

二相系動的シミュレーションに適用する Material Point Method

ーグラベルドレーンを設置した液状化地盤を対象としてー

桐山 貴俊 福武 毅芳

(技術研究所)

(技術研究所)

Application of two-phase Material Point Method for ground liquefaction

Takatoshi Kiriyama and Kiyoshi Fukutake

地盤の液状化は大変形を伴う。局所的には基礎の沈下、地下構造物の浮き上がり、広域的には斜面崩壊、側方流動などの現象が挙げられる。大変形を伴う現象を解析的に表現するためには、高度な変形性能を有する数値計算法が求められる。本研究では、数値計算法として粒子法の1つと分類される Material Point Method (MPM) に着目した。Biot の多孔質理論を基に、MPM の数値計算法の枠組みで二相系の運動方程式を離散化した。地盤の液状化を表現しうる構成則を導入し、提案する定式化に基づき数値解析プログラムを作成した。作成したプログラムは、直接法による理論解と比較することで検証を、遠心載荷装置を用いた振動模型実験結果を再現することで妥当性確認を行った。本論文では、MPM における二相系動的シミュレーションに関する定式化、検証、妥当性確認について報告する。

Liquefaction of foundation ground induces large deformations such as settlement of foundation structures, floating of underground structures, slope failures, and lateral spreading. In order to simulate these phenomena, effective numerical methods are needed that use specialized algorithms to account for the large deformations that geomaterials undergo. In this paper, we focus on the particle-based Material Point Method (MPM), into which we introduce Biot's porous media theory. Discretizing the governing equation for a two-phase material according to the MPM framework, we employ the Bowl liquefaction constitutive model for dilatancy and the RO model for the nonlinearity of liquefied geomaterials. Using this proposed framework, we develop a numerical simulator. This simulator is verified by comparing with an exact solution and validated by comparing against the results obtained by centrifuge model testing. The formulation, verification and validation of this newly developed simulator are reported.

1. はじめに

造成宅地の流出、河川・鉄道盛土の崩壊、液状化に伴う側方流動、構造物の浮上・沈下、など地盤災害は過去多くの事例が報告され、これら災害は全て地盤の大変形を伴う事象である。複雑に堆積する自然地盤や土構造物の変形予測は直接解を求めることが難しく、予測手法として数値計算法が用いられてきた。しかしながら、冒頭に述べた変形を伴う事象は、既往の剛塑性または微小変形を仮定した予測手法・数値解析技術では対応することはできない。変形を伴う事象は進行性破壊的な挙動を示す場合が多く、幾何学的非線形性を考慮した手法を用いて評価しなければならない。汎用的に用いられている、有限要素法などの格子法は、変形の進行と共に要素形状が歪み、最終的には計算が破綻する。そのため、変形を考慮した条件では、微細

な要素形状や、極大な大変形解析を実行することが困難である。

近年、有限要素法と同じく連続体を基礎方程式としながら、要素を用いることの無い手法として粒子法が注目され地盤材料への適用性が議論されている^{例えば} 1),2)。著者らは、有限要素法との親和性の高い Material Point Method³⁾ に着目して、その適用性および手法自体の改良を行ってきた⁴⁾⁶⁾。既往の著者らの報告は全応力による地盤の材料非線形性を扱ってきたが、地盤は元来、土骨格、間隙水、間隙空気からなる三相系材料である。既報では土骨格のみを対象としたが、本論文では、まず支配方程式を二相系へ拡張し、その定式化を示す。提案する定式化は、理論解と比較することで検証を、遠心装置を用いたグラベルドレーンを模擬した振動模型実験結果と比較することで妥当性確認を実施したので以下にその内容を示す。

2. 数値計算法

MPMに関連した多相系定式化および数値計算法への離散化は既往の報告がある。例えば二相系弾性材料の衝突挙動を Zhang et al.⁷⁾が、三相系弾塑性材料を組み込んだ盛土の地震時応答挙動を Higo et al.¹⁾が、固相・液相を個別の粒子で定義した二相系弾塑性斜面安定解析を Abe et al.⁸⁾が、三相系弾塑性材料の斜面安定挙動を Bandara and Soga⁹⁾が、それぞれ報告している。構成則まで含めると既報の定式化および離散化は、いずれの報告も個々の目的に応じた定式化がなされている。以降では、はじめに、多孔質理論に基づく固体連続体力学の支配方程式および液状化挙動を考慮しうる構成則について、その定式化を示す。次に、MPMの枠組みにおいて提示した定式化を離散化し、数値解析で実装するための離散化された方程式を導出する。

2.1 地盤材料に適用する多相混合体理論

多孔質理論に基づく固体連続体力学の支配方程式は Biot^{10,11)}により提示され、その後様々な材料へ適用され、地盤材料への適用は Zienkiewics によりなされた。Zienkiewics は、数値計算法として有限要素法を採用し、その離散化手法として種々の手法が提示され、数値計算法として検証と妥当性確認が行われてきた^{例 えば 12)~16)}。本論文では、Zienkiewics が示した二相系地盤における支配方程式を採用する。定式化は $\mathbf{u} - \mathbf{w}$ 定式化とし、MPM 粒子に固相の変位 (\mathbf{u}) および固相に対する液相の相対変位 (\mathbf{w}) を変数として持たせる方法を採用した。

定式化に以下の仮定を設ける。

- ・ 仮定 1 : 運動は固相を基準とし、液相の運動は固相に対する相対運動とする。
- ・ 仮定 2 : 土粒子および間隙流体は非圧縮とし、土骨格の圧縮は間隙流体の移動により生じるものとする。

2.1.1 有効応力の原理 (分応力の概念)

全応力を固相、液相の各応力に分解できるとする。

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^f \quad (1)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}$ は全応力、 $\boldsymbol{\sigma}^s$ は固相応力、 $\boldsymbol{\sigma}^f$ は液相応力である。固相、液相の分応力は、間隙率 (n) を考慮すると次式で表される。

$$\boldsymbol{\sigma}^f = -np\mathbf{I} \quad (2)$$

$$\boldsymbol{\sigma}^s = \boldsymbol{\sigma}' - (1-n)p\mathbf{I} \quad (3)$$

ここに、 $\boldsymbol{\sigma}'$ は有効応力、 p は過剰間隙水圧、 \mathbf{I} は単位行列である。式(1)へ式(2)、式(3)を代入して有効応力の定義式を得る。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \boldsymbol{\sigma}^s + \boldsymbol{\sigma}^f \\ &= \boldsymbol{\sigma}' - (1-n)p\mathbf{I} - np\mathbf{I} \\ &= \boldsymbol{\sigma}' - p\mathbf{I} \end{aligned} \quad (4)$$

