

# Material Point Method を用いた地盤材料の大変形解析

桐山 貴俊

(技術研究所)

## Numerical Simulation of Geomaterials Focusing on Large Deformation Problems using the Material Point Method

by Takatoshi Kiriyama

### Abstract

In order to understand the behavior of geomaterials under large deformation, the author implemented the numerical algorithm based on the particle based numerical method, GIMP (Generalized Interpolation Material Point) method and applied it to triaxial compression test simulations. Although GIMP method is a derivative of MPM, it has more stable numerical algorithm and removes the numerical noises, which are generated when material points cross the numerical grids. In this paper, to simulate triaxial compression test, numerical damping and material non-linearity (Mohr-Coulomb constitutive model) are implemented. The results obtained through simulations are compared with the results by the experiment as well as Finite Difference Method and the effectiveness of GIMP is both quantitatively and qualitatively confirmed.

### 概要

大変形領域における地盤の挙動を把握する目的で、粒子法の一つである GIMP(Generalized Interpolation Material Point)法を実装し三軸圧縮試験の再現解析を実施した。MPM は粒子が計算格子を越える際、数値振動を発生する難点が指摘されていた。GIMP は MPM の定式化を一般化し、問題とされた数値振動の不具合を解消した手法である。本論文では、Mohr-Coulomb の弾塑性構成則、減衰をそれぞれ定式化し、MPM の定式化に既存の解析技術が有効に組み込めることを示すと共に、三軸圧縮試験の再現解析を通して手法自体の実用性を定性、定量両面から示す。また解析結果を格子法と比較することで粒子法、格子法の相違点について述べる。

### 1.はじめに

数値計算法は、大きく分けて格子法と粒子法に分けられる。格子法の代表的なものは、有限要素法 (FEM : Finite Element Method)、有限差分法 (FDM : Finite Difference Method)が知られている。格子法は汎用な数値計算法として確立しているが、地盤分野の解析では、複雑な地層構成の地盤や大変形問題を対象とした場合に以下の問題点が指摘されている。

- ・メッシュ生成に多大な労力を要する。
- ・大変形解析時にメッシュ形状が破綻する。
- ・メッシュを再分割する場合の計算負荷が大きい。

これらメッシュに関連した不具合を解決するために、本論文では数値計算法として粒子法の MPM(Material Point Method)<sup>1)</sup>を採用した。MPM は Sulsky らが提唱した解析手法であり、流体解析で発展した PIC(Particle In Cell)法を固体力学に応用した粒子法の一つである。MPM

は空間内に固定した計算格子と格子内に配置した粒子 (Material Point)を用いる数値計算法である。運動方程式は格子点で解き、計算した物理量を粒子に投影する。粒子は物理量を持ちながら空間内を移動し、所属する格子へ物理量を輸送する。背面格子を利用した計算過程は格子法と同じであり、構成則など既存の格子法の計算技術がそのまま適用できる。MPM は固体力学における応力～ひずみ関係を構成則として導入することが可能である点、他の粒子法で問題とされる隣接粒子検索に費やす計算負荷が少ない点、に利点がある。大変形問題を対象とした場合、粒子が計算格子を超え隣接格子へ頻りに移動する。その際、MPM を用いると、数値誤差が発生する課題が指摘されている<sup>2)</sup>。この問題に対する改善策として、GIMP(Generalized Interpolation Material Point)法<sup>3)</sup>が数値計算上の誤差が最小化できる方法として Bardenhagen ら<sup>2)</sup>によって提唱された。また、その精度検証は Wallstedt ら<sup>3),4)</sup>によりなされている。

本論文では、地盤の数値計算法として大変形解析まで扱えるMPM、とりわけ数値誤差を最小化したGIMPを採用し、大変形領域までの三軸圧縮試験の再現解析を実施し、応力～ひずみ関係を実験値と比較することで、解析手法の適用性について検討した。さらに、せん断帯の形成過程を解析し、破壊に至るメカニズムについて考察した。また解析結果を格子法と比較することで粒子法、格子法の両者の相違点について述べる。

## 2. 数値計算法

### 2.1 MPMの定式化

MPMの定式化は、計算格子を空間に固定し、全ての物理量を粒子が輸送する点に計算手法としての特徴がある。過去に、大変形問題への適用可能性を期待し、MPMを用いた研究が報告されている。Konagaiら<sup>5)</sup>は、MPMで用いる格子として差分法を採用したLPFDM (Lagrangian Particle Finite Difference Method)を開発し、地盤の2次元解析へ適用した。清野ら<sup>6)</sup>は、これを3次元に拡張し、地震の波動伝播解析へ応用した。阿部ら<sup>7,8)</sup>は、斜面を流れる乾燥砂の流動解析にMPMを適用し、高さ方向へ自由度を持たせた準3次元解析へと拡張した。またHigoら<sup>9)</sup>は、固相をMPMで、液相をFDMでモデル化することにより、多相連成大変形解析を実現した。ここに掲載した既報の中でHigoらの研究は本論文で用いるGIMPを採用している。

#### 2.1.1 Material Point Method

ここではSulskyらが提唱したオリジナルMPMの定式化を記載する。式(1)～式(14)にある上添え字 $k$ は計算ステップ数を表す。また格子点物理量は下添え字 $g$ 、粒子物理量は下添え字 $p$ で表している。

粒子質量から次式より格子点質量を算出する。 $m_g$ 、 $m_p$ 、 $S_p$ 、 $n_p$ 、はそれぞれ、格子点質量、粒子質量、粒子位置における形状関数、格子内にある粒子数、である。

$$m_g^k = \sum_{i=1}^{n_p} m_{p,i} S_{p,i} \quad (1)$$

粒子応力から次式より格子点内力を算出する。 $f_g^{int}$ 、 $\rho_p$ 、 $G_p$ 、 $\sigma_p$ 、 $\sigma_p^{ini}$  はそれぞれ、格子点内力、粒子密度、形状関数の導関数、粒子応力、粒子初期応力である。

$$f_g^{int,k} = - \sum_{i=1}^{n_p} \frac{m_{p,i}^k}{\rho_{p,i}^k} G_{p,i}^T (\sigma_{p,i}^k - \sigma_{p,i}^{ini}) \quad (2)$$

体積力係数 $g^k$ から格子点外力 $f_g^{ext}$ を次式より算出する。

$$f_g^{ext,k} = m_g^k \cdot g^k \quad (3)$$

式(1)～(3)から格子点における運動方程式が自由度毎

に立てられ、格子点加速度 $a_g$ を式(4)より算出する。

$$a_g^k = \frac{1}{m_g^k} (f_g^{int,k} + f_g^{ext,k}) \quad (4)$$

粒子の座標を次式より算出する。 $x$ 、 $v_g$ 、 $\Delta t$ 、 $n_g$ は、粒子座標、格子点速度、時間刻み、粒子が所属する格子の頂点数、である。

$$x_p^{k+1} = x_p^k + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{n_g} v_{g,i}^k S_{p,i}^k \quad (5)$$

粒子変位 $u$ を次式より算出する。

$$u_p^{k+1} = u_p^k + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{n_g} v_{g,i}^k S_{p,i}^k \quad (6)$$

式(1)～(4)と式(5)、式(6)は独立な関係にあるのでどちらを先に計算しても結果に影響は無い。

粒子加速度 $a_p$ を式(7)から算出する。

$$a_p^k = \sum_{i=1}^{n_g} a_{g,i}^k S_{p,i}^k \quad (7)$$

粒子速度 $v_p$ を次式から算出する。

$$v_p^{k+1} = v_p^k + \Delta t \cdot a_p^k \quad (8)$$

格子点速度 $v_g$ を次式から算出する。

$$v_g^{k+1} = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{S_{p,i} m_{p,i}}{m_g^k} v_p^{k+1} \quad (9)$$

