

# 拡張有限要素法による浸透流解析システム

山田 俊子 櫻井 英行  
(技術研究所) (技術研究所)

## Seepage Flow Analysis System Incorporating an Extended Finite Element Method

by Toshiko Yamada and Hideyuki Sakurai

### Abstract

Extended finite element methods (X-FEM) can handle arbitrary discontinuities, such as cracks and material boundaries, independent of analysis meshes. This paper describes a three-dimensional groundwater seepage analysis system that uses X-FEM to reduce time-consuming mesh generation tasks. The paper also describes the formulation of X-FEM for computing material discontinuities, including faults and other very thin strata, that cause problems in the implementation of conventional FEM. Several numerical tests and comparisons with conventional methods show the validity of X-FEM solutions. Analysis of a mock rock oil tank demonstrates that the present system is more highly efficient and adaptable than a system based on conventional FEM.

### 概要

拡張有限要素法(X-FEM)は、メッシュ分割とは独立に亀裂や物性境界などの不連続性を扱える解析法である。筆者らは、メッシュ分割の効率化を目的として、X-FEM を三次元地下水浸透流解析に適用し、実務上問題となる断層のような薄い構造のモデル化に関する検討を行ってきた。本論文では、X-FEM の数理についての詳細を示し、数値実験による従来法との定量的な比較に基づく本手法の妥当性、有効性を論ずる。また、岩盤地下備蓄施設を模擬した解析例により、メッシュ作成から解析結果の図化までの一連の解析プロセスが、一般に行われる FEM 解析に比べて、より効率的かつ柔軟に行えることを明示する。

### § 1. はじめに

岩盤地下備蓄基地や放射性廃棄物処分などの地下施設建設では、地下水挙動の把握は大変重要であり、FEM 等による詳細な解析が実施される。しかし、複雑な三次元構造を有する地質構造と地下施設を対象としたメッシュ分割は、高性能の自動メッシュ生成ソフトを用いても非常に困難な作業であり、多大な時間と労力が費やされる。とりわけ三次元的に分布する断層等の薄い構造の扱いは難しい。調査の進展や情報化施工による地質情報の更新に対応するため、地質の境界面のメッシュ分割は行わずに、**図-1**に示すように階段状に抽出した要素群に対して、平均化した物性値を与える等のモデル化が行われる<sup>1)2)</sup>。しかし、このようなモデル化では、地質境界面近傍の精度の低下は避けられないうえ、メッシュの連続性に配慮しながら階段状に要素を抽出する必要があり、実際には大きな効率化にはなっていない。

このような背景のもと、著者らは、薄層のメッシュ分割を行わずに、FEM と同等の精度の解を得ることを目的とし、地質境界面をメッシュ分割することなく定義可能な拡張有限要素法(X-FEM : eXtended Finite Element

Methods)<sup>3)</sup>を用いた浸透流解析システムを開発してきた<sup>4)5)6)</sup>。X-FEM は、PU 法(Partition of Unity method)<sup>7)8)</sup>を応用した解析手法であり、亀裂進展問題や異種材料境界問題に対する有力な解析手法として注目されている。X-FEM では、既存の節点に不連続性を表す関数の自由度を付加するだけで、亀裂や要素内部を通過する物性境界を扱えるので、冒頭の地下水浸透流解析におけるメッシュ分割の困難さを緩和する有力な方法となり得る。しかし、地下水解析で問題となる薄い構造を X-FEM でモデル化する場合には、一つの要素に対して複数の物性境界を考慮しなければならず、近似や数値実装の面で厳しい条件となり、適用例は本研究以外には見当たらない。

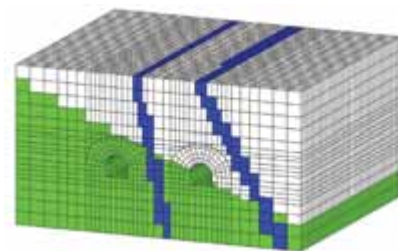


図-1 地下施設を考慮したメッシュ分割の例

本論文では、§ 2、§ 3において本システムにおける X-FEM の概要を述べる。§ 4では、X-FEM の地下水浸透流解析への適用性、実用性を検証するために、いくつかの数値実験結果を示す。浸透流問題を対象としたベンチマークテストにより、薄い構造の三次元的な分布や形状、薄い構造の交差のモデル化について、FEM 解析結果との比較を報告する。また、X-FEM では物性境界のモデル化に関数値が連続で微分が不連続な関数を用いるが、本論文で提案する新たな関数を導入することにより、より安定した解を得ることについても明示する。§ 5では、岩盤地下備蓄施設を模擬した解析により、プリ/ポスト処理までの一連の解析プロセスを示すことにより実用性を検証する。

## § 2. 拡張有限要素法

### 2.1 有限要素近似の拡張

空間座標  $\mathbf{x}$  で記述されるスカラー関数  $\phi(\mathbf{x})$  を考える。古典的な FEM では、要素の設計という観点から  $\phi(\mathbf{x})$  の近似  $\phi^h(\mathbf{x})$  は次のように表される。

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_i^{N_e} L_i(\mathbf{x})\phi_i \quad (1)$$

$L_i(\mathbf{x})$  は形状関数、 $\phi_i$  は節点自由度、 $N_e$  は要素構成節点の数である。解析対象領域全体は有限要素で重複することなく埋め尽くされる。したがって、関数近似は次のように全節点の和として書き換えることができる。

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathbf{N}} L_i(\mathbf{x})\phi_i \quad (2)$$

ここに、 $\mathbf{N}$  は解析領域内の全節点の集合である。 $L_i(\mathbf{x})$  は節点  $i$  に繋がる要素群をサポートとする線形形状関数であり、サポートの上でのみ値を持ち、図-2に例示するように節点  $i$  において 1、サポートのエッジで 0 となる。

X-FEM では、エンリッチ関数と呼ばれる関数を付加して、式(2)の近似を次のように拡充する。

$$\phi^h(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathbf{N}} L_i(\mathbf{x})(\phi_i + a_i \eta_i(\mathbf{x})) \quad (3)$$

ここに、 $\eta_i(\mathbf{x})$  はエンリッチ関数、 $a_i$  は節点  $i$  の付加自由度である。 $L_i(\mathbf{x})$  は、サポートのエッジで 0 となるため、 $C^0$  連続性を維持したまま、部分的に近似を拡充することが可能になる。X-FEM では、エンリッチ関数にヘビサイ