2.1.2 質量保存則

Zienkiewics が示した間隙流体、塑性ひずみを考慮した連続式を次式に示す。

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{w}} + \alpha \dot{\varepsilon}_v + \frac{1}{Q} \dot{p} + \frac{\dot{\sigma}_0}{K^s} = 0 \quad (5)$$

ここに、 $\dot{\mathbf{w}}$ は固相に対する液相の見かけの相対速度、 α 、 Q は Biot の定数、 ε_v は体積ひずみ、 $\dot{\sigma}_0$ はクリープ・熱変形を含む塑性ひずみによる応力増分、 K^s は固相の体積弾性係数である。 $\dot{\mathbf{w}}$ 、 α 、 Q は次式で表される。

$$\dot{\mathbf{w}} = n(\mathbf{v}^f - \mathbf{v}^s) \quad (6)$$

$$\alpha = 1 - \frac{K}{K^f} \quad (7)$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{n}{K^f} + \frac{1-n}{K^s} - \frac{1-\alpha}{K^s} \quad (8)$$

ここに、 \mathbf{v}^s 、 \mathbf{v}^f はそれぞれ固相および液相の速度、 K 、 K^f はそれぞれ土骨格および液相の体積弾性係数である。式(7)、式(8)を式(5)に代入することで次式を得る。

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{w}} + \left(\alpha \dot{\varepsilon}_v - \frac{1-\alpha}{K^s} \dot{p} \right) + \frac{1-n}{K^s} \dot{p} + \frac{n}{K^f} \dot{p} + \frac{\dot{\sigma}_0}{K^s} = 0 \quad (9)$$

上式の第二項は有効応力による土骨格の体積変化、第三項は間隙水圧による土粒子の体積変化、第四項は間隙水圧による間隙水の体積変化、第五項は塑性ひずみによる体積変化をそれぞれ表す。地盤材料の場合、 $K \ll K^f$ であることから $\alpha = 1$ と置く。また土粒子の圧縮は考えないことから $K^s = \infty$ と置く。以上の仮定より、地盤材料に用いる連続式として次式を得る。

$$\nabla \cdot \dot{\mathbf{w}} + \dot{\varepsilon}_v + \frac{n}{K^f} \dot{p} = 0 \quad (10)$$

2.1.3 運動方程式

固相、液相の運動方程式は次式で定義される。

$$\bar{\rho}^s \mathbf{a}^s - \mathbf{R} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^s + \bar{\rho}^s \mathbf{b} \quad (11)$$

$$\bar{\rho}^f \mathbf{a}^f + \mathbf{R} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}^f + \bar{\rho}^f \mathbf{b} \quad (12)$$

ここに、 \mathbf{a}^s 、 \mathbf{a}^f はそれぞれ固相、液相の加速度、 \mathbf{b} は体積力を表す。 $\bar{\rho}^s$ 、 $\bar{\rho}^f$ は固相、液相の見かけの密度、 \mathbf{R} は固相、液相の Darcy 則に基づく相互作用項で、それぞれ次式で表される。

$$\bar{\rho}^s = (1-n)\rho^s \quad (13)$$

$$\bar{\rho}^f = n\rho^f \quad (14)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\bar{\rho}^f g}{k^f} \dot{\mathbf{w}} = \frac{n \rho^f g}{k^f} \dot{\mathbf{w}} \quad (15)$$

式(11)に式(3)、式(15)を代入することで、固相の運動方程式として次式を得る。

$$\bar{\rho}^s \mathbf{a}^s = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}' - \nabla \cdot (1-n) p \mathbf{I} + \bar{\rho}^s \mathbf{b} + \frac{\bar{\rho}^f g}{k^f} \dot{\mathbf{w}} \quad (16)$$

続いて、液相の式(12)を液相の見かけの加速度を用いた形式に変更する。式(6)を \mathbf{v}^f について整理して次式を得る。

$$\mathbf{v}^f = \mathbf{v}^s + \frac{\dot{\mathbf{w}}}{n} \quad (17)$$

式(12)に、式(2)、式(15)、式(17)を代入して整理することで、液相の運動方程式として次式を得る。

$$\rho^f \dot{\mathbf{w}}^f = -\nabla \cdot n p \mathbf{I} + \bar{\rho}^f (\mathbf{b} - \mathbf{a}^s) - \frac{\bar{\rho}^f g}{k^f} \dot{\mathbf{w}} \quad (18)$$

2.2 地盤材料の非線形特性

地盤材料の非線形特性として、せん断応力～せん断ひずみ関係として修正 RO モデル^{17),18)}を、せん断変形時に示す土骨格のダイラテンシー特性としておわんモデル¹⁹⁾を採用した。おわんモデルを用いた体積ひずみは次式で表される。

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^s + \varepsilon_v^c \quad (19)$$

ここに右辺第一項はせん断による、第二項は圧密による塑性体積ひずみを表す。

右辺第一項のせん断による塑性体積ひずみはさらに、可逆成分である膨張成分 ε_T と非可逆成分である圧縮成分 ε_G に分解され次式で表される。

$$\varepsilon_v^s = \varepsilon_T + \varepsilon_G \quad (20)$$

$$\varepsilon_T = A \cdot \Gamma^B$$

$$\varepsilon_G = \frac{G^*}{C + D \cdot G^*}$$

ここに、 A 、 B 、 C 、 D はパラメータであり、 Γ 、 G^* は次式で求まる物理量で、それぞれ、合せん断ひずみ、累積せん断ひずみと呼ぶ。

$$\Gamma = \sqrt{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2 + (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2} \quad (21a)$$

$$G^* = \int \sqrt{d\gamma_{xy}^2 + d\gamma_{yz}^2 + d\gamma_{zx}^2 + (d\varepsilon_x - d\varepsilon_y)^2 + (d\varepsilon_y - d\varepsilon_z)^2 + (d\varepsilon_z - d\varepsilon_x)^2} ds \quad (21b)$$