粒子のひずみ $\varepsilon_p$ を次式から算出する。 $\Delta \varepsilon_p$ は $\Delta t$ 間の粒子ひずみ増分である。

$$\Delta \varepsilon_p^{k+1} = \frac{\Delta t}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n_p} (G_{p,i} v_g^{k+1} + (G_{p,i} v_g^{k+1})^T) \quad (10a)$$

$$\varepsilon_p^{k+1} = \varepsilon_p^k + \Delta \varepsilon_p^{k+1} \quad (10b)$$

粒子応力 $\sigma_p$ を次式から算出する。 $K$ は要素剛性マトリックス、 $\Delta \sigma_p$ は $\Delta t$ 間の粒子応力増分である。

$$\Delta \sigma_p^{k+1} = K \cdot \Delta \varepsilon_p^{k+1} \quad (11a)$$

$$\sigma_p^{k+1} = \sigma_p^k + \Delta \sigma_p^{k+1} \quad (11b)$$

粒子体積、密度をそれぞれ式(12)、式(13)から算出する。 $Volume$ は体積、 $\Delta \varepsilon_v$ は体積ひずみ増分である。

$$Volume^{k+1} = Volume^k \cdot (1 + \Delta \varepsilon_v^{k+1}) \quad (12)$$

$$\rho^{k+1} = \frac{\rho^k}{(1 + \Delta \varepsilon_v^{k+1})} \quad (13)$$

GIMPの場合、自由度毎に粒子の影響半径を次式によ

り更新する。

$$I_{p,i}^{k+1} = I_{p,i}^k \cdot (1 + \Delta \varepsilon_i^{k+1}) \quad (14)$$

式(1)～式(14)の一連の手順が解析の 1 ステップに相当する。この間の時間刻みは $\Delta t$ であり、 $t$  時間の計算を行う場合は $t/\Delta t$  ステップだけ上記手順を繰り返す

以上に記載したものは USL(Update Stress Last)の手順である。USL 以外の計算手順およびその精度検証に関しては参考文献 10)に譲る。

## 2.1.2 Generalized Interpolation Material Point Method

MPM に用いる形状関数を図 - 1、式(15)に示す。式中の  $S_p$ 、 $G_p$  はそれぞれ 1 次元方向の形状関数とその導関数である。また、 $L$  は計算格子間隔、 $x_p$  は粒子座標、 $x_v$  は格子点座標である。式(15)のとおり、変位、速度、加速度に対しては 1 次線形(図 - 1(a))、応力、ひずみは計算格子内で一定値(図 - 1(b))を取る。MPM の問題点は粒子が計算格子を超えて移動する場合、非常に小さい格子点質量が計算される点、および、応力、ひずみが不連続的に変化する点、である。この問題を解決するために、Bardenhagen らは以下の要件を満たす形状関数として次の関数(式(16)、図 - 1)を提唱した。

### ・要件 1

粒子を空間分布させる。格子幅  $L$  の領域を粒子  $n$  個で代表する場合、影響半径( $l_p$ )は  $L/2n$  と定義する。

### ・要件 2

粒子が格子を越える際、応力、ひずみを線形変化させるために形状関数の導関数を 1 次線形で定義する。

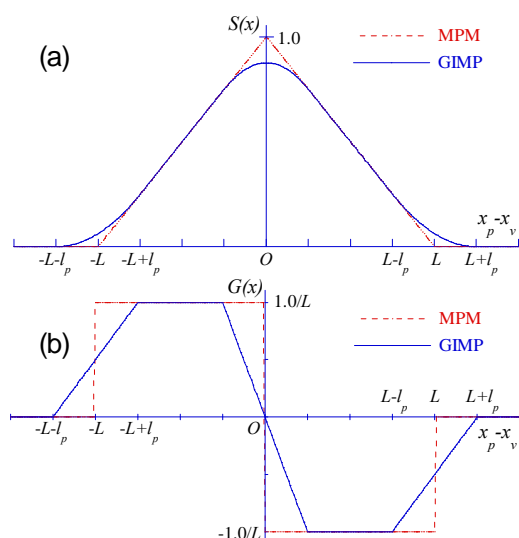


図 - 1 形状関数(a)とその導関数(b)  
(MPM と GIMP を比較)

### ・MPM の形状関数とその導関数

$$S_p(x_p) = \begin{cases} 0 & x_p - x_v \leq -L \\ 1 + (x_p - x_v)/L & -L < x_p - x_v \leq 0 \\ 1 - (x_p - x_v)/L & 0 < x_p - x_v \leq L \\ 0 & L < x_p - x_v \end{cases} \quad (15a)$$

$$G_p(x_p) = \frac{dS_p}{d(x_p - x_v)} = \begin{cases} 0 & x_p - x_v \leq -L \\ 1/L & -L < x_p - x_v \leq 0 \\ -1/L & 0 < x_p - x_v \leq L \\ 0 & L < x_p - x_v \end{cases} \quad (15b)$$

### ・GIMP の形状関数とその導関数

$$\overline{S_p}(x_p) = \begin{cases} 0 & x_p - x_v \leq -L - l_p \\ (L + l_p + (x_p - x_v))^2 / 4Ll_p & -L - l_p < x_p - x_v \leq -L + l_p \\ 1 + (x_p - x_v)/L & -L + l_p < x_p - x_v \leq -l_p \\ 1 - ((x_p - x_v)^2 + l_p^2) / 2Ll_p & -l_p < x_p - x_v \leq l_p \\ 1 - (x_p - x_v)/L & l_p < x_p - x_v \leq L - l_p \\ (L + l_p - (x_p - x_v))^2 / 4Ll_p & L - l_p < x_p - x_v \leq L + l_p \\ 0 & L + l_p < x_p - x_v \end{cases} \quad (16a)$$

$$\overline{G_p}(x_p) = \frac{d\overline{S_p}}{d(x_p - x_v)} = \begin{cases} 0 & x_p - x_v \leq -L - l_p \\ (L + l_p + (x_p - x_v)) / 2Ll_p & -L - l_p < x_p - x_v \leq -L + l_p \\ 1/L & -L + l_p < x_p - x_v \leq -l_p \\ -(x_p - x_v) / Ll_p & -l_p < x_p - x_v \leq l_p \\ -1/L & l_p < x_p - x_v \leq L - l_p \\ -(L + l_p - (x_p - x_v)) / 2Ll_p & L - l_p < x_p - x_v \leq L + l_p \\ 0 & L + l_p < x_p - x_v \end{cases} \quad (16b)$$

式(16)は形状関数を体積平均する次式より求めることができる。

$$\overline{S_p} = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p \cap \Omega} \chi_p S_p dx \quad (17a)$$

$$\overline{G_p} = \overline{\nabla S_p} = \frac{1}{V_p} \int_{\Omega_p \cap \Omega} \chi_p \nabla S_p dx \quad (17b)$$

ここに、 $\Omega_p$ 、 $\Omega$ 、 $\chi_p$  は粒子領域、物体領域、特性関数である。特性関数として式(15)と同型の一次線型関数を用いることで式(16)が導かれる。

図 - 2 に MPM、GIMP の物理量補間の様子を模式図に示す。MPM は粒子が属する格子の格子点を用いて内挿・外挿を繰返し物理量を輸送する。GIMP は隣接格子の格子点まで利用して物理量を輸送する。

多次元解析を実施する場合、補間関数は、直交方向に定義した形状関数の積の形式とし、次式で表される。

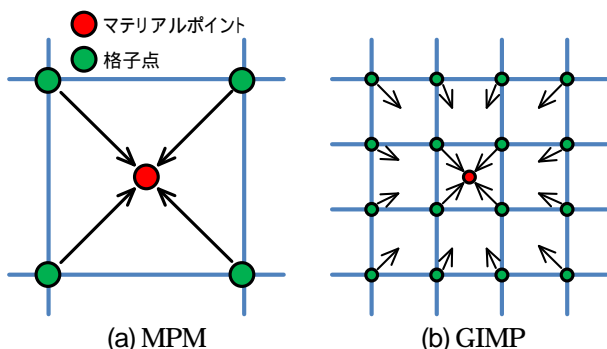


図 - 2 物理量補間方法の模式図

$$S_p = S_x \cdot S_y \cdot S_z \quad (18)$$

各計算軸方向に対する導関数は次式で表される。

$$G_{p,x} = G_x \cdot S_y \cdot S_z \quad (19a)$$

$$G_{p,y} = S_x \cdot G_y \cdot S_z \quad (19b)$$

$$G_{p,z} = S_x \cdot S_y \cdot G_z \quad (19c)$$

これとは別に式(17)の段階で特性関数として多次元形状関数を用いる方法が提案されている<sup>11)</sup>。この手法はCPDI(Convected Particle Domain Interpolation)法と呼ばれ数値計算法としての粒子性は無く格子法と同等のものとなっている。著者は、粒子性を有する式(18)、式(19)に基づいた三次元のGIMPに、地盤の非線形性としてMohr-Coulombの弾塑性構成則を組み込んだ解析プログラムを構築し、構築したプログラムを用いて以降の解析を実施した。