ド関数やステップ関数、ランプ関数を用いることにより、亀裂や材料境界等の不連続性をモデル化する<sup>9)10)</sup>。

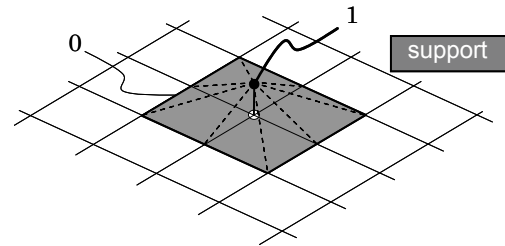


図-2 節点形状関数

### 2.2 レベルセット法

レベルセット法は、時々刻々変化する自由表面を追跡するために発展した曲面表現手法であり、連続な自由表面を離散点情報として扱えるため計算力学の分野で様々な応用がなされてきた<sup>11)</sup>。X-FEM でも一般に不連続面をレベルセット法で表現する。

各節点  $i$  から自由表面までの距離を求め、自由表面を介して符号を付けた値  $\lambda_i$  を各節点に割り当てると、領域内の任意の点  $\mathbf{x}$  における自由表面からの符号付き距離関数(レベルセット関数)は、FEM の形状関数を用いて次のように表すことができる。

$$\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathbf{N}} L_i(\mathbf{x})\lambda_i \quad (4)$$

自由表面は、 $\lambda(\mathbf{x}) = 0$  となる等値面によって陰的に表現されるため、要素分割とは独立に定義することが可能になる。レベルセット法により、自由表面は節点上の離散値として管理できるため、プログラミングや計算効率の面で大変有利になる。

### 2.3 地質境界のモデル化

物性境界となる地質境界では、着目する物理量が連続で、その微分が不連続となる。これに対応するエンリッチ関数は、いくつか提案されているが<sup>10)12)</sup>、Moës ら<sup>12)</sup>は、最終的な係数行列の条件数が悪化しないように設計した次の関数を推奨している。

$$\eta(\mathbf{x}) = \sum_{i \in \mathbf{M}} |\lambda_i| L_i(\mathbf{x}) - \left| \sum_{i \in \mathbf{M}} \lambda_i L_i(\mathbf{x}) \right| \quad (5)$$

これは、図-3左に示すような物性境界に沿って尾根筋となる関数で、物性境界が通らない要素では、値が 0 となるため、物性境界がそのサポートを通る節点のみに適用すればよい。 $\mathbf{M}$  は拡充される  $M$  個の節点の集合を表

す。図-3右の○印は、 $\mathbf{M}$ に属する節点の例である。

図-4左は、一次元での式(5)の関数値のプロファイルである。横軸は要素局所座標 $\xi$ 、縦軸は関数値であり、関数値がピークとなる点が物性境界位置に対応する。図では、物性境界が $\xi = 0.0$  (要素中央)と $\xi = 0.4$ 、 $\xi = 0.8$ を通る場合の3ケースをプロットした。式(5)は、物性境界が要素中央を通る場合、関数値のピーク値は1となるが、物性境界が端に行くに連れてピーク値は0に近づく。二次元要素や三次元要素では、物性境界が要素座標系に並行でないとい図-3左に示すように尾根のピーク値が変化するため、物性境界に沿って勾配が発生することになる。本論文では、その勾配が解に悪影響を及ぼすと考え、関数値が物性境界の位置に依らず常に1となるよう、次のように修正した。

$$\eta(\mathbf{x}) = 1 - \left| \frac{\sum_{i \in \mathbf{M}} \lambda_i L_i(\mathbf{x})}{\sum_{i \in \mathbf{M}} |\lambda_i| L_i(\mathbf{x})} \right| \quad (6)$$

図-4右は、式(6)のプロットである。本論文の関数は、物性境界の位置に依らず、ピーク値は必ず1となることが分かる。後述の数値実験では、式(5)を用いた場合に解が悪化する場合があることを示す。

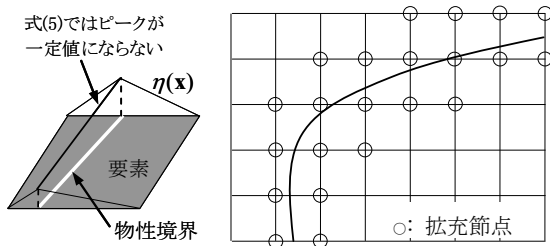


図-3 リッジ関数と拡充節点

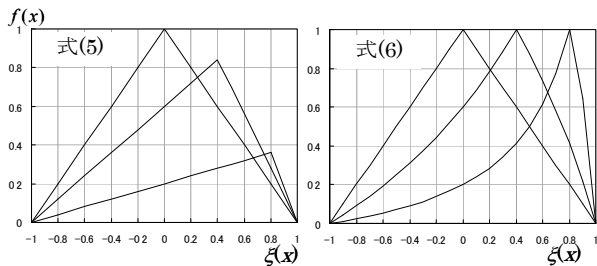


図-4 Moësらと本論文のリッジ関数

## 2.4 地質境界の交差

地質境界面が交差する場合は、交点における連続性に対応する関数を付加する必要がある<sup>7)</sup>。式(7)は、二つの地質境界面が交差する場合の例である。

$$\begin{aligned} \phi^h(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in \mathbf{N}} \phi_i L_i(\mathbf{x}) \\ & + \sum_{i \in \mathbf{M}^{(1)}} L_i(\mathbf{x}) a_i^{(1)} \eta^{(1)}(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathbf{M}^{(2)}} L_i(\mathbf{x}) a_i^{(2)} \eta^{(2)}(\mathbf{x}) \\ & + \sum_{i \in \mathbf{M}^{(1)} \cap \mathbf{M}^{(2)}} L_i(\mathbf{x}) a_i^{(1,2)} \eta^{(1)}(\mathbf{x}) \eta^{(2)}(\mathbf{x}) \end{aligned} \quad (7)$$

式中の右肩括弧内の添え字は、地質境界面のインデックスである。式(7)のように節点のサポートを二つの境界面が横切る場合は、その節点には三つの自由度が付加されることになる。

## 2.5 地質構造の定義

前節までに述べたように、地質境界面をレベルセット法により陰関数表現し、式(6)のエンリッチ関数を導入することにより、交差を含む地質境界をメッシュ分割とは独立にモデル化することが可能になる。本論文で検討対象とする薄い内在構造の場合は、図-5に示すように一对のレベルセット関数を用意し、それらの不等式でモデル化可能である。薄層に限らず、領域を二分するような地層境界や三つ以上の面で囲まれた地質体も同様に不等式で表現できることは自明である。

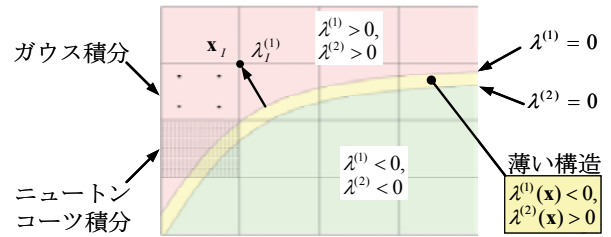


図-5 レベルセット法による薄い構造の定義

解析において、モデル化する地質境界の総数を $J$ とすると、本論文における近似関数は次のように表すことができる。

$$\begin{aligned} \phi^h(\mathbf{x}) = & \sum_{i \in \mathbf{N}} \phi_i L_i(\mathbf{x}) + \sum_{j=1}^J \sum_{i \in \mathbf{M}^{(j)}} L_i(\mathbf{x}) a_i^{(j)} \eta^{(j)}(\mathbf{x}) \\ & + \sum_{j=1}^{J-1} \sum_{k=j+1}^J \left[ \sum_{i \in \mathbf{M}^{(j,k)}} L_i(\mathbf{x}) a_i^{(j,k)} \eta^{(j,k)}(\mathbf{x}) \right] \end{aligned} \quad (8)$$