式(19)の右辺第二項は次式で表される。

$$\varepsilon_v^c = \frac{0.434 \cdot C_\alpha}{1 + e_0} \ln \sigma'_m, \quad \alpha = \begin{cases} s & d\sigma'_m > 0 \\ c & d\sigma'_m < 0 \end{cases} \quad (22)$$

ここに、 e_0 は初期間隙比、 σ'_m は平均有効応力（圧縮を正とする）、 C_s は膨潤指数、 C_c は圧縮指数である。式

(22)を式(19)に代入して次式を得る。便利のためにその増分を合わせて示す。

$$\varepsilon_v = \varepsilon_v^s + \frac{0.434 \cdot C_\alpha}{1 + e_0} \ln \sigma'_m \quad (23a)$$

$$d\varepsilon_v = d\varepsilon_v^s + \frac{0.434 \cdot C_\alpha}{1 + e_0} \frac{d\sigma'_m}{\sigma'_m} \quad (23b)$$

次の過程により、塑性ひずみ増分から過剰間隙水圧増分を導出する。過剰間隙水圧増分が土骨格の塑性体積ひずみによる成分と間隙流体の流出入による成分に分解できるとする。前者を非排水成分、後者を排水成分とすると次式を得る。

$$\dot{p} = \dot{p}_{undrain} + \dot{p}_{drain} \quad (24)$$

上式の非排水成分は、全応力が一定とすれば、有効応力の減少分と等しく式(23b)を変形して次式の通り求まる。

$$\dot{p}_{undrain} = -d\sigma'_m = \frac{(1 + e_0)\sigma'_m}{0.434 \cdot C_\alpha} d\varepsilon_v^s \quad (25)$$

非排水を仮定した上式の体積増分による水圧上昇分は、間隙水の流出分だけその上昇が抑えられる。その量は排水による間隙水圧の減少分であり次式で表される。

$$\dot{p}_{drain} = -\frac{(1 + e_0)\sigma'_m}{0.434 \cdot C_\alpha} \nabla \dot{\mathbf{w}} \quad (26)$$

以上より、式(25)、式(26)を式(24)に代入して、おわんモデルを用いた場合の連続式（本論文では圧力増分算定式）を得る。

$$\dot{p} = \frac{(1 + e_0)\sigma'_m}{0.434 \cdot C_\alpha} (-\nabla \dot{\mathbf{w}} + d\varepsilon_v^s) \quad (27)$$

2.3 MPM による離散化

固相、液相の運動方程式である式(16)、式(18)、および連続式である式(27)を MPM の定式化に基づいて離散化する。以降に示す式中にある上添え字 s は固相、 f は液相を示し、それに続く k は計算ステップ数を表す。また格子点物理量は下添え字 g 、粒子物理量は下添え字 p で表す。

2.3.1 質量の算出

はじめに次式より格子点における固相および液相の質量を算出する。 m_g^s 、 m_g^f 、 M_g^f 、 m_p^s 、 m_p^f 、 S_p 、 n_p はそれぞれ、格子点における固相および液相の質量、粒子質量を液相で代表させた質量、粒子の固相および液相の質量、粒子位置における形状関数、格子内にある粒子数、である。

$$m_g^{s,k} = \sum_{i=1}^{n_p} m_{p,i}^s S_{p,i}^k \quad (28)$$

$$m_g^{f,k} = \sum_{i=1}^{n_p} m_{p,i}^f S_{p,i}^k \quad (29)$$

$$M_g^{f,k} = \sum_{i=1}^{n_p} M_{p,i}^f S_{p,i}^k \quad (30)$$

ここに、 m_p^s 、 m_p^f 、 M_p^f は次式で算出される。

$$m_p^s = \bar{\rho}^s V_p = (1-n)\rho^s V_p \quad (31)$$

$$m_p^f = \bar{\rho}^f V_p = n\rho^f V_p \quad (32)$$

$$M_p^f = \rho^f V_p \quad (33)$$

2.3.2 運動の既述

はじめに固相の運動方程式を離散化する。式(16)の第一項、第二項は内力項であり、粒子応力から次式より格子点内力を算出する。

$$f_g^{s,int,k} = - \sum_{i=1}^{n_p} V_{p,i} G_{p,i}^{T,k} (\sigma'_{p,i}{}^k - \sigma'_{p,i}{}^{ini}) \quad (34)$$

$$+ (1-n) \sum_{i=1}^{n_p} V_{p,i} G_{p,i}^{T,k} (p_{p,i}^k - p_{p,i}^{ini})$$

ここに、 $f_g^{s,int}$ 、 V_p 、 G_p 、 σ'_p 、 $\sigma'_{p,i}{}^{ini}$ 、 p_p 、 $p_{p,i}^{ini}$ はそれぞれ、格子点内力、粒子体積、形状関数の導関数、粒子応力、粒子初期応力、間隙水圧、初期間隙水圧である。式(16)の第三項は物体力項であり、次式より格子点外力を算出する。

$$f_g^{s,ext,k} = m_g^{s,k} \cdot b^k \quad (35)$$

ここに、 b^k 、 $f_g^{s,ext}$ はそれぞれ物体力係数、格子点外力である。内力と外力の和は運動を励起する駆動力として作用する。この駆動力を $f_g^{s,drive}$ と既述し以下の通り定義する。

$$f_g^{s,drive,k} = f_g^{s,int,k} + f_g^{s,ext,k} \quad (36)$$

式(16)の第四項は Darcy 則に従う固相、液相の相互作用力で、間隙流体の浸透による減衰項に相当し、次式により算出する。

$$f_g^{s,damp,k} = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{m_{p,i}^{f,k} g}{k_p^f} \dot{w}_p^f S_{p,i}^k \quad (37)$$

ここに、 k^f は透水係数、 \dot{w}^f は固相に対する液相の見かけの相対速度、 $f_g^{s,damp}$ は格子点減衰力である。

以上より、各格子点における固相の運動方程式が自由度毎に立てられ、格子点加速度 a_g^s を次式より算出できる。

$$a_g^{s,k} = \frac{1}{m_{s,k}^s} (f_g^{s,int,k} + f_g^{s,ext,k} + f_g^{s,damp,k}) \quad (38)$$