## 2.2 減衰

本論文で対象とする三軸圧縮試験を再現する際、キャップへの強制変位を行うが、適切な減衰を与えなければ、試験体内で弾性波が発生し、解析結果が振動してしまう。非線形解析では、モデル内の一部の塑性化領域により、その後の挙動が大きく左右される。弾性波による振動により粒子が塑性化しないように、以下で説明する減衰を導入する。

本論文では、式(4)の右辺にある外力を駆動力 $f_g^{drive}$ と定義し、速度 $v_g$ と反対方向に駆動力の $\alpha$ 倍の減衰力 $f_g^{damp}$ を作用させることで、振動を抑制する減衰方法<sup>12)</sup>を採用した。この作用させる減衰力を次式に示す。

$$f_g^{drive} = f_g^{int} + f_g^{ext} \quad (20a)$$

$$f_g^{damp} = -\alpha \cdot \text{sign}(v_g) \cdot f_g^{drive} \quad (20b)$$

この減衰力を式(4)に代入すると次式を得る。

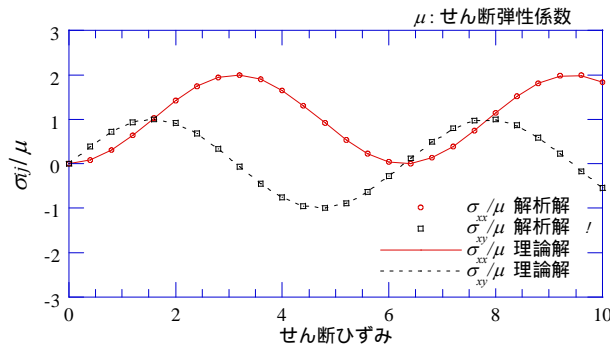


図 - 3 Jaumann 応力速度を理論解と解析解で比較

$$a_g^k = \frac{1}{m_g^k} (f_g^{drive,k} + f_g^{damp,k}) \quad (21a)$$

$$a_g^k = \frac{1}{m_g^k} (1 - \alpha \cdot \text{sign}(v_g^k)) \cdot f_g^{drive,k} \quad (21b)$$

$\alpha$ が正の場合、駆動力と速度が同符号であれば運動は抑制され、異符号であれば運動は励起され、運動は次第に減衰していく。この過程を収束過程と呼ぶ。収束過程を経て、最終的に駆動力、減衰力がともにゼロとなり、力の釣り合いが取れる。この時の結果が収束解となる。

## 2.3 Jaumann 応力速度

大変形領域の計算をする際に使用する客観応力速度としてJaumann 応力速度を導入した。Jaumann 応力速度による剛回転成分補正は次式で表される<sup>13)</sup>。

$$d^o \sigma_{ij} = d\sigma_{ij} - d\omega_{ik} \sigma_{kj} + \sigma_{ik} d\omega_{kj} \quad (22)$$

$d^o \sigma_{ij}$ はJaumann 応力速度、 $d\sigma_{ij}$ はCauchy 応力増分、 $d\omega_{ij}$ はスピンテンソルである。

単純せん断による応答応力の厳密解は次式で表される<sup>14)</sup>。

$$\tau_{xy} = \mu \sin(\gamma_{xy}) \quad (23a)$$

$$\sigma_{xx} = -\sigma_{yy} = \mu(1 - \cos(\gamma_{xy})) \quad (23b)$$

式中の $\mu$ はせん断剛性である。厳密解をMPMによる解析結果と共に図-3に示す。両者の結果は一致しており、MPMのアルゴリズムでJaumann 応力速度による剛回転成分の補正が適切に再現できていることが確認できる。

## 2.4 材料非線形

MPMはFEM等の格子法で用いられるMohr-CoulombやDrucker-Pragerなどの構成則を導入することが可能な数値計算法である。本解析では地盤の非線形性としてMohr-Coulombの破壊基準による弾塑性構成則を採用し

た。本論文で採用したMohr-Coulombの定式化を以下に記載する。

Mohr-Coulombの破壊基準は次式で表される。

$$f_s = \sigma_1 - \sigma_3 \cdot N_\phi + 2c\sqrt{N_\phi} \quad (24)$$

ここに、 $\sigma_1$ 、 $\sigma_3$ は最大、最小主応力( $\sigma_1 < \sigma_3$ )、 $c$ は粘着力、 $\phi$ は内部摩擦角である。また $N_\phi$ は次式で表される。

$$N_\phi = \frac{1 + \sin(\phi)}{1 - \sin(\phi)} \quad (25)$$

破壊基準に達した応力は次式により応力を修正し、破壊面上へ戻す。

$$\sigma_1^{New} = \sigma_1^E - \lambda^s (\alpha_1 - \alpha_2 N_\phi) \quad (26a)$$

$$\sigma_2^{New} = \sigma_2^E - \lambda^s \alpha_2 (1 - N_\phi) \quad (26b)$$

$$\sigma_3^{New} = \sigma_3^E - \lambda^s (-\alpha_1 N_\phi + \alpha_2) \quad (26c)$$

ここに、 $\sigma^{New}$ は修正後の主応力、 $\sigma^E$ は弾性定数により仮に求めた現応力である。式(26)中の定数は次式で求められる。

$$\alpha_1 = K + \frac{4}{3}G \quad (27a)$$

$$\alpha_2 = K - \frac{2}{3}G \quad (27b)$$

$$N_\phi = \frac{1 + \sin(\phi)}{1 - \sin(\phi)} \quad (27c)$$

$$\lambda^s = \frac{f_s}{(\alpha_1 - \alpha_2 N_\phi) - (-\alpha_1 N_\phi + \alpha_2) N_\phi} \quad (27d)$$

ここに、 $K$ 、 $G$ および $\phi$ はそれぞれ体積弾性係数、せん断弾性係数、ダイランシー角である。主応力を修正後、塑性化しても主応力方向は変化しないと仮定して一般応力を求め、以後の解析を進める。

引張強度を超えた粒子は次式に従って応力を修正する。

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} \sigma_i & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases} \quad (28)$$

ここに、 $\sigma$ はMohr-Coulombの破壊基準における引張強度で次式で表される。

$$\sigma_t = c / \tan \phi \quad (29)$$

### 3.三軸圧縮試験の破壊進展シミュレーション

要素試験は地盤の代表的な構成要素を抽出し、室内の制御された仕組みの中で、実現象を再現できる。実地盤に比べて不確定要素が少ないという点において、数値計算法の適用性を検証する対象として優れている。過去に

も、構成則の開発、ひずみの局所化に着目した、三軸圧縮試験の再現シミュレーションが報告されている<sup>15)-17)</sup>。これらの再現シミュレーションは格子法を用いており、試験体の変形状を再現できること、応力~ひずみ関係等の実験値を定量的に評価できることを報告している。一方、数値計算法として粒子法を用いた要素試験の再現シミュレーションは、Konagaiら<sup>5)</sup>が行っており、試験体内に配置した抵抗物が応力~ひずみ関係に与える影響を解析的に評価している。GIMPを用いた三軸圧縮試験との比較・再現シミュレーションはこれまでに報告されていない。以下はGIMPを用いた三軸圧縮試験の再現シミュレーションを実施し、大変形領域に着目して、定性・定量両面から解析法の適用性を評価する。