ここに、

$$\eta^{(j)}(\mathbf{x}) = 1 - \left| \frac{\sum_{i \in \mathbf{M}^{(j)}} \lambda_i^{(j)} L_i(\mathbf{x})}{\sum_{i \in \mathbf{M}^{(j)}} |\lambda_i^{(j)}| L_i(\mathbf{x})} \right| \quad (9)$$

$$\eta^{(j,k)}(\mathbf{x}) \equiv \eta^{(j)}(\mathbf{x}) \eta^{(k)}(\mathbf{x}) \quad (10)$$

$$\mathbf{M}^{(j,k)} \equiv \mathbf{M}^{(j)} \cap \mathbf{M}^{(k)} \quad (11)$$

### § 3. 定式化

着目する領域  $V$  内の支配方程式として、次の浸透流方程式を扱う。

$$\nabla(\mathbf{K}\nabla\phi(\mathbf{x})) = 0 \quad \text{in } V \quad (12)$$

ここで、 $\nabla$  はナブラ演算子、 $\phi(\mathbf{x})$  は全水頭であり、位置水頭  $h$  と圧力水頭  $p(\mathbf{x})/\rho_w g$  の和で表される。

$$\phi(\mathbf{x}) = h + p(\mathbf{x})/\rho_w g \quad (13)$$

$p(\mathbf{x})$  は地下水圧、 $\rho_w$  は地下水の密度、 $g$  は重力加速度、 $\mathbf{K}$  は透水係数テンソルである。

境界条件は、次のとおりである。

$$\phi(\mathbf{x}) = \hat{\phi} \quad \text{on } S_\phi \quad (14)$$

$$k \frac{\partial \phi(\mathbf{x})}{\partial n} = \hat{q} \quad \text{on } S_n \quad (15)$$

ここに、添え字  $\hat{\phi}$  は既知量を表し、 $n$  は領域  $V$  の境界に立てた単位法線ベクトルである。

この問題に対し、従来の FEM と同様、Galerkin 法を適用する。式(16)の汎関数に式(8)を代入すると、停留条件から解くべき方程式として、式(17)を得る。

$$\Pi(\phi(\mathbf{x})) = \int_V \frac{1}{2} (\nabla^T \phi(\mathbf{x})) \mathbf{K} (\nabla \phi(\mathbf{x})) dV - \int_{S_n} \phi(\mathbf{x}) \hat{q} dS \quad (16)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{BB} & \mathbf{H}_{BC} & \mathbf{H}_{BD} \\ & \mathbf{H}_{CC} & \mathbf{H}_{CD} \\ \text{Sym.} & & \mathbf{H}_{DD} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\phi}_B \\ \mathbf{a}_C \\ \mathbf{a}_D \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{q}_B \\ \mathbf{q}_C \\ \mathbf{q}_D \end{Bmatrix} \quad (17)$$

ここに、対角成分の  $\mathbf{H}_{BB}$  はエンリッチ項を含まない従来の FEM の係数マトリックス、 $\mathbf{H}_{CC}$  と  $\mathbf{H}_{DD}$  は、それぞれ式(8)右辺第2項と第3項で構成される微分不連続性とその交差の連続性に対応する係数マトリックスである。非対角成分  $\mathbf{H}_{BC}$ 、 $\mathbf{H}_{BD}$ 、 $\mathbf{H}_{CD}$  は式(8)右辺の三つの項の連成成分である。 $\boldsymbol{\phi}_B$ 、 $\mathbf{a}_C$ 、 $\mathbf{a}_D$  は式(8)右辺の三つの項の節点自由度、 $\mathbf{q}_B$ 、 $\mathbf{q}_C$ 、 $\mathbf{q}_D$  は荷重ベクトルである。

ここで、要素の積分については、図-5に示すように物性境界が通らない要素には通常のガウス積分を用いるが、物性境界が通る要素では、要素内で物性値が変わる

ため、要素内に細かく積分点を配置したニュートン・コーツの方法により数値積分を行うこととした。以降の数値計算例では、数値積分の解析精度への影響を排除するため、十分に細かい積分点を配置することとした。

### § 4. ベンチマークテスト

地下水浸透流解析において問題となる薄い地質構造のモデル化について、要素分割とは独立して物性境界を定義可能な X-FEM を適用する。物性境界を X-FEM でモデル化することの妥当性については、X-FEM 研究の早い段階で検証済み<sup>7)</sup>であるが、薄い構造のモデル化については、一つの要素に複数の物性境界を考慮する必要があり、近似や数値実装の面で厳しい条件となる。ここでは、三次元定常飽和浸透流問題を対象とし、薄い地質構造のモデル化に関する X-FEM の適用性について、ベンチマークテストにより基本的な検証を行った結果を報告する。

#### 4.1 三次元的に分布する薄い構造

図-6に示すような薄層が三次元的に分布するモデルを考える。薄層を含む地質全体の透水性は等方であるとする。薄層の透水係数  $k_f$  が周囲の透水係数  $k_0$  と比較して難透水の場合 ( $1/100k_0$ ) と高透水の場合 ( $100k_0$ )、それに薄層の厚さ  $t$  (0.1m, 0.2m, 0.4m) に関するケーススタディを実施した。境界条件は、モデルの上面では  $x$  方向の動水勾配が 1.0 となるように  $\phi$  を拘束し、それ以外の面でフラックスを 0 とした。

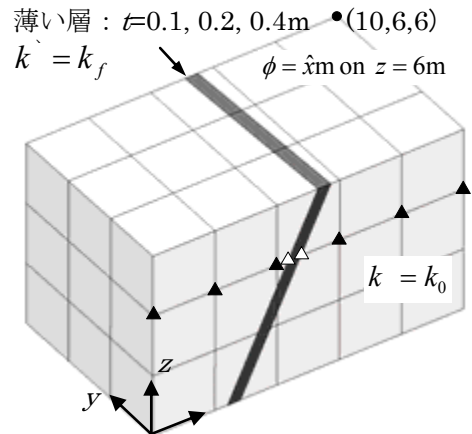


図-6 ベンチマーク問題 1

この問題に対し、モデル化の異なる 5 種類の解析を実施し、解析結果の比較を行った。(図-7 参照)。

- (a) ‘従来 FEM’: FEM で薄層を要素分割した場合
- (b) ‘平均化 FEM’: 薄層を含む要素の透水性を均質化し直交異方性媒体としてモデル化した場合