また駆動力を用いて次式のようにも表される。

$$a_g^{s,k} = \frac{1}{m_{s,k}^s} (f_g^{s,drive,k} + f_g^{s,damp,k}) \quad (39)$$

次に液相の運動方程式を離散化する。式(18)の第一項は内力項であり、粒子間隙圧力から次式より格子点内力($f_g^{f,int}$)を算出する。

$$f_g^{f,int,k} = n \sum_{i=1}^{n_p} V_{p,i} G_{p,i}^{T,k} (p_{p,i}^k - p_{p,i}^{ini}) \quad (40)$$

式(18)の第二項は物体力項であり、次式より格子点外力($f_g^{f,ext}$)を算出する。

$$f_g^{f,ext,k} = m_g^{f,k} \cdot (b^k - a_g^{s,k}) \quad (41)$$

式(18)の第三項は Darcy 則に従う固相、液相の相互作用力で、間隙流体の浸透による減衰項に相当し、次式により算出する。

$$f_g^{f,damp,k} = - \sum_{i=1}^{n_p} \frac{m_{p,i}^{f,k} g}{k_p^f} \dot{w}_p^f S_{p,i}^k \quad (42)$$

以上より、各格子点における固相の運動方程式が自由度毎に立てられ、格子点における見かけの相対加速度 \dot{w}_g^f を次式より算出できる。

$$\dot{w}_g^{f,k} = \frac{1}{M_{g,k}^s} (f_g^{f,int,k} + f_g^{f,ext,k} + f_g^{f,damp,k}) \quad (43)$$

2.3.3 粒子座標の更新

粒子の座標を次式より算出する。

$$x_p^{k+1} = x_p^k + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{n_g} v_{g,i}^{s,k} S_{p,i}^k \quad (44)$$

ここに、 x 、 v_g 、 Δt 、 n_g は、粒子座標、格子点速度、時間刻み、粒子が所属する格子の頂点数、である。粒子変位(u)を次式より算出する。

$$u_p^{k+1} = u_p^k + \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{n_g} v_{g,i}^{s,k} S_{p,i}^k \quad (45)$$

粒子加速度(a_p)を次式から算出する。

$$a_p^k = \sum_{i=1}^{n_g} a_{g,i}^{s,k} S_{p,i}^k \quad (46)$$

粒子速度(v_p)を次式から算出する。

$$v_p^{k+1} = v_p^k + \Delta t \cdot a_p^k \quad (47)$$

固相の格子点速度(v_g^s)を次式から算出する。

$$v_g^{s,k+1} = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{S_{p,i}^k m_{p,i}^s}{m_{s,k}^s} v_p^{k+1} \quad (48)$$

粒子のひずみ(ε_p)を次式から算出する。

$$\Delta \varepsilon_p^{k+1} = \frac{\Delta t}{2} \cdot \sum_{i=1}^{n_p} \left(G_{p,i}^{k+1} v_g^{s,k+1} + (G_{p,i}^{k+1} v_g^{s,k+1})^T \right) \quad (49a)$$

$$\varepsilon_p^{k+1} = \varepsilon_p^k + \Delta \varepsilon_p^{k+1} \quad (49b)$$

ここに、 $\Delta \varepsilon_p$ は Δt 間の粒子ひずみ増分である。

粒子応力 σ_p を次式から算出する。

$$\Delta \sigma_p^{k+1} = K \cdot \Delta \varepsilon_p^{k+1} \quad (50a)$$

$$\sigma_p^{k+1} = \sigma_p^k + \Delta \sigma_p^{k+1} \quad (50b)$$

ここに、 K は要素剛性マトリックス、 $\Delta \sigma_p$ は Δt 間の粒子応力増分である。

粒子位置における液相の見かけの相対加速度(\dot{w}_p^f)を次式から算出する。

$$\dot{w}_p^k = \sum_{i=1}^{n_g} \dot{w}_{g,i}^k S_{p,i}^k \quad (51)$$

粒子位置における液相の見かけの速度(\dot{w}_p^f)を次式から算出する。

$$\dot{w}_p^{k+1} = \dot{w}_p^k + \Delta t \cdot \ddot{w}_p^k \quad (52)$$

液相の格子点速度(\dot{w}_g^f)を次式から算出する。

$$\dot{w}_g^{k+1} = \sum_{i=1}^{n_p} \frac{S_{p,i}^k m_{p,i}^f}{m_{g,i}^{f,k}} \dot{w}_p^{k+1} \quad (53)$$

2.3.4 連続式

粒子からの間隙水の流出量は次式で表される。

$$\Delta t \cdot \nabla \dot{w}_p^k = \Delta t \cdot \sum_{i=1}^{n_p} G_{p,i}^k \dot{w}_g^k \quad (54)$$

式(27)の増分表示に上式を代入することで、離散形の間隙水圧増分として次式を得る。

$$\Delta p = -\frac{K^f}{n} (\Delta t \cdot \nabla \dot{w}_p^k - \Delta \varepsilon_v^{s,k}) \quad (55)$$

ここに、 $\Delta \varepsilon_v^s$ は圧縮を正とした。

3. 一次元理論解に基づく検証解析

提案する二相系定式化の正しさを確認する目的で、検証解析を実施した。検証内容は直接法による理論解が存在する問題を対象とした。具体的には、微小変形条件下における静的・動的弾性応答問題を対象とする。静的問題に対しては Terzaghi の 1 次元圧密理論²⁰⁾、動的問題に対しては Simon の 1 次元過渡応答²¹⁾を用いた。いずれも直接法による理論解である。地盤材料の液状化時挙動(応力~ひずみ関係、ダイラタンシー特性)用に採用した修正 RO モデル、おわんモデルに関しては要素試験において構成モデルの検証はなされている。そのため、

表-1 解析条件と理論解の対応

	static	dynamic
small deformation	Terzaghi ID consolidation theory	Simon ID transient response
large deformation	Mikasa, Gibson ID consolidation theory	none

材料非線形問題に関しては、本論文では検証対象としない。幾何学的非線形(大変形)時における直接解として、静的問題では三笠²²⁾あるいは Gibson²³⁾の理論解が存在し、動的問題では存在しない。本論文では大変形下の検証は対象とせず、以降では微小変形時の静的・動的問題に対する検証結果を示す。地盤材料に対する直接法に基づく理論解を表-1に示す。