#### 3.1 三軸圧縮試験の概要

構築した手法の地盤材料への適用性を確認するために、三軸圧縮試験の再現解析を実施した。対象とするのは地盤材料を用いた三軸圧縮試験である。地盤材料は不飽和(含水比4.5%)のDLクレイであり、軸ひずみ15%までの変位制御による単調載荷試験(載荷速度：軸ひずみ1%/min)を実施している。試料の均等係数は2.7、粒径加積曲線を図-4に示す。土質分類上シルトに分類される。この試験は盛土を想定して実施された。一般的に盛土は不飽和であり、その強度特性を把握することを目的としている。土質試料の作成にあたり脱気水の代わりに不揮発性のシリコンオイルを用いている。これは、試料作成、管理に主眼を置いたことによる。試験により得られた応力~ひずみ関係および最終変形のスケッチを図-5に、試験結果から算出した材料定数を表-1に示す。表-1に示す初期せん断剛性は応力~ひずみ関係の初期接線勾配から求めた。また、粘着力、内部摩擦角はピーク応力時のモールの応力円から算出した。ポアソン比は解析用に設定した数値であり、実験結果では無い。試験終了後

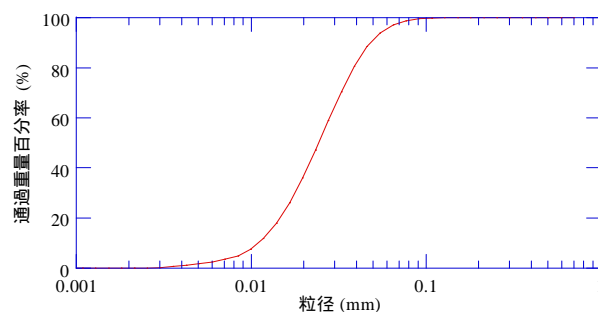
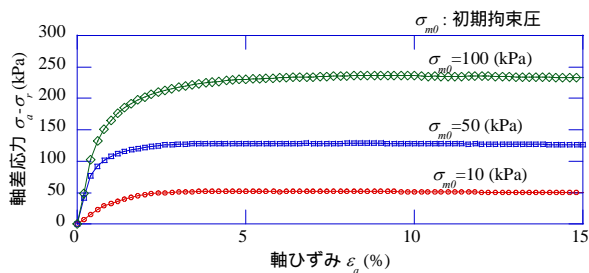


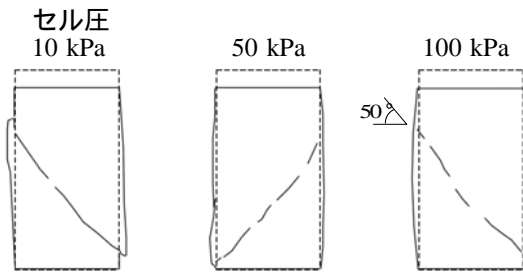
図-4 DLクレイの粒径加積曲線

表-1 三軸圧縮試験より得られたDLクレイの物性値

試験 No.	初期拘束圧 $\sigma'_{m0}$ (kPa)	初期せん断剛性 $G$ (kPa)	密度 $\rho$ (g/cm <sup>3</sup> )	ポアソン比 $\nu$	粘着力 $c$ (kPa)	内部摩擦角 $\phi$ (°)
1	10	1311	1.53	0.2	8.5	30.5
2	50	6401	1.53			
3	100	8514	1.53			



(a) 応力～ひずみ関係



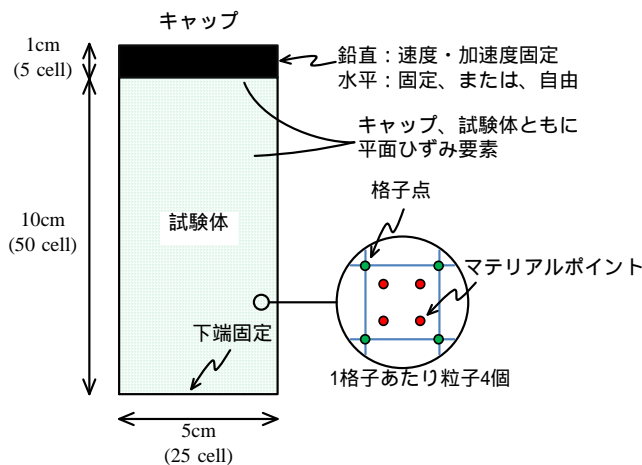
(b) 試験終了時のスケッチ

図 - 5 DL クレイの三軸圧縮試験結果

の試験体はいずれもせん断破壊によるたすき型のせん断帯を示した。せん断帯は図からの読み取りで、いずれの試験も水平面から約 50° 傾いた位置であった。

### 3.2 解析条件と解析モデル

試験体は粒子群で構成し、2次元平面ひずみ状態を仮定した。粒子群は、空間内において、幅 5cm、高さ 10cm を代表し、各粒子には等価な重量をその支配面積に応じて割り当てた。試験体上部にキャップとして、幅 5cm、高さ 1cm の粒子群を配置した。試験体は Mohr-Coulomb 則に従う弾完全塑性体、キャップは弾性体とした。試験体、キャップとも初期せん断剛性、強度定数は表 - 1 に示す値を用いた。粒子は引張に抵抗しないと仮定し式(28)において  $\sigma_t$  をゼロとした。粒子配置は 1 格子あたり 4 粒子とし、試験体 5000 粒子、キャップ 500 粒子、解析モデル全体で 5500 粒子配置した。



(a) MPM

実験は初期等方応力状態からひずみ制御で载荷している。この条件を再現するために、解析上の試験体にも初期応力を付与し、キャップを強制変位させた。キャップの強制変位は式(7)で加速度をゼロとし、式(8)に一定速度条件(0.02m/s)を付与することで実施した。初期応力は式(11b)に初期値として与えた。側方は、試験体に変形し移動境界となるため、初期応力と釣り合う圧力は载荷していない。その代わりに、力の釣り合いを取るために、格子点力算定時の式(2)の左辺にある現応力から初期応力を差し引くことで、初期応力による変形を発生させない方法とした。境界条件は、試験体下端を固定、キャップの水平方向は固定または自由とした。

結果を既存の数値計算法と比較するために、同等の解析条件を付与した有限差分法(FDM)<sup>18)</sup>による解析も合わせて実施し結果を比較する。MPM および FDM の解析モデル、解析条件を図 - 6、表 - 2 にそれぞれ示す。

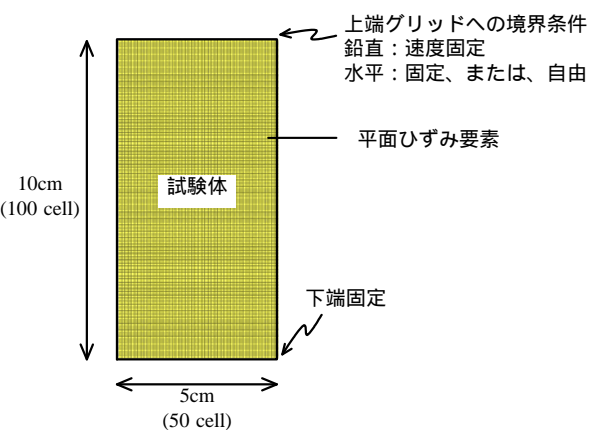
载荷中、試験体下端粒子の鉛直応力を平均し载荷圧を求め、また、強制変位による軸変位から軸ひずみを求め、解析による応力～ひずみ関係として整理する。得られた応力～ひずみ関係を三軸圧縮試験結果と比較する。

### 3.3 解析における各種要因とその影響

再現解析を実施する上で、ポアソン比、材料の初期不

表 - 2 解析条件

項目	値
1格子辺りの琉指数	4
計算領域(高さ×幅)	0.09m×0.11 m
格子幅	0.002 m
キャップ移動速度	0.02 (m/sec)
積分時間間隔	0.00002
減衰定数	0.01
材料初期不整(均等分布)	1%
構成粒子数	
供試体	5,000
キャップ	500