(c) ‘前 X-FEM’: X-FEM で式(5)の Moës らの関数を用いた場合

(d) ‘本 X-FEM’: X-FEM で式(6)の本論文の関数を用いた場合

ここで、解析領域全体を細かい要素サイズで分割した(約 26 万節点)FEM の結果を参照解とした。参照解のモデルは図示を省略する。

X-FEM では、前述のとおり、積分精度による解の劣化を避けるため、十分な細かい積分点として、薄層が通過する要素については  $10^3$  点を配置した。

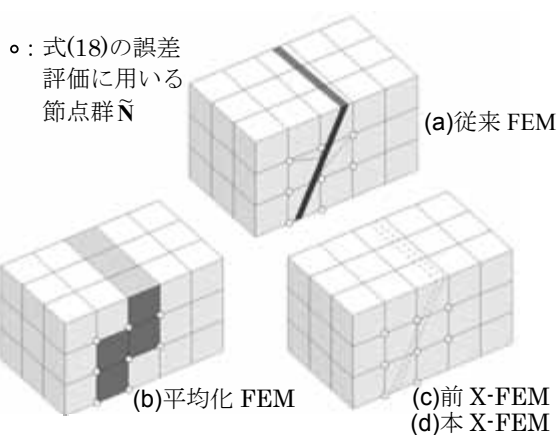


図-7 ベンチマーク問題1の四つのモデル

図-8は薄層厚さと解の精度の関係である。上が薄層が難透水の場合、下は高透水の場合である。横軸は薄層厚さ、縦軸は参照解に対する式(18)の誤差指標  $E_\phi$  (相対誤差ノルム)である。

$$E_\phi = \sqrt{\frac{\sum_{i \in \tilde{N}} (\phi_i^{\text{Reference}} - \phi_i)^2}{\sum_{i \in \tilde{N}} (\phi_i^{\text{Reference}})^2}} \quad (18)$$

ここで、 $\tilde{N}$  は X-FEM において近似が拡充される節点のうち、式(14)の基本境界条件が適用される節点を除いた節点の集合である(図-7の○印)。図中、黒の○は‘従来 FEM’、黒の×は‘平均化 FEM’、赤の○は‘本 X-FEM’、赤の×は‘前 X-FEM’の誤差である。薄層が難透水の場合、二つの X-FEM の結果は‘従来 FEM’と比較して同等であり、薄層厚さの影響も小さく良好である。‘平均化 FEM’の結果は、従来からの報告どおり、他のモデルより誤差指標で 1 オーダ程度劣る。薄層が高透水の場合、どれも大差はないが、‘前 X-FEM’は、薄層が厚いほど解が劣化する傾向が強いと言える。

図-9は、図-6に△と▲で示す位置での薄層厚さ  $t=0.4\text{m}$  の場合の  $\phi$  の  $x$  方向プロファイルである。二つの X-FEM の△位置の値は、式(8)を用いた内挿値である。凡例は図-8と同じである。

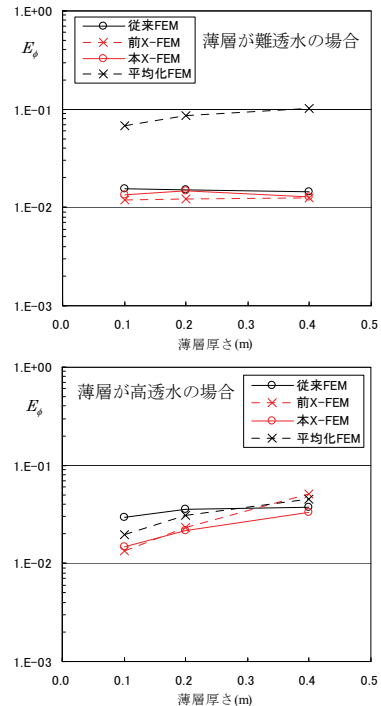


図-8 薄層厚さと解析精度の関係

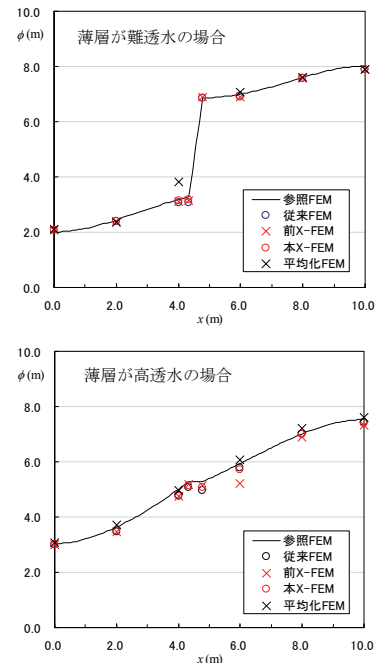


図-9  $\phi$  の  $x$  方向分布  
(薄層厚さ  $t=0.4\text{m}$ 、図-6の▲△位置)

図-9上の薄層が難透水の場合は、‘従来 FEM’と二つの X-FEM の結果は、参照解とよく一致しているのに対し、‘平均化 FEM’の結果は、薄層近傍で外れていることが分かる。一方、図-9下の薄層が高透水の場合を見ると、‘従来 FEM’と‘本 X-FEM’は良好な結果であるが、‘平均化 FEM’だけでなく‘前 X-FEM’の結果も薄層の近傍で外れている部分がある。

以上のように、‘前 X-FEM’の解は、薄層の透水性

や厚さに強い依存性を示すのに対し、‘本 X-FEM’ はそれらの条件に左右されず、良好な解を与えることが確認できた。

#### 4.2 曲面で構成される薄い構造

前章では、平面状の地質境界面を対象としたベンチマークテストの結果を述べたが、実際の地質境界面は複雑な自由曲面で表されることが多い。本システムはレベルセット関数生成プログラム(GLS)を備えており、三角形パッチで表された任意形状の三次元曲面に対応するレベルセット関数の節点値を計算することが可能である。

図-10 に示すような曲面で構成された薄層が分布するモデルを考える。薄層の透水係数 $k_f$ が周囲の透水係数 $k_0$ と比較して高透水の場合( $100k_0$ )と難透水の場合( $1/100k_0$ )に関するケーススタディを実施した。境界条件は、モデルの上面では $x$ 方向の動水勾配が1.0となるように $\phi$ を拘束し、それ以外の面でフラックスを0とした。図-10 は薄層を FEM で要素分割した解析メッシュであり、比較のため解析を行った。X-FEM の場合には、薄層の要素分割は必要なく、図-11 に示す物性境界面を定義する二次元メッシュを用意する。このメッシュから GLS により算出したレベルセット関数値を X-FEM に与えて解析を実施した。例として、薄層の下面に対するレベルセット関数値の分布を図-12 に示す。X-FEM では、解の劣化を避けるための十分な積分点として、薄層が通過する要素には $20^3$ 点の積分点を配置した。