3.1 検証例題1: Terzaghi の一次元圧密理論

Terzaghi は地盤の一次元圧密挙動を熱伝導方程式との類似性を応用し、上端排水、下端非排水の条件の下、過剰間隙水圧(p)および圧密度(U)の直接解として次式を求めた。定数の詳細は参考文献²⁴⁾に譲る。

$$p = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \exp(-\alpha_n^2 T_v) \cos \alpha_n Z \quad (56)$$

$U(T_v)$

$$= 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \exp \left\{ -\left(\frac{2n+1}{2} \pi \right)^2 T_v \right\} \quad (57)$$

Terzaghi の一次元圧密理論に対応する、深度 10(m)、1 粒子当たりの支配幅 0.1(m)の検証用解析モデルを作成した。固相、液相共に下端固定、上端自由とした。外力として地表面に作用する接地圧(σ)は、格子点荷重として載荷し、収束計算を減らす目的で、全粒子に初期応力として接地圧と同じ過剰間隙水圧($P_0 = \sigma$)を付与した。解析条件と共に作成した解析モデルを図-1に示す。解析に用いた地盤材料の物性値を表-1に、解析条件を表-2に示す。以上の条件の下に実施した再現解析結果として、接地圧で正規化した過剰間隙水圧分布および地表面変位による圧密度を図-2(a)、(b)にそれぞれ示す。図-2によれば、過剰間隙水圧、圧密度ともに理論解、解析解は良く一致している。提案する二相系定式化で静的な圧密、浸透問題を正しく解くことができることが示された。

表-2 Terzaghi の1次元圧密理論の再現解析に用いた物性値

E (kPa)	ν	ρ (g/cm ³)	ρ_f (g/cm ³)	K_f (kPa)	n	k (m/s)
10000	0.3	2.2	1.0	2.2e6	0.2	0.0005

表-3 Terzaghi の1次元圧密理論の再現解析に用いた解析条件

dt (s)	Total Steps	Analysis Time(s)	σ (kPa)	p_0 (kPa)
2.5e-5	1e8	2500	2000.0	2000.0

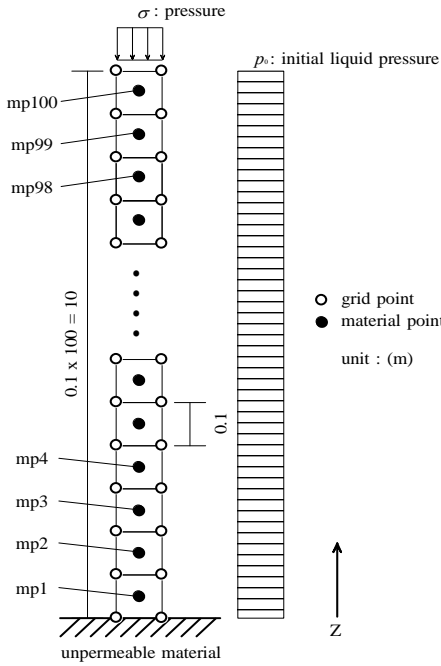
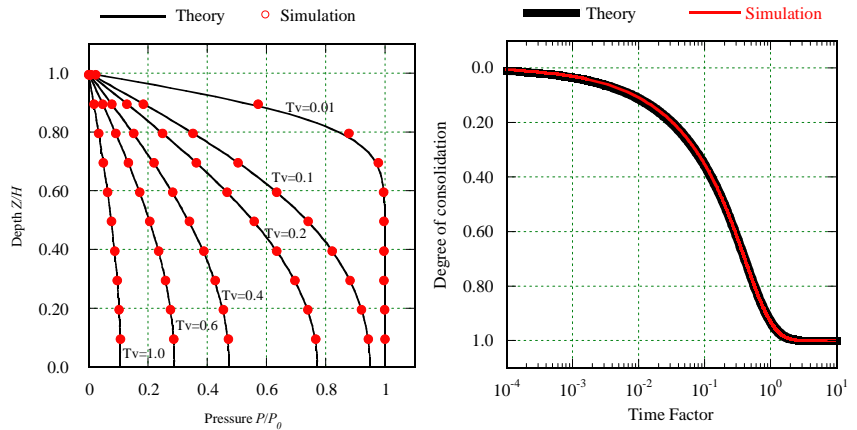


図-1 Terzaghi の1次元圧密理論を対象とした解析モデルおよび条件



(a) 過剰間隙水圧の深度分布

(b) 圧密度の時刻歴

図-2 Terzaghi の1次元圧密理論の再現解析結果

3.2 検証例題2: Simon の一次元過渡応答理論

Simon et al.は不可能と考えられていた二相混合体の理論解を、1次元無限地盤に対して Laplace 変換を用いることで得た。Simon et al. が導いた液相の固相に対する相対変位 (w) および固相変位 (u) を次式に示す。定数の詳細は参考文献 25)および 26)に譲る。

$$w = w(\xi, \tau) = \frac{\alpha}{(1 - \alpha\beta)\sqrt{a}} \times \int_0^\tau f(\tau - \tau_b) e^{-\frac{b\bar{\tau}}{2a}} I_0 \left[\frac{b\sqrt{(\bar{\tau} - a\xi^2)}}{2a} \right] 1(\bar{\tau} - \xi\sqrt{a}) d\bar{\tau} \quad (58)$$

$$u = u(\xi, \tau) = - \int_0^\tau f(\tau - \tau_b) 1(\bar{\tau} - \xi) d\bar{\tau} - \beta w(\xi, \tau) \quad (59)$$

$$\xi = \frac{\gamma_f x}{\rho k V_c}, \quad \tau = \frac{\gamma_f t}{\rho k} \quad (60)$$

また各変数は次式により求まる。

$$V_c = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu + \alpha^2 Q}{\rho}}, \quad (61)$$

$$\beta = \frac{\rho_f}{\rho}, \quad \gamma = \frac{\beta}{n}, \quad a = \frac{\gamma - \beta^2}{\kappa - \beta^2}$$

