本論から導かれる Ground Compliance は、振動数 a_0 とポアソン比 ν の簡単な一般式として表わされ、それらの結果が実用的範囲において、複雑な無限積分より得られる結果^{文19~27)} とほぼ一致するのである。

甚だ難解として敬遠されがちな Ground Compliance の実用解として推奨するゆえんである。

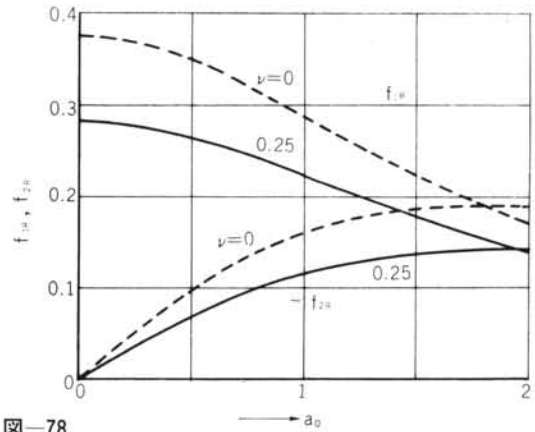


図-78

む す び

弾性地盤上に置かれた基礎あるいは建物等が運動するとき、その接地面に作用する伝達力を無視することは危険である。

その伝達力は、一般に式(165)に示すように、複素数の形で表現され、これを Ground Compliance と呼ばれている。

文献(9)~(27)に挙げたように、Ground Compliance に関して過去に優れた数々の論文が発表されているが、さらに本研究を行なっているのは、つぎのような理由による。

(1) 既往の研究は、接地圧の分布を Fourier-Bessel 積分で表わし、それを境界条件に用いている。

そのため、Ground Compliance の計算の積分が極めて複雑で、これを数値計算によるほかなく、振動数 ω の一般式として表わすことができない。

(2) この種の問題を実用面で応用するとき、結局は等価のばね常数と減衰係数に置きかえることになるだろうが、その置きかえが計算技術上面倒である。

(3) もともと理想化された仮定にもとづく解析であり、自然の地盤という甚だ曖昧な媒体を対象にしているのであるから、いずれにせよ近似解であることに変わりない。

(4) Ground Compliance の重要性は今や良く認識されつつあるが、既往の諸研究がすべて数学的に極めて高等で一般には容易に理解されず、とかく敬遠されがちである。したがって近似的でも実用的な解法が望まれる。

さて、本論の近似的なることの意味は、§ 16. で詳説したように、無次元化振動数 a_0 が実用的な領域において、既往の諸研究結果と良く一致するというのである。

もともと、地盤を質量のないばね(地盤係数)と仮定して解析する方法は古くからあって、一般に良く親しまれている。

このような考え方では、地下逸散にもとづく地盤の減衰効果を、付加質量(virtual mass)なる概念をもって修正されている。

しかし、地盤係数も付加質量もすべて経験的な臆測によって定められ、幾多の実験によってこの経験を補足する以外に道はなかった。

本研究は、これらの地盤係数とか付加質量といった概念を、具体的に地盤固有の弾性的性質(μ, ν)と基礎の質量および寸法(M, a)の一般式として表わしたのもとも言える。

これらの方法が成立するのは、結局はGround Compliance なるものが、近似的に線形のばねとダッシュポットに置きかえられるという事実にもとづくことは言うまでもない。

さて、機械基礎のように振動源が基礎側にあり、しかも基礎の高さが波動の波長に比べて充分小さい場合には、既往の諸研究による Ground Compliance の適用は、全く問題はないであろう。

事実、機械基礎等の強制振動試験結果とは良く一致した解が得られる。

しかし、建物等の規模により、しかも波動の源泉が地盤側にあるときには、いろいろと問題がありそうだ。

もし、現状において、Ground Compliance の概念を卒直に適用するならば、地盤を等価の K, C に置きかえ、建物を剛体あるいは質点系とみなし、機械的振動問題として解くことになるであろう。

しかし、地震が波動として建物に入射し、さらに建物内で重複反射が起こり、建物の運動に大きな割合を占め

る^{文31)}ならば、これらの波動による伝達力が加わって、Ground Compliance に大きく影響すると考えられる。

地下壁の力学的問題や、実際の地盤が、仮定した理想媒体とはほど遠いものであることなどを考え合わせても、耐震工学上の適用には前途多難であることが想像される。

最後に本研究の推行に当り、貴重な御意見を賜った大築志夫研究所長と、複雑な数値計算を快諾して下さった計算課の宮崎徳次郎課長および研究所の藤井邦雄君に、深い感謝と敬意を表する次第であります。

<註 記>

註15. 引張側の半周長にも、圧縮側と同じ反力分布があると考えているが、もし引張側の半周長は、構造体と地盤が離れるという理由で、その間の応力を0と仮定しても

$$2 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Q}{16\pi\mu(1-\nu)} \cdot \frac{1}{4ah} \left\{ \right\} ah d\theta$$

$$= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{Q}{16\pi\mu(1-\nu)} \cdot \frac{1}{2ah} \left\{ \right\} ah d\theta$$

となつて同じ結果になる。

註16. 各研究者の論文において、 a_0 はつぎのような範囲について考えられている。

$0 < a_0 < 1.2$ 田治見

$0 < a_0 < 1.5$ Sung, Arnold (上下, 回転) 鳥海

$0 < a_0 < 2.0$ Reissner, Thomson, 小堀, Arnold(水平, 振り)