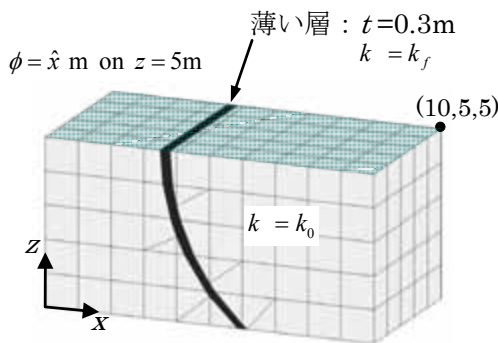


図-10 ベンチマーク問題2 (FEM メッシュ)

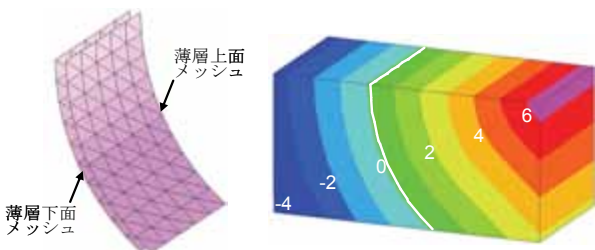


図-11 物性境界面定義メッシュ

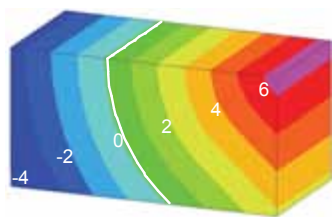


図-12 レベルセット値分布 (薄層下面)

X-FEM および FEM の解析結果のうち、 $z=1.0$ における $x$ 方向の全水頭プロファイルを図-13 に示す。薄層境界面には X-FEM の自由度は無いため、式(8)を用いて補間し、FEM と同じ節点位置での全水頭値を算出した。図-13 において、(a)は薄層が高透水の場合、(b)は薄層が難透水の場合である。両ケースとも X-FEM の結果(実線)は、薄層を要素分割した FEM の結果(淡い太線)と良好な一致を示していることが分かる。特に、(b)の難透水層前後での急激な水頭変化についても X-FEM は FEM とほぼ一致した結果を示している。

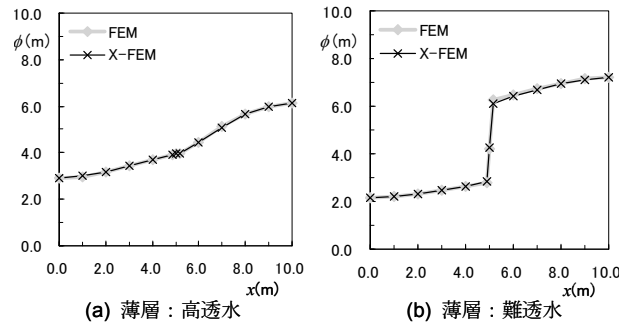
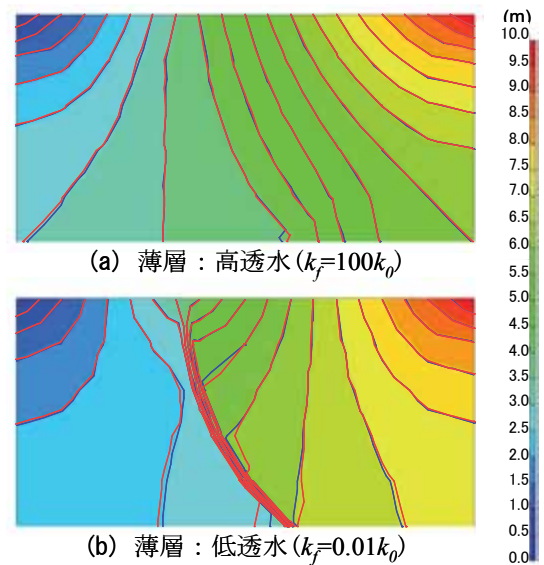


図-13  $x$  方向の全水頭分布( $z=1.0$ )

図-14 に $xz$ 平面での解析結果の全水頭分布を示す。図中、背景のレインボー・スケールの段彩と青線は比較のための FEM の結果、赤線は X-FEM の結果である。前述のとおり、X-FEM は地層境界上に節点を持たないので、式(8)により内挿した値を節点に与えて図化した。解析領域全体でみても、X-FEM の結果は FEM の結果と良好な一致を示しており、曲面で表される薄層の存在も精度良く表現できることが確認できた。



— : FEM    - - : X-FEM  
図-14 解析結果全水頭コンター

### 4.3 薄い構造の交差の問題

図-15に示すように、二つの薄層が交差する場合を考える。一方は、鉛直に分布する  $yz$  平面と平行な層、もう一方は、水平に分布する  $xy$  平面と平行な層である。厚さは両者とも  $0.2\text{m}$  とした。境界条件は、モデルの上面で  $x$  方向の動水勾配が  $1.0$  となるように  $\phi$  を拘束し、それ以外の面でフラックスを  $0$  とした。

これらの薄層を X-FEM でモデル化する場合、二対のレベルセット関数が必要である。ここでは、解の劣化を避けるための十分な積分点として、薄層が通過する要素に  $20^3$  点の積分点を配置した。図-16に解析メッシュを示す。メッシュ分割と薄層の位置関係の影響を検討するため4種の解析モデルを設定した。図中、実線は要素分割線、破線は X-FEM でモデル化する地質境界面である。

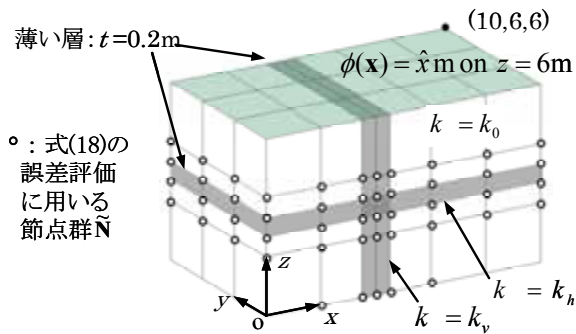


図-15 ベンチマーク問題3

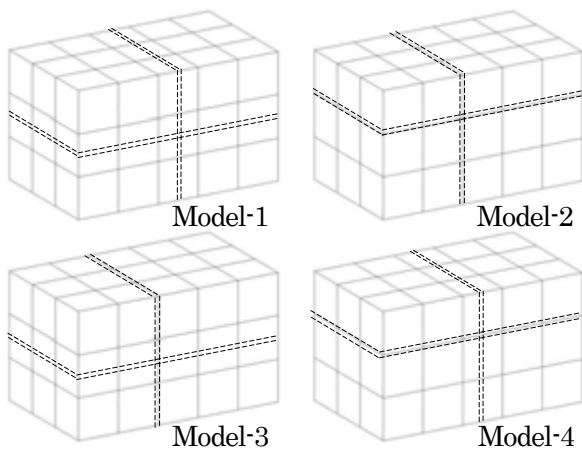


図-16 ベンチマーク問題3の四つのモデル

表-1は解析ケースである。すべての解析モデルにおいて、薄層が二つとも高透水( $100k_0$ )の場合と難透水( $1/100k_0$ )の場合を解析し、Model-1とModel-2については、二つの薄層の透水性が異なるケースも解析した。X-FEMについては、物性境界面の交点の連続性を考慮しない場合、すなわち式(7)において第4項を考慮しな