式中の $f(\tau)$ 、 I_0 、 $1(\tau)$ はそれぞれ表層における外力関数、0次の修正 Bessel 関数、単位ステップ関数である。式(58)、(59)は積分を直接実行できないので数値積分を実施し理論解を求める。Simon et al.が求めた外力関数を表-4に示す。

格子幅 0.05(m)、深度 100(m)、の無限地盤を検証用解析モデルとして作成した(図-3)。各格子に粒子一つを配置した。時刻歴荷重は地表の格子点に載荷し、格子点における固相変位および液相の固相に対する相対変位を解析的に求めた。解析に用いた外力関数の定数、地盤材料の物性値および解析条件を、表-5、表-6、表-7にそれぞれ示す。以上の条件の下に実施した再現解析結果を Simon の論文に基づき正規化し、正規化した固相および液相の固相に対する相対変位の時刻歴を図-4(a)~(f)にそれぞれ示す。図-4によれば、正規化された固相変位および液相の固相に対する相対変位の理論解、解析解は良く一致している。提案する二相系定式化で動的な圧密、浸透問題においても正しく解くことができることが示された。

4. 遠心模型実験による妥当性確認

提案する二相系定式化の地盤材料への適用性を確認する目的で、妥当性確認実験を実施した。ここでは、ドレ

表-4 外力関数


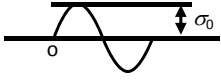
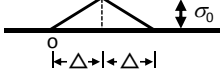
Load case	Applied surface traction	$F(t)$
1	Step: 	$\sigma_0 I(t)$
2	Sine: 	$\sigma_0 \sin(\omega t)$
3	Spike: 	$\sigma_0 t / \Delta, 0 < t < \Delta$ $\sigma_0 (t - 2\Delta) / \Delta, \Delta < t < 2\Delta$

表-5 外力関数に用いた定数

σ_0 (kPa)	ω (1/s)	Δ (s)
1.0	62.83	0.024

表-6 Simonの1次元過渡応答理論の再現解析に用いた物性値

E (kPa)	ν	ρ (kg/m ³)	ρ_f (kg/m ³)	K_f (kPa)	n	k (m/s)
3.0	0.2	0.306	0.2977	39.99	0.333	0.01425