(b) FDM

図 - 6 MPM および FDM による試験体の数値解析モデル

整およびキャップの境界条件は、実験計測、解析技術の両面から明確な解析条件を付与することが困難である。ポアソン比および材料の初期不整に関しては文献 (21) で検討されている。文献によれば、ポアソン比は数値が大きくなるほど試験体がたる型の挙動を示し、せん断帯が不明瞭になる。材料の初期不整に関しては、小さな値(偏差 1%)の初期不整を与えるだけでもたすき型せん断帯を示すことが記載されている。この時の初期不整は強度定数を所定の偏差量で均等分布させる方法である。本論文では文献に従い、ポアソン比を 0.2、材料の初期不整を 1%とする設定を用いた。キャップの境界条件に関しては水平固定、自由の両ケース実施した。実験において、キャップと試験体の間は、試験体端面の試料の乱れ等により完全に密着された状態ではなく、キャップの水平拘束条件は固定条件と自由条件の中間の摩擦則に支配されていると考えられる。

### 3.4 再現解析

表 - 1 の試験 No.1-3 を対象にポアソン比 0.2、初期不整 1%の条件で実施したシミュレーション結果を図 - 7 ~ 10 に示す。

#### 3.4.1 MPM による解析結果

図 - 8(a)は No.1(初期拘束圧 10kPa)の再現解析でキャップの水平自由度を固定した場合の結果を示している。図中の色は最大せん断ひずみ( $\gamma_{max} = \epsilon_1 - \epsilon_3$ 、 $\epsilon_1$ 、 $\epsilon_3$ は最大・最小主ひずみ)の大きさを表している。ひずみ分布は、初期不整を与えているため、左右の対称性が崩れている。しかしながら、キャップの水平変位を固定しているため、最終的に左右対称な X 型せん断帯を形成する。同図によれば、軸ひずみ 2%の段階で、多数のせん断帯が存在し、幅を持ったせん断帯を形成する。軸ひずみ 5%から大きい領域では、形成したせん断帯の局所化が進行し、試験体は段階的に側方へ変位し、

中央で粒子が分離していく様子が見られる。粒子の分離は引張破壊が生じていることを示している。図 - 7(a)を見ると、この段階の軸差応力は一定値を保っており、局所化したせん断帯において連続的なせん断破壊が生じていることが分かる。このことから、試験体の破壊は、軸ひずみ 5%程度までは、せん断帯を形成するせん断破壊が進行し、その後、試験体中央から引張破壊領域が形成される、という破壊進行過程をたどる。引張破壊が発生すると粒子の応力が解放される。若干の振動があるものの、初期降伏後の軸差応力はほぼ定常状態であり、大変形領域において、応力 ~ ひずみ関係は実験結果を概ね再現している。

図 - 8(b)は No.1(初期拘束圧 10kPa)の再現解析でキャップの水平自由度を自由とした場合の結果を示している。軸ひずみ 2%まではキャップの水平変位を固定した場合と同様の傾向である。軸ひずみ 5%から大きい領域で、せん断帯の局所化が進行しており、たすき型せん断帯を形成する。これはキャップが水平変形を拘束しないため、左右のいずれか一方方向に変形が集中するためである。図 - 7(b)を見ると軸ひずみ 2%以降において軸差応力が減少している。これはキャップの偏心に伴い、鉛直の拘束圧が解放されることが原因である。

図 - 8 に示す軸ひずみ 50%時の結果は、格子法と比較した場合、大変形解析における GIMP の優位点を示す例として掲載した。すなわち、GIMP を用いることで、大変形領域まで統一したスキームで計算を実行できることを示している。

キャップの境界条件に関しては、いずれの条件下でも局所化によるせん断帯の発生が鮮明に表現できている。せん断帯の発現位置は水平より約 50°であり、実験結果(図 - 5(b))と整合する結果である。

#### 3.4.2 FDM と MPM の相違点

図 - 7 ~ 10 より、FDM の結果も応力 ~ ひずみ関係、

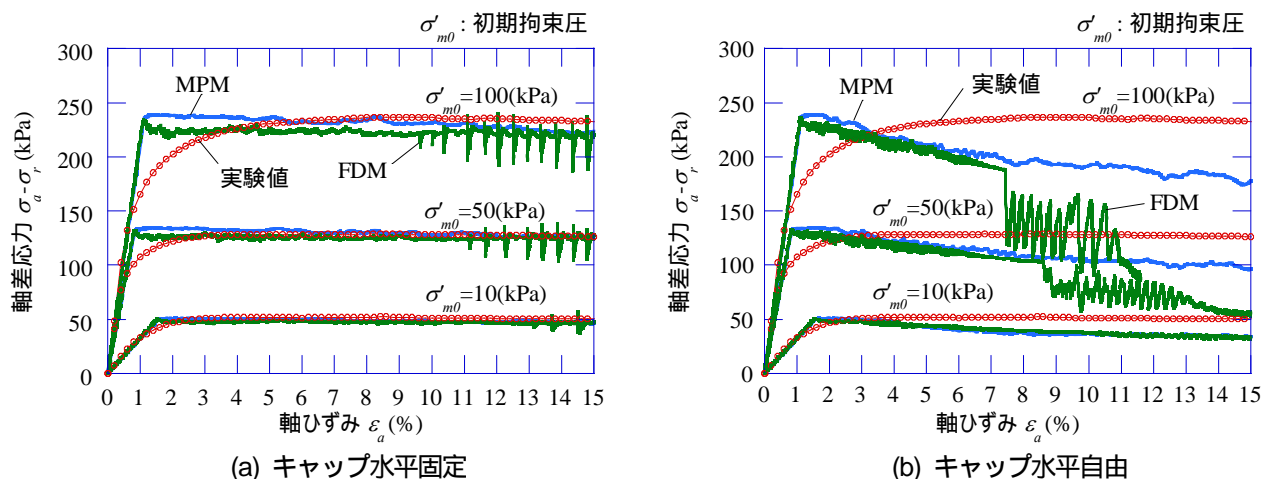


図 - 7 応力 ~ ひずみ関係 (再現解析)

最大せん断ひずみ分布共に MPM と同様の結果を示す。一方、軸ひずみが10%を越える領域において、応力～ひずみ関係の軸差応力の振動が顕著である点(図-7)、最大せん断ひずみ分布(図-8(a)、図-9(a)、図-10(a)、(b))に関しては軸ひずみ15%では正常な結果が得られない点など、解析的な不具合が確認できる。特にキャップの水平自由度を自由とした場合、FDM が示す軸差応力は、初期拘束圧50kPaの場合は軸ひずみ9%付近、100kPaの場合は8%付近で、極端な減少と振動を示す。いずれも要素形状に起因する数値不安定性が原因と考えられる。MPM による軸差応力が緩やかな弧を描きながら軸ひずみ15%まで試験体を圧縮しきっているのは対象的である。要素形状に起因する数値不安定はリメッシュすることで回避することが可能であるが、それに伴う計算負荷の増大や誤差の蓄積などが課題とされる。GIMP はその課題を回避する有効な手法と言える。

### 3.4.3 実験結果との比較

図-8～10 から、いずれの初期応力においても、キャップの水平変位を固定した場合はX型せん断帯、固定しない場合は、たすき型せん断帯を形成し、その角度は水平から約50°の位置に発現することが分かる。せん断帯の発現角度に関して、解析結果は実験結果を概ね再現できている。また、図-7により、キャップの拘束条件に依存して、せん断帯形成の再現性と応力～ひずみ関係の再現性がトレードオフの関係にある。すなわち、水平固定の場合はX型せん断帯を形成し、軸差応力はほぼ一定値を示す、一方、水平自由の場合はたすき型せん断帯を形成し、軸差応力は徐々に減少する。キャップの水平変位を固定、および、自由とする境界条件は摩擦条件の上下限を示す境界条件である(固定：摩擦無限大、自由：摩擦なし)。この事は、実施した解析結果の中間の状態として、実験結果が存在すること、すなわち、キャップと試験体の間は、試験体端面の試料の乱れ等により完全に密着された状態ではないとの前述の推測を裏付ける結果と解釈できる。三軸圧縮試験の再現解析は試験体の境界値問題であると