い場合の解析も実施した(X-FEM2)。また、比較のため、薄層をメッシュ分割したFEMによる解析も実施した。この場合、図-16の破線も要素分割線となる。解析領域全体を  $0.1\text{m}$  の細かい要素サイズで分割したFEMの結果を参照解として誤差比較を行った。

表-1 ベンチマーク問題3の解析ケース

| CASE     | Model   | $k_v, k_h$                       |
|----------|---------|----------------------------------|
| case1-LL | Model-1 | $k_v=1/100k_0$<br>$k_h=1/100k_0$ |
| case2-LL | Model-2 |                                  |
| case3-LL | Model-3 |                                  |
| case4-LL | Model-4 |                                  |
| case1-HH | Model-1 | $k_v=100k_0$<br>$k_h=100k_0$     |
| case2-HH | Model-2 |                                  |
| case3-HH | Model-3 |                                  |
| case4-HH | Model-4 |                                  |
| case1-LH | Model-1 | $k_v=1/100k_0$<br>$k_h=100k_0$   |
| case2-LH | Model-2 |                                  |
| case1-HL | Model-1 | $k_v=100k_0$<br>$k_h=1/100k_0$   |
| case2-HL | Model-2 |                                  |

図-17に、解の精度の比較を示す。縦軸は、式(18)の誤差指標、横軸は表-1の解析ケースである。図-17において、(a)は薄層が二つとも難透水のケース、(b)は薄層が二つとも高透水のケース、(c)は二つの薄層の透水性が異なる場合である。X-FEMでは、薄層の境界面上に節点が存在しないが、ここでは、解析結果から式(8)を用いて補間し、誤差指標の計算に用いた。式(18)における  $\tilde{N}$  は X-FEM において近似が拡充される節点、及び、薄層の境界面上の節点から式(14)の基本境界条件が適用される節点を除いた節点の集合である(図-15の○印)。これらの図より、FEM、X-FEMとも動水勾配が薄層部分に集中する難透水の条件の方が、総じて高透水の場合より解析精度が劣ると言える。また、FEMとX-FEMの比較では、FEMの精度が特別良いcase2-LHの結果を除けば、X-FEMの誤差指標のオーダーはFEMと同程度と見なすことができる。また、薄層の内部に要素境界を含むModel-2とModel-4では解が劣化する傾向にあることも分かった。X-FEMにおいて物性境界面の交点の連続性を考慮しないX-FEM2については、交点の連続性を考慮したX-FEMの結果と比較しても、解析精度が大きく変化しないことが分かる。交点の連続性を考慮した場合には、節点自由度が増加するだけでなく、マトリクスの性質も悪化するため、大規模問題では交点の連続性を省略する選択肢も考えられるが、解の妥当性についてはさらに検討を重ねる必要がある。

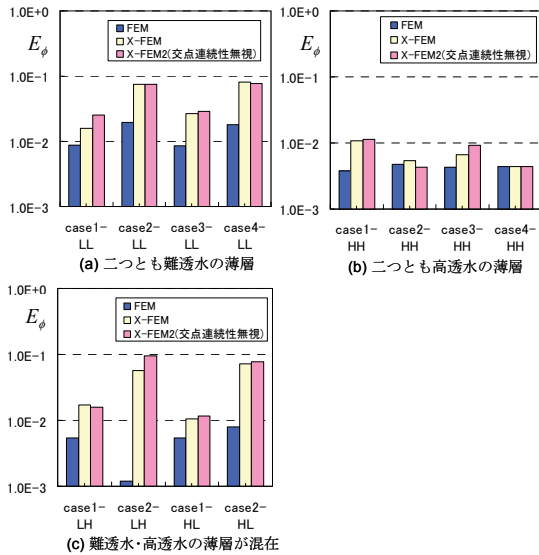


図-17 解析精度

#### 4.4 要素形状のゆがみの影響

図-18、図-19 に示す二つの二次元領域において、六面体のみと五面体のみで分割したメッシュをそれぞれ3パターンずつ用意した。三つの違いは要素のゆがみの度合いである。図は、五面体のみで分割した通常の場合のFEMの場合を例示しており、X-FEMでは地層境界面の分割は行わないメッシュを用いる。ここでは、解の劣化を避けるための十分な積分点として地層境界面が通過する要素に $20^3$ 点の積分点を配置した。境界条件は、モデルの上面でx方向の動水勾配が1.0となるように $\phi$ を拘束し、それ以外の面でフラックスを0とした。

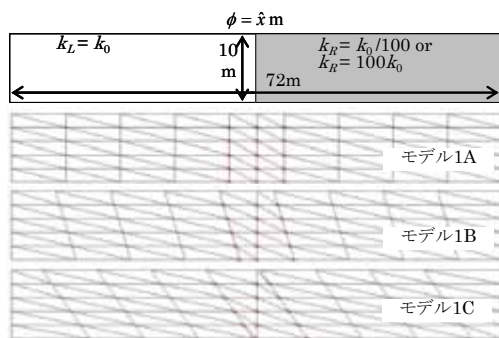


図-18 ベンチマーク問題 4-1 (領域を二分する境界)

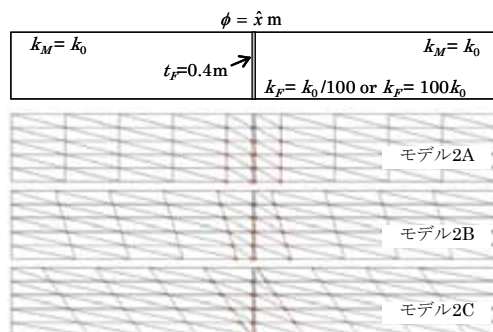


図-19 ベンチマーク問題 4-2 (薄い内在構造)

図-20 は、解析結果の誤差の比較である。横軸はメッシュ・パターン、縦軸は式(18)の誤差指標である。ここで、 $\phi_i^{\text{Reference}}$  は極小六面体によるFEMによる参照解、 $\tilde{N}$  は、地層境界近傍の節点の集合である(図-18、図-19の\*)。X-FEMの地層境界上の値は、式(8)による補間値である。FEMを含む全ての結果において、要素のゆがみが大きいほど誤差指標が大きくなり、六面体の方が五面体より精度が良い傾向にある。X-FEMはFEMに比べてその傾向が強い。六面体ではX-FEMはFEMと同程度の解析精度であり、X-FEMがFEMより優れるケースもあった。なお、(a)の五面体の解が全体的な傾向から外れている理由は、解の分布に対して、三角形面のゆがみの影響が小さいためと考えられる。