註17. 逸散する波動の形態をS波とすれば

$$f_{1V} = \frac{4(1-\nu)}{16 + (1-\nu)^2 a_0^2 \kappa_v^2 \pi^2}$$

$$-f_{2V} = \frac{\kappa_v \pi a_0 (1-\nu)^2}{16 + (1-\nu)^2 a_0^2 \kappa_v^2 \pi^2}$$

註18. 逸散する波動の形態をS波とすれば

$$f_{1R} = \frac{24(1-\nu)}{64 + 9\pi^2 \kappa_v^2 (1-\nu)^2 a_0^2}$$

$$-f_{2R} = \frac{9\pi \kappa_v (1-\nu)^2 a_0}{64 + 9\pi^2 \kappa_v^2 (1-\nu)^2 a_0^2}$$

〈参考文献〉

- 文 5) 小高昭夫, “耐震構造の総合研究 I” 宇野書店, 1964, pp. 134
- 文 6) N.N. Nielsen “Dynamic Response of Multistory Buildings” California Institute of Technology, Earthquake Engineering Research Laboratory, June 1964
- 文 7) K. Nakagawa, “Vibrational Characteristics of Reinforced Concrete Buildings existing in Japan,” Proc. II WCEE, 1960
- 文 8) 鳥海 勲, “水平力を受ける深い基礎の地盤反力と変位について” 土と基礎 Vol. 12, No. 1, January 1964, pp. 27~32
- 文 9) R.D. Mindlin “Force at a Point in the Interior of a Semi-Infinite Solid” Journal of Applied Physics, Vol. 7, No. 5, May 1936
- 文10) 鳥海 勲, “基礎頂部に作用する水平力の側圧及び底面せん断力による分担について” 非公式テキスト. Dec. 1963
- 文11) Y.L. Chang, Discussion on “Lateral Pile-loading Test” by Feagin, Trans. A.S.C.E. 1957
- 文12) A.E. Cummings, Discussion on “Lateral Pile-loading Test” by Feagin, Trans. A.S.C.E. 1937
- 文13) L.A. Palmer & J.B. Thompson “The Earth Pressure and Deflection along the Embedded Length of Piles Subjected to Lateral Thrust” Proc. Ind. I.C.S.M.F.E.
- 文14) K. Terzaghi “Evaluation of Coefficient of Subgrad Reaction” Géotechnique. Dec. 1955
- 文15) D.A. Hopkins, Discussion of “Thrust Loading on Piles” by J.E. McNulty. A.S.C.E. SM4. Oct. 1956
- 文16) 福岡正己, 宇都一馬, “ボーリング孔を利用した基礎地盤の横方向K値について” 土と基礎特集号 No. 1, Aug. 1959
- 文17) D.D. Barkan “Dynamics of Bases and Foundations”, Mc Graw-Hill Series in Soils Engineering and Foundations, pp. 12~13
- 文18) 同上 pp. 316
- 文19) E. Reissner, “Stationäre axialsymmetrische, durch eine schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes,” Ingenieur-Archiv, vol. 7, 1936, pp. 381~396
- 文20) E. Reissner, “Freie und erzwungene Torsionsschwingungen des elastischen Halbraumes,” Ingenieur-Archiv, vol. 8, 1937, pp. 229~245
- 文21) E. Reissner and H. F. Sagoci, “Forced Torsional Oscillations of an Elastic Half-Space,” Journal of Applied Physics, vol. 15, 1944, pp. 652~662
- 文22) T.Y. Sung, “Vibration in Semi-Infinite Solids Due to Periodic Surface Loading,” ASTM Symposium on Dynamic Testing of Soils, ASTM Special Technical Publication, No. 156, 1953, pp. 35~63
- 文23) I. Toriumi, “Vibrations in Foundations of Machines,” Technology Report of the Osaka University, Japan, vol. 5, No. 146, 1955
- 文24) R. N. Arnold, G.N. Bycroft, and G.B. Warburton, “Forced Vibration of a Body on an Infinite Elastic Solid,” Journal of Applied Mechanics, vol. 22, Trans. ASME, vol. 77, 1955, pp.391~400
- 文25) W.T. Thomson and T. Kobori, “Dynamic Compliance of Rectangular Foundations on an Elastic Half-Space” Journal of Applied Mechanics, vol. 30, 1963, pp. 579~584
- 文26) T. Kobori, “Dynamical Response of Rectangular Foundation of an Elastic-Space,” Proceedings of Japan National Symposium on Earthquake Engineerings, 1962, pp. 81~86
- 文27) H. Tajimi, “Basic Theories on Aseismic Design of Structures” Report of the Institute of Industrial Science, University of Tokyo, vol. 8, No. 4, 1959
- 文28) 小堀鐸二, 南井良一郎, 鈴木有, “弾性基礎の動的応答” 日本建築学会近畿支部大会論文集, 1964
- 文29) T.K. Hsieh, “Foundation Vibrations,” Proceedings, Institution of Civil Engineers, vol. 22, June, 1962, pp. 211~226
- 文30) J.R. Hall and F.E. Richart, “Dissipation of Elastic Wave Energy in Granular Soils,” Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division, A.S.C.E. November, 1963, pp. 27~56
- 文31) K. Kanai and S. Yoshizawa, “Some New Problems of Seismic Vibrations of a Structure. Part 1.” Earthquake Research Institute, Japan, vol. 41, 1963, pp. 825~833