の認識は Higo ら<sup>17)</sup>も指摘しており、本論文の結果は既存の報告と整合するものである。

## 4.まとめ

オリジナル MPM を改良した GIMP に関して、数値計算法から解析結果とその考察まで示した。本論文で示した結果から、GIMP は数値計算法として、大変形や局所化現象まで追跡でき、三軸圧縮試験のピーク強度およびせん断帯の発現角度に再現性が認められることから、地盤材料を対象とした解析に適用可能な有効な手法であると言える。

GIMP を用いた三軸圧縮試験の解析結果より以下のことが明らかになった。

- 1)キャップの水平変位を固定する場合、X型のせん断帯を形成する。応力～ひずみ関係は大変形領域において実験結果を良好に再現できる。
- 2)キャップの水平変位を自由にする場合、たすき型のせん断帯を形成する。一方、鉛直拘束圧が解放されるため、応力～ひずみ関係は実験結果を再現できない。
- 3)異なる初期拘束圧においても以上で述べた内容と同様の解析結果が得られる。
- 4)FDM 結果と比較して、大変形領域において数値安定性の面で優位性がある。

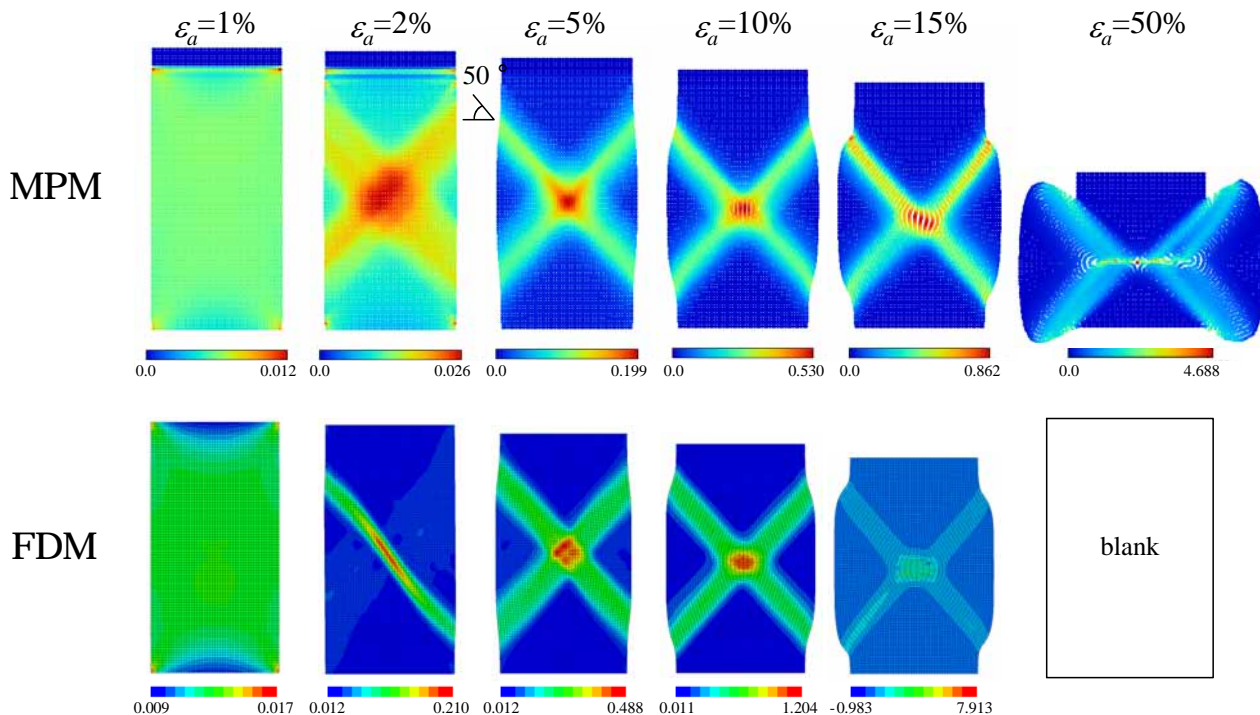
本論文では、数値積分法に伴う精度誤差、せん断帯を形成する幅、などを検討対象としていない。これらは今後の課題としたい。また、異なる試料や三次元解析モデルを用いた要素試験、振動台実験、実問題等の地盤分野において本手法を適用し、手法の有効性を確認する予定である。

## 謝辞

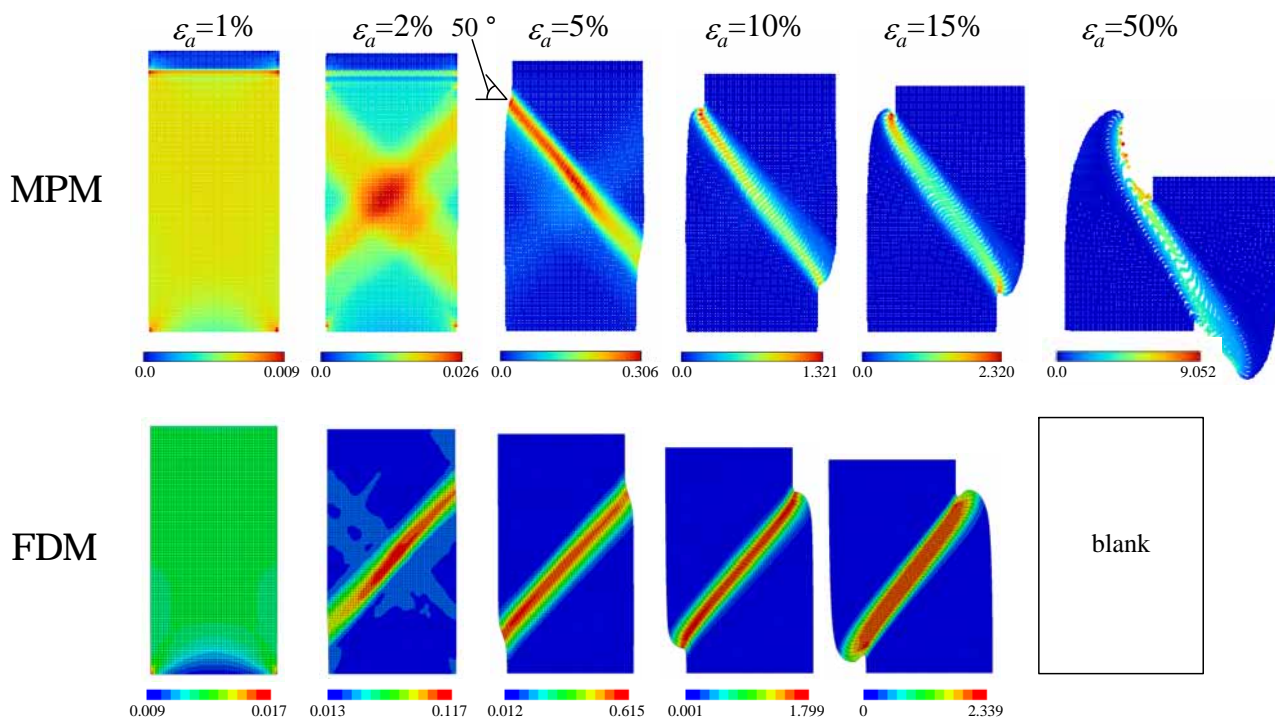
本研究を行うに当たり、清水建設技術研究所の福武毅芳氏に有益な助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。