図-20 に最もゆがみが強いメッシュ分割のモデル1Cとモデル2Cのうち誤差指標が大きくなる $k_R=k_0/100$ の解析結果を示す。図中、白線は0.1m立方の極小六面体で解析したFEMによる参照解、黒線は比較のためのFEMの結果、赤線はX-FEMの結果である。X-FEMは地層境界上に節点を持たないので、式(8)により内挿した値を節点に与えて図化した。X-FEMの結果は、FEMの結果とほぼ良好な一致を示しており、透水性の大きく異なる地層境界の存在を特徴付ける流動場を表現できている。

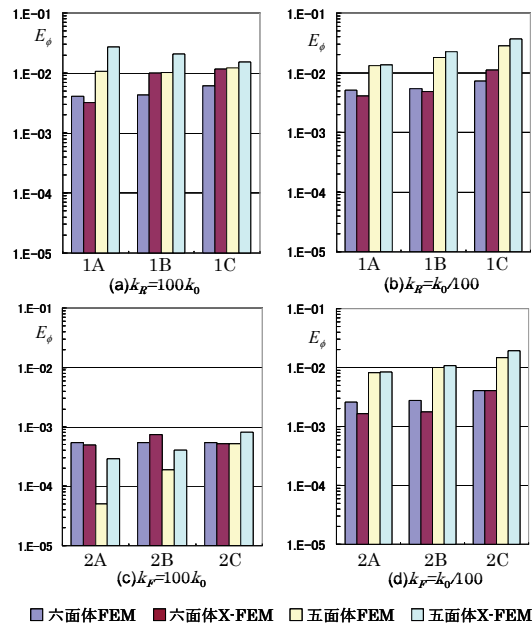
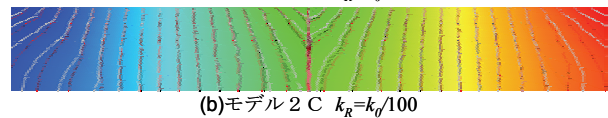
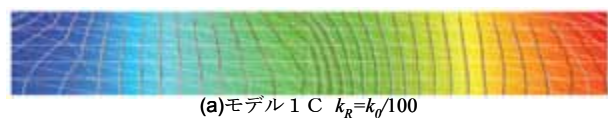


図-20 解析結果の誤差比較



— : 参照FEM    — : FEM    — : X-FEM

図-21 五面体要素の場合の水頭分布



## § 5. 実用化に向けたシステム

水封式岩盤地下備蓄施設を模擬したモデルを対象として、本システムの実用性について検討を行った。水封式岩盤地下備蓄施設は、地下水圧を制御する水封トンネルおよび水封ボーリングが貯槽を囲むように配置され、地下水圧により石油やLPGを封じ込めて備蓄する施設である。貯槽周辺の水圧分布の評価が重要となるが、施設の構造が複雑であるため、メッシュ分割は非常に困難な作業となる。図-22に解析モデルを示す。境界条件は貯槽、水封トンネル、水封ボーリングおよび上部境界を水位固定とし、その他の面は不透水条件とした。この貯槽近傍に難透水性(周囲の透水係数の1/100倍)の断層が分布するモデルを想定した。断層の境界面は前章と同様にGLSを用いてレベルセット関数により定義した。ここでは、断層境界面が通過する要素に $20^3$ 点の積分点を配置した。

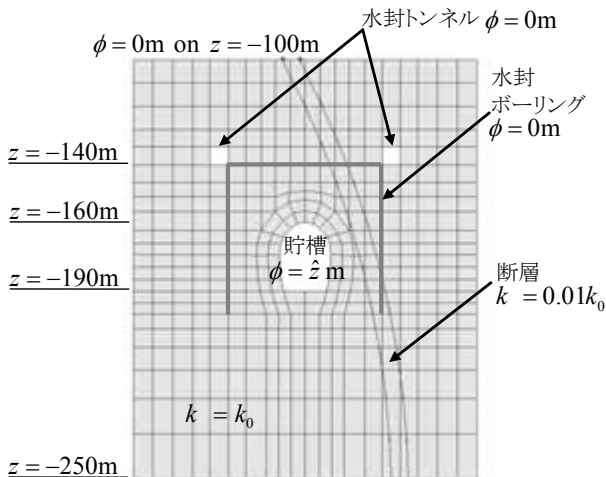
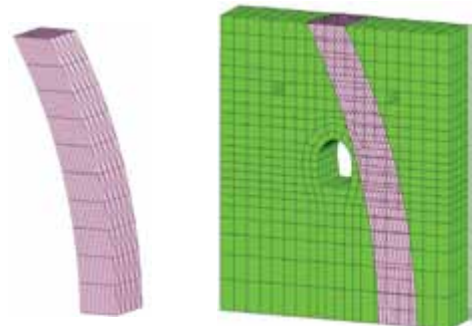
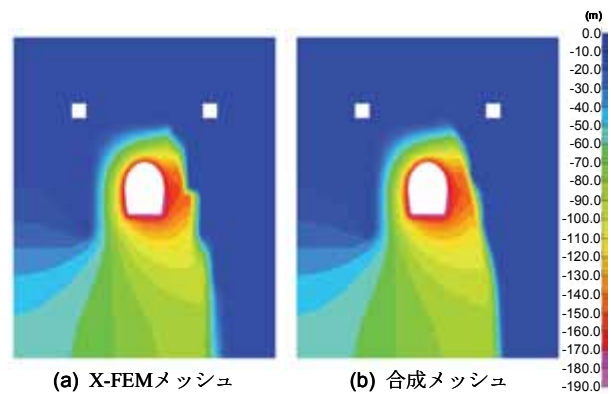


図-22 水封式岩盤備蓄施設を模擬した解析モデル

X-FEM浸透流解析システムでは、断層をメッシュ分割していないため、断層近傍の解析結果を十分に表現できないが(図-24(a))、市販のFEM用のプリ/ポスト処理ソフトの応用により結果表示を効率的に行うことが可能である。解析結果のコンター表示の手順を以下に記す。はじめに、GLS用断層定義メッシュの表面を引き伸ばした‘図化处理用付帯メッシュ’(図-23(a))を用意し、X-FEMメッシュと節点上の解析結果から、‘図化处理用付帯メッシュ’の節点位置における全水頭値を式(8)により算出する。次に、X-FEMメッシュと‘図化处理用付帯メッシュ’を同時に利用した合成メッシュを用いて(図-23(b))結果の図化を行うことにより、図-24(b)に示すように断層形状に沿う滑らかな全水頭のコンターを表示することができる。コンターは難透水性の断層近傍で急激な水頭変化が生じることを示す妥当な結果となっている。