表-7 Simonの1次元過渡応答理論の再現解析に用いた解析条件

dt (s)	Total Steps	Analysis Time(s)
0.0001	10000	1.0

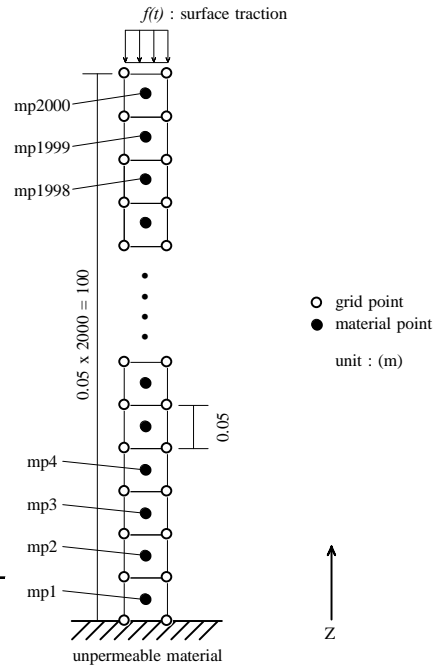


図-3 Simonの1次元過渡応答理論を対象とした解析モデルおよび条件

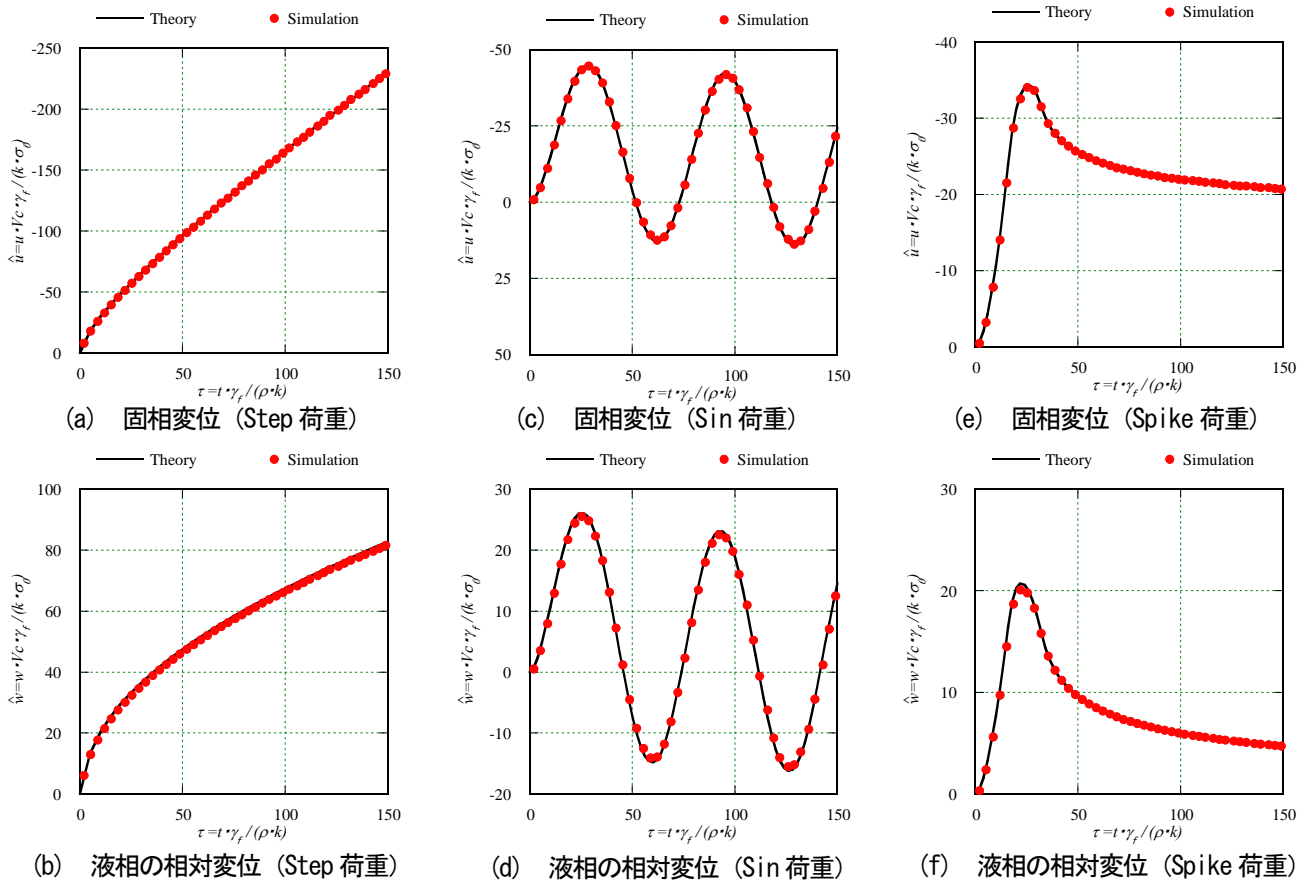


図-4 Simonの1次元過渡応答理論の再現解析結果

ーンを設置した場合の過剰間隙水圧の上昇および消散挙動に着目した。

ドレーンを設置した液状化地盤に対する研究は、過去にも類似実験、数値解析が報告されている^(例えば27,28)。いずれもドレーン効果に着目した実験と再現解析であり、数値計算法の妥当性確認を目的としていない。本実験では、定式化の妥当性を示すことを目的としており、数値解析実施にあたり、可能な限り解析条件に仮定やモデル化が少なくなるよう配慮し実験を実施した。

4.1 遠心模型実験概要

遠心模型実験に用いた土槽は、加振（アーム回転）方向 79.5cm、加振直交方向 34.5cm、高さ 39.4cm のせん断土槽である（図-6、図-7）。液状化地盤として珪砂7号、基盤およびドレーン材料として珪砂3号を用いた。珪砂7号および珪砂3号の室内材料試験結果を図-8～10、表-8に示す。模型地盤は、基盤を突き固めによる作成後、砂捲き器により珪砂7号を、ドレーン設置位置にはケーシングを用いて珪砂3号を堆積させた。ドレーンを設置しない場合の挙動を観察する目的で、液状化地盤のみの模型地盤（無対策地盤）による実験も実施した。解析結果と比較する目的で、地盤内に加速度計、水圧計を設置した。地盤材料の初期剛性を測定する目的でベンダーエレメントを設置した。計測器配置位置を図-6、図

-7に示す。入力地震波は臨海波とし、各模型地盤とも目標最大加速度が100Gal、200Galの2ケース実施した。以上を整理して実験ケースを表-9に示す。いずれの実験ケースも遠心加速度30g場で実施し、間隙流体としてシリコンオイル（30cs）を用いて飽和地盤を作成した。以後の検証解析とはプロトタイプで比較する。

4.2 1次元応答結果

ドレーンを設置しない無対策の実験ケースを対象に1次元応答解析を実施した。解析モデルとして、土槽中央地盤を抽出した1次元の解析モデルを作成した（図-5）。作成した解析モデルは、計算格子幅は1(m)とし、各計算格子に粒子1つを配置した。側方は繰り返し境界、底面は入力加速度による拘束条件を付与した²⁹⁾。解析に用いる物性値は基本的に室内土質試験結果に基づく。せん断剛性は、遠心加速度上昇時にベンダーエレメントを用いて計測したせん断波速度 (V_s) の拘束圧依存性を計測した記録に基づく（図-8）。修正ROモデル、おわんモデルパラメータはそれぞれ動的変形試験および液状化強度試験結果（図-9、図-10）から同定した。図-10に解析で用いる液状化強度曲線を合わせて示す。

無対策地盤における過剰間隙水圧および加速度の時刻歴を図-11、図-12に実測値と解析値を合わせて示す。過剰間隙水圧グラフは水圧の上昇過程、消散過程を確認

表-8 地盤材料の物理定数

	symbol	unit	Value	
Geomaterial	-	-	silica No.3	silica No.7
mean grain size	D_{50}	mm	2.100	0.147
specific gravity of soil particle	G_s	-	2.64	2.64
minimum density	ρ_{min}	g/cm^3	1.33	1.21
maximum density	ρ_{max}	g/cm^3	1.59	1.54
maximum void ratio	e_{max}	-	0.980	1.185
minimum void ratio	e_{min}	-	0.655	0.712
dry density	ρ_d	g/cm^3	1.60	1.35
relative density	D_r	%	100	50
void ratio	e	-	0.647	0.950
porosity	n	-	0.393	0.487
saturated density	ρ_{sat}	g/cm^3	1.99	1.84

表-9 実験ケース

Case.No	Drain Installment	Base Acceleration (Gal)
G-100	None	100
G-200	None	200
D-100	Installed	100
D-200	Installed	200

表-10 再現解析に用いた地盤材料の物性値

Domain	ν	ρ (g/cm^3)	k (m/s)	porosity n	RO model			Bowl model						
					G_{oi}	$\gamma_{0.5i}$	h_{max}	A	B	C	D	X_l	$Cc/(1+e_0)$	$Cs/(1+e_0)$
Silica No.7	0.33	1.84	3.50E-04	0.487	4235	5.775E-05	0.27	-0.2	1.4	5	40	0.13	0.007	0.006
Silica No.3	0.33	1.99	5.00E-03	0.393	11815	5.983E-05	0.25	-3.0	1.4	25	50	0.30	0.0051	0.005