本論文は著者による既往の報告<sup>19)-21)</sup>を基に未発表の内容を追加して再編集したものである。



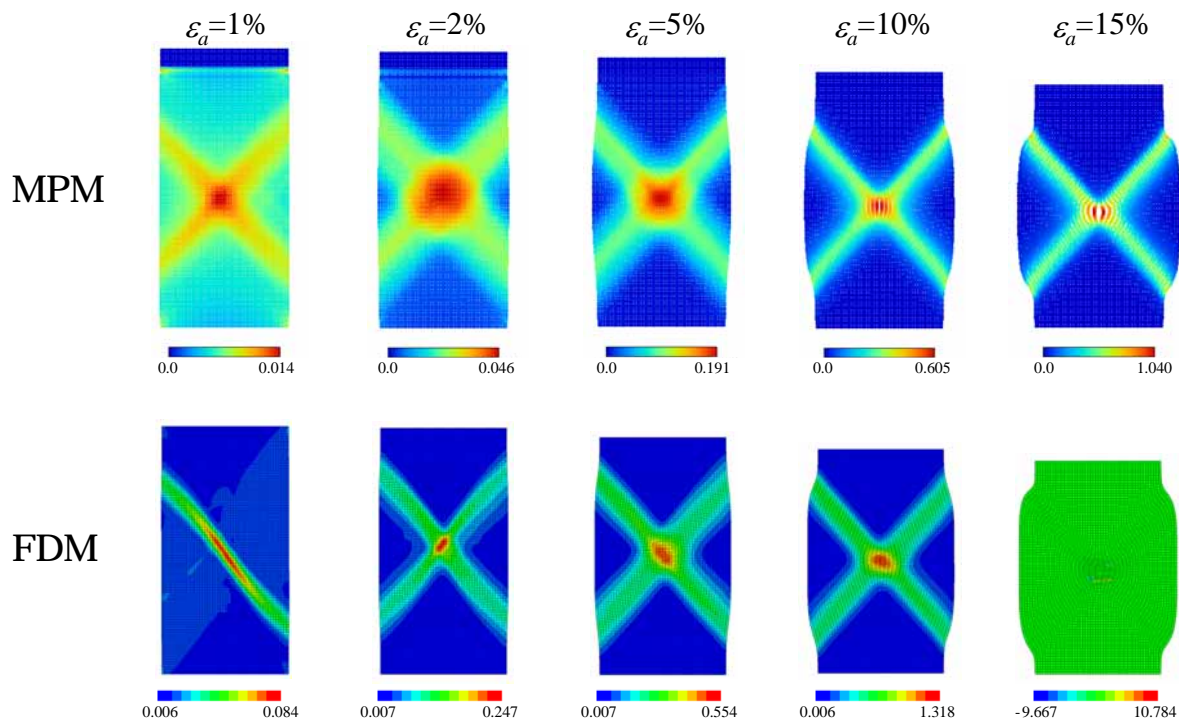


(a) キャップ水平固定

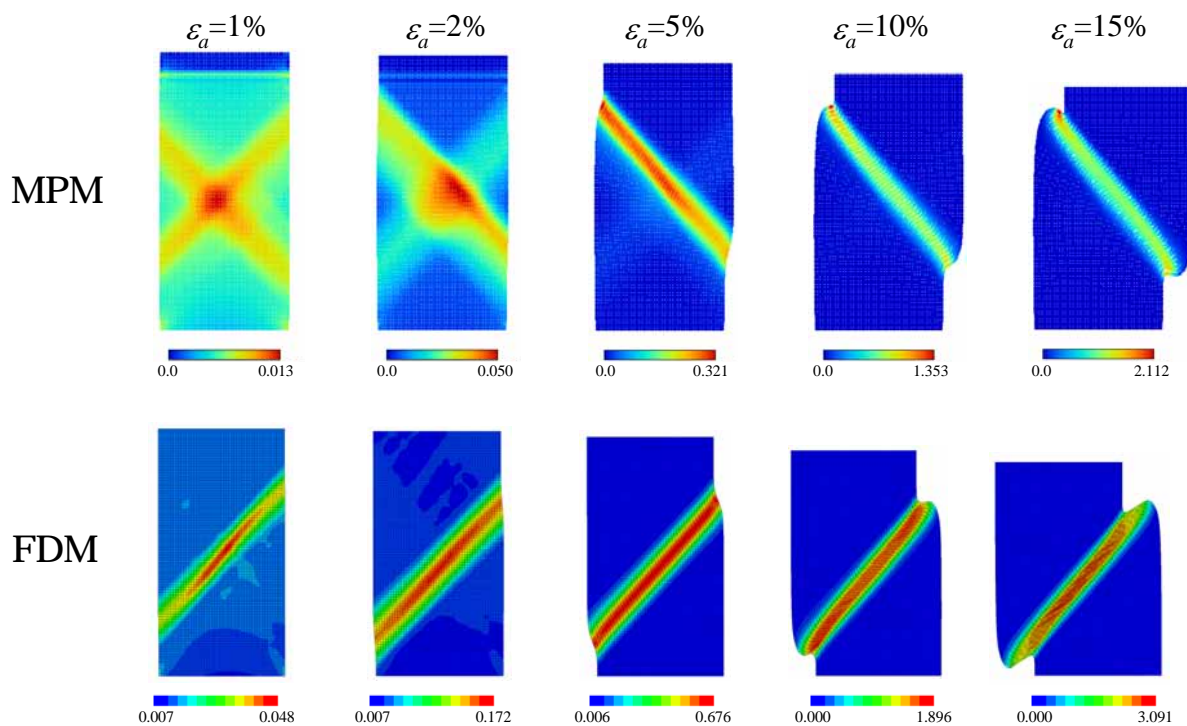


(b) キャップ水平自由

図 - 8 三軸供試体の変形と最大せん断ひずみカラーコンター  
(再現解析：試験 No.1、 $\sigma_{m0}=10\text{kPa}$ )