(a) 図化处理用付帯メッシュ (b) 合成メッシュ  
図-23 ポスト処理用メッシュ



(a) X-FEMメッシュ (b) 合成メッシュ  
図-24 解析結果全水頭コンター

図-25にX-FEM浸透流解析システム全体の流れを示す。このシステムにより、従来使用しているFEMのプリ/ポスト処理ソフトをそのまま利用して一連の解析作業が可能である。

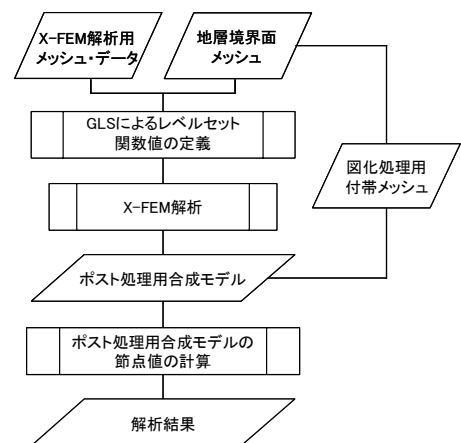


図-25 X-FEM浸透流解析システムフロー

## § 6. おわりに

より実用性の高い地下水浸透流解析システムの実現を目的として、X-FEMによる解析システムを開発し、基本性能の評価を行った。X-FEMでは、要素分割とは独立に物性境界を扱うことが可能なため、地質の幾何

学構造に関するケーススタディや地質調査の進展を反映させた地質構造のモデル更新が容易になり、地下水浸透流解析の飛躍的な効率化が期待できる。本論文では、地下水解析の実務からのニーズでもあり、X-FEMの実装においても厳しい条件となる断層のような薄い構造に関する数値実験の結果を示した。

本研究の目的は、X-FEMによるメッシュ分割の効率化にあり、地層境界面のメッシュ分割を行わずにFEMと同程度の精度を得ることである。数値実験では、実務上問題となっていた薄い構造を対象とした浸透流解析において、メッシュ分割しないX-FEMの解は、メッシュ分割したFEMと同等の精度であり、上述の目的を達成できると考える。その他得られた知見は以下のように整理できる。

- ・薄層が通る要素に平均化した物性値を与える従来法に比べ、X-FEMは非常に高い精度の解を与える。
- ・提案したエンリッチ関数の導入により、既往の関数で生じる解の劣化を解消することができた。
- ・近似関数を用いて節点値から内挿することにより、薄層境界面の値も精度良く計算できる。
- ・地層境界が交差する場合、交点での連続性に関する項を省略しても解の精度に大きな変化は見られなかった。

今回の数値実験で対象としたモデルは小規模で単純なモデルではあるが、実務で扱う解析用メッシュの一部を取り出したモデルに対応づけることができる。例

えば、5km四方×深さ500mの領域を平均20m程度の要素で分割するモデルの場合でも、サイズが10~20mの要素に対し、幅2~3mの薄い構造のモデル化を求められることは少なくない。これは、本論文の数値実験モデルと相対的に同等であり、実務のモデル化に対するニーズに対応できることを示したと考える。実用化のためには、数値実験を重ね、上記の知見の裏付けるための更なる検討は不可欠であると認識している。また、水封式岩盤地下備蓄施設を模擬した解析により、プリ/ポスト処理を含む一連の解析プロセスが市販のソフトを用いて行えることを例示した。X-FEMを用いることにより非常にパワフルな地下水解析システムが実現できる見通しは得られたと判断できる。

今後、実用性の高い解析システムを実現させるためには、非定常問題への発展や飽和-不飽和モデル、及び、四面体要素への適応性の検討も必要である。また、数値積分の効率化も課題であり、八分岐モデル<sup>13)</sup>や構造格子における積分手法のアイデア<sup>14)</sup>が有効であると考えられる。

## 謝辞

本研究を進めるに当たり、上智大学理工学部機能創造理工学科の長嶋利夫教授には多くの助言を頂いた。記して感謝申し上げます。

## <参考文献>

- 1) 櫻井英行, 白石知成: “地下施設計画のための地下水浸透流ボクセル解析”, 土木学会論文集, No.687/III-56, pp.155-168, 2001.
- 2) 河西基, 田中靖治, 五十嵐敏文: “高レベル放射性廃棄物地層処分天然バリア性能評価手法の開発- 割れ目系岩盤中の地下水流動解析手法-”, 電力中央研究所報告, U93054, pp.1-46, 1994.
- 3) Belytschko, T. and Black, T.: “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing”, Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol.45, pp.601-620, 1999.
- 4) 櫻井英行, 山田俊子: “拡張有限要素法による三次元地下水浸透流解析システムの開発”, 土木学会論文集 C, V.66-No.4, pp.684-694, 2010.
- 5) 櫻井英行, 山田俊子: “拡張有限要素法を用いた地下水流動解析システム - 六面体と五面体要素の精度検証 -”, 第46回地盤工学研究発表会講演集, No.1048, pp.2095-2096, 2011.
- 6) 山田俊子, 櫻井英行: “柔軟な地質モデリングを可能にするX-FEM浸透流解析システムの開発”, 日本地下水学会2011年秋季講演会講演要旨, No.10, pp.42-47, 2011.
- 7) Melenk, J. M. and Babuška, I.: “The partition of unity finite element method: Basic theory and applications”, Computer Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol.139, pp.289-314, 1996.
- 8) Babuška, I. and Melenk, J. M.: “The partition of unity method”, Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol.40, pp.727-758, 1997.
- 9) Belytschko, T., N. Moës, Usui, S. and Parimi, C.: “Arbitrary discontinuities in finite elements”, Int. J. Numer. Meth. Engrg., Vol.50, pp.993-1013, 2001.
- 10) Sukumar, N. Cjopp, D. L., Moës, N. and Belytschko, T.: “Modeling holes and inclusions by level sets in the extended finite-element method”, Computer Meth. Appl. Mech. Engrg., Vol.190, pp.6183-6200, 2001.
- 11) Sethian, J. A.: “Level Set Methods and Fast Marching Methods”, (Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science), Cambridge Univ. Pr., 1999.
- 12) Moës, N., Cloirec, M. Cartraud, P. and Remacle, J. F.: “A computational approach to handle complex microstructure geometries”, Comput. Methods. Appl. Mech. Engrg. Vol.192, pp.3163-3177, 2003.
- 13) Klaas, O. and Shephard, M. S.: “Automatic generation of octree-based three-dimensional discretization for partition of unity methods”, Comput. Mech., Vol.25, pp.296-304, 2000.
- 14) 山田知典, 長嶋利夫: “構造格子を用いたメッシュフリー有限要素解析における境界要素積分手法”, 日本計算工学会論文集, Transaction of JSCES, Paper No 20090006, 2009