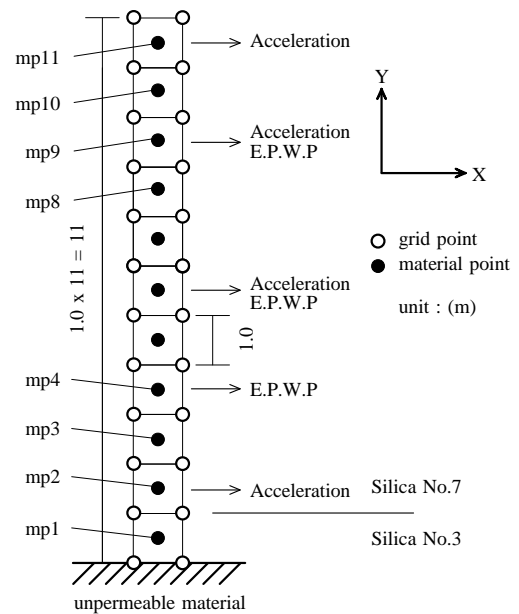
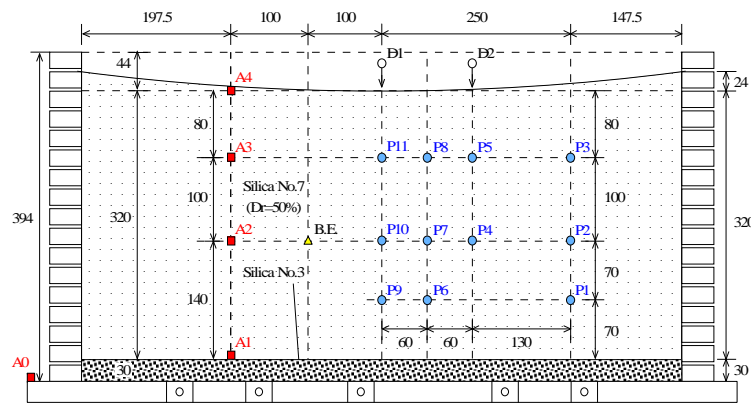
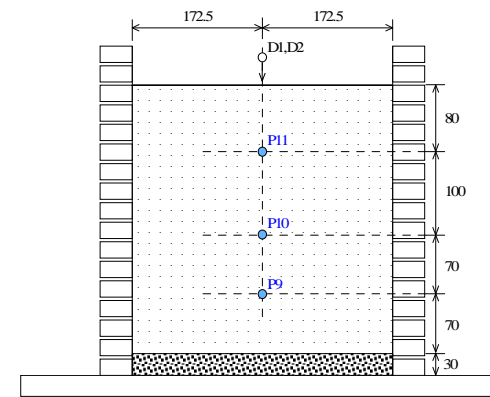


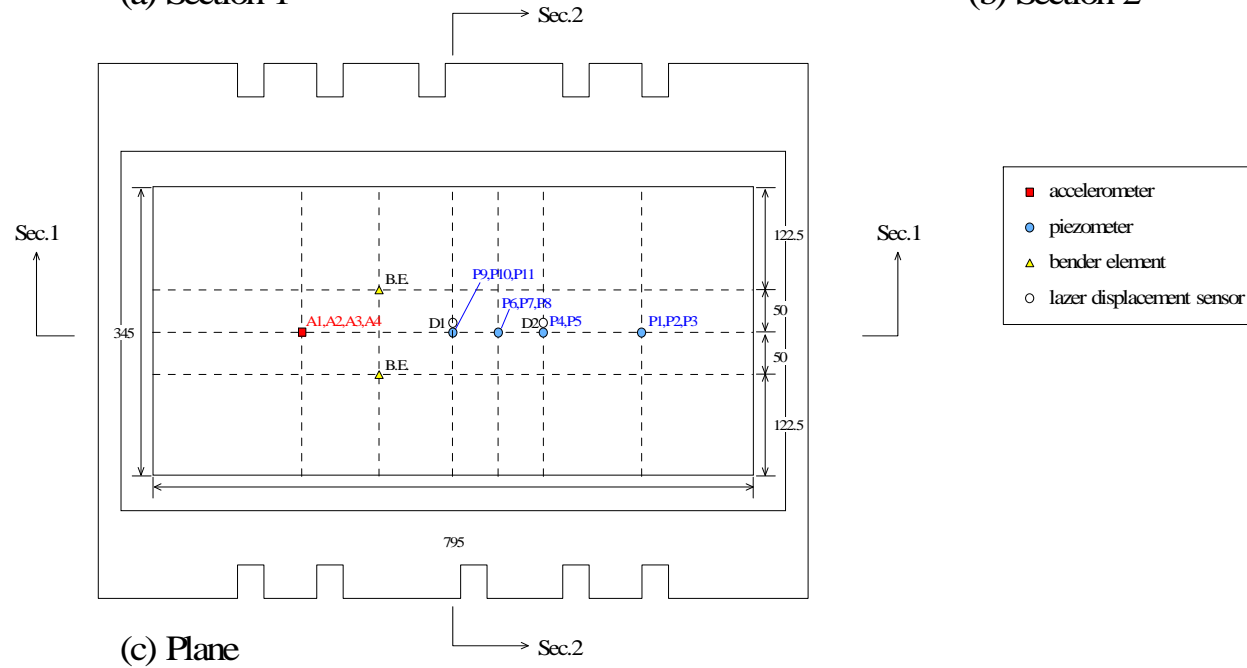
図-5 無対策地盤に用いた解析モデル



(a) Section 1

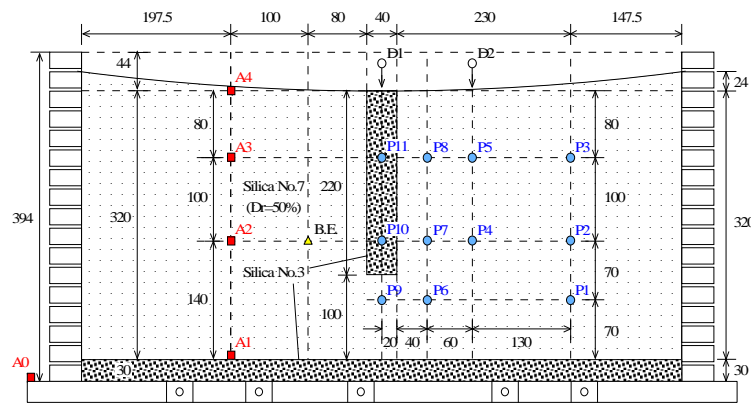


(b) Section 2

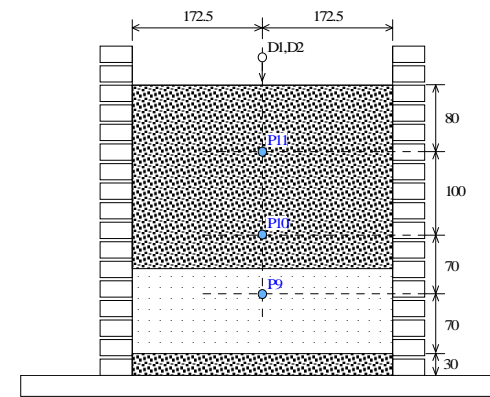


(c) Plane