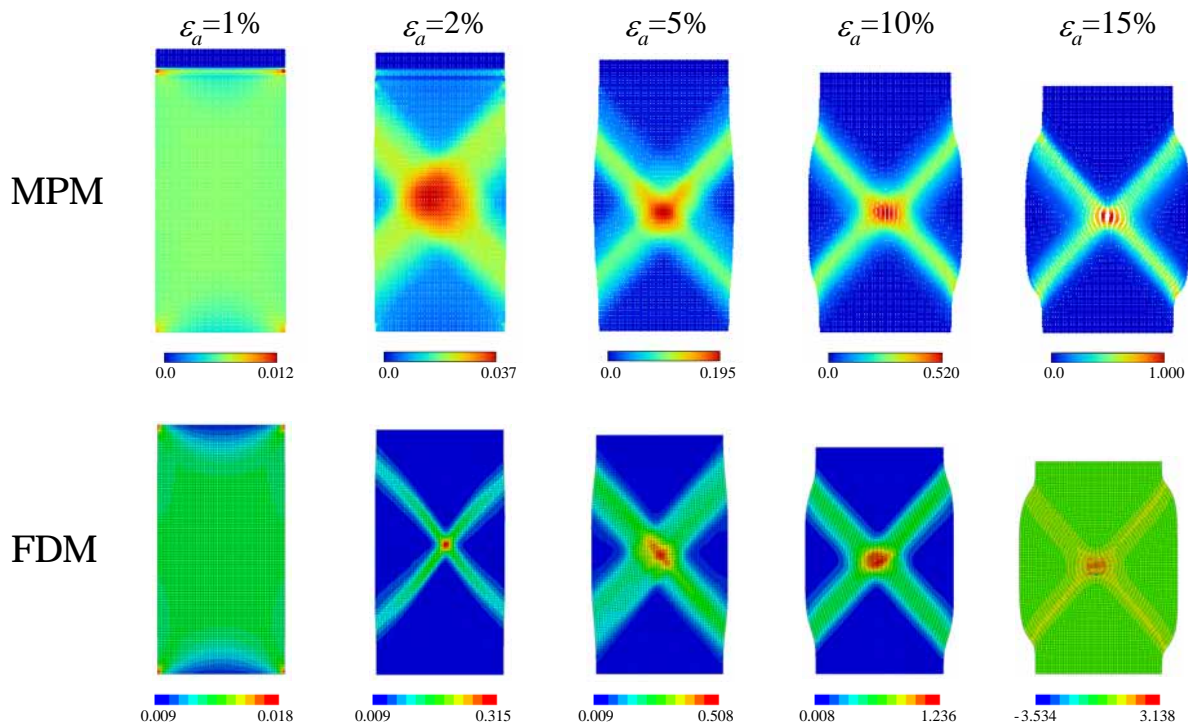


(a) キャップ水平固定

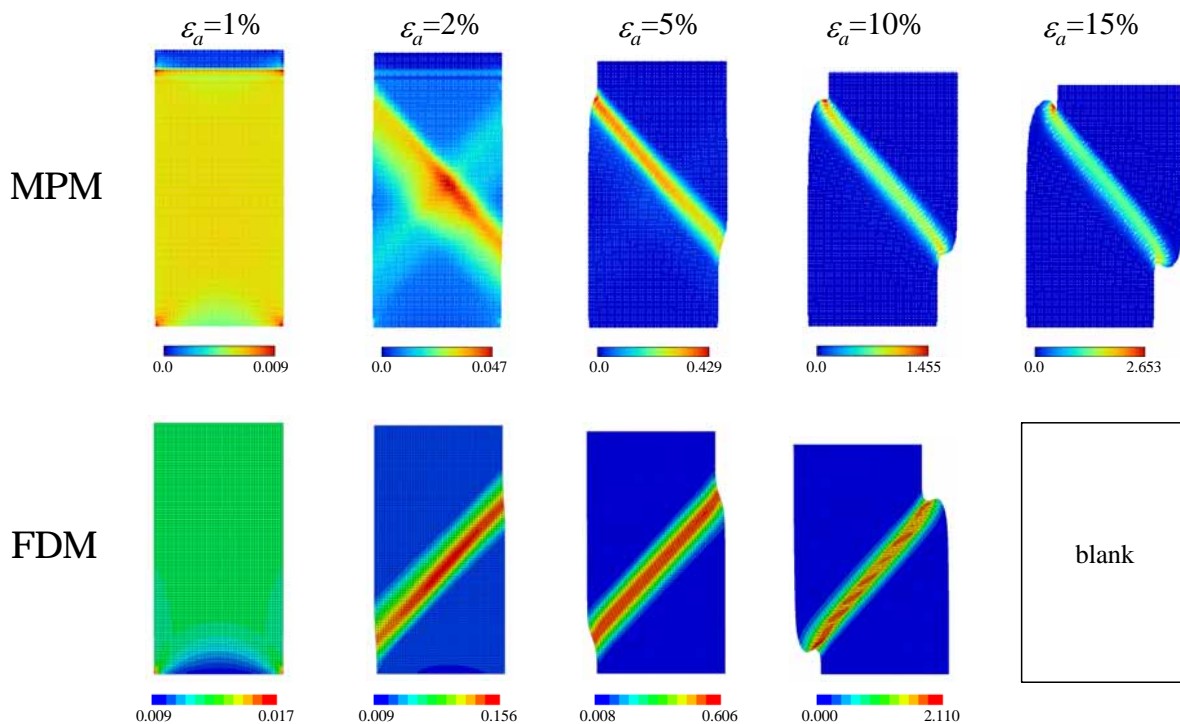


(b) キャップ水平自由

図 - 9 三軸供試体の変形と最大せん断ひずみカラーコンター  
(再現解析：試験 No.2、 $\sigma'_m=50\text{kPa}$ )



(a) キャップ水平固定



(b) キャップ水平自由

図 - 10 三軸供試体の変形と最大せん断ひずみカラーコンター  
(再現解析、試験 No.3、 $\sigma_{m0}=100\text{kPa}$ )

<参考文献>

- 1) Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H.L. : A particle method for history-dependent materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.118, pp179-196, 1994.
- 2) Bardenhagen, S.G. and Kober, E.M. : The generalized interpolation material point method, *Computer Modeling in Engineering and Science*, Vol.5, No.6, pp447-495, 2004.
- 3) Wallstedt, P. C. & Guilkey, J. E. : Improved velocity projection for the material point method, *Computer Modeling in Engineering & Sciences*, Vol.19, No.3, pp.223-232, 2007.
- 4) Wallstedt, P. C. & Guilkey, J. E. : An evaluation of explicit time integration schemes for use with the generalized interpolation material point method, *Journal of Computational Physics*, Vol.227, No.22, pp.9628-9642, 2008.
- 5) Konagai, K. and Johansson, J. : Lagrangian particles for modeling large soil deformations, *Seismic Fault Induced Failures*, pp.99-106, 2001.
- 6) 清野純史, 本田武史: 断層近傍の大変形を考慮した差分法による地震動評価, *土木学会地震工学論文集*, Vol.27, No.17, pp.1-8, 2005.
- 7) 阿部慶太, Jorgen Johansson, 小長井一男: MPM を用いた乾燥砂の流動解析, *土木学会地震工学論文集*, Vol.28, No.96, pp.1-10, 2005.
- 8) 阿部慶太, Jorgen Johansson, 小長井一男: MPM を応用した高速長距離土砂流動の運動範囲予測のための数値解析手法, *土木学会論文集 C*, Vol.63, No.1, pp.93-109, 2007.
- 9) Higo, Y., Oka, F., Kimoto, S., Morinaka, Y., Goto, Y. and Zhen, C. : A coupled mpm-fdm analysis method for multi-phase elasto-plastic soils, *Soils and Foundations*, Vol.50, No.4, pp.515-532, 2010.
- 10) Buzzi, O., Pedroso, D. M. and Giacomini, A. : Caveats on the implementation of the generalized material point method, *Computer Modeling in Engineering and Sciences*, Vol.31, No.2, pp85-106, 2008.
- 11) Sadeghirad, A., Brannon, R.M. and Burghardt, J. : A convected particle domain interpolation technique to extend applicability of the material point method for problems involving massive deformations, *Int. J. Numer. Meth. Engng*, Vol.86, No.12, pp.1435-1456, 2011.
- 12) Cundall, P.A. : Distinct element models of rock and soil structure, analytical and computational methods in engineering rock mechanics, Ch.4, pp.129-163. E.T. Brown, ed. London: Allen & Unwin., 1987.
- 13) 後藤學: 実践有限要素法 大変形弾塑性解析, コロナ社, 1995.
- 14) 黒田充紀: 変形する物体の客観応力速度について, *土木学会構造工学論文集*, Vol.37(A), No.1, pp.401-408, 1991.
- 15) 宮田真由美, 中井照夫, 檜尾正也, 村上一徳: 微小・有限変形理論に基づく粘土の変形の局所化解析, *土木学会応用力学論文集*, Vol.6, pp.455-465, 2003.
- 16) Asaoka, A. and Noda, T. : Imperfection-sensitive bifurcation of cam-clay under plane strain compression with undrained boundaries, *Soils and Foundations*, Vol.35, No.1, pp.83-100, 1995.
- 17) Higo, Y., Oka, F., Kodaka, T. and Kimoto, S. : A three dimensional elasto-viscoplastic strain localization analysis of water-saturated clay, *Proc. 9th Int. Symp. On Numerical Models in geomechanics*, Ottawa, 25-27, August, 2004, G.N. Pande and S. Pietruszczak eds., Taylor & Francis Group, Balkema, pp.107-114, 2004.
- 18) Fast Lagrangian Analysis of Continua in Three Dimensions, ITASCA International Inc., <http://www.itascacg.com/flac3d/>.
- 19) 桐山貴俊, 福武毅芳: GIMPM を用いた三軸圧縮試験の破壊シミュレーション その1: その1: 解析手法および破壊形態, *土木学会学術講演会概要集*, Vol.68, 2013.
- 20) 桐山貴俊, 福武毅芳: GIMPM を用いた三軸圧縮試験の破壊シミュレーション その2: FDM と GIMPM の比較解析, *土木学会学術講演会概要集*, Vol.68, 2013.
- 21) 桐山貴俊: GIMPM を用いた三軸圧縮試験の破壊シミュレーション, *土木学会論文集 A2(応用力学)*, Vol.69, No.2(応用力学論文集 Vol.16), pp.I\_321-I\_332, 2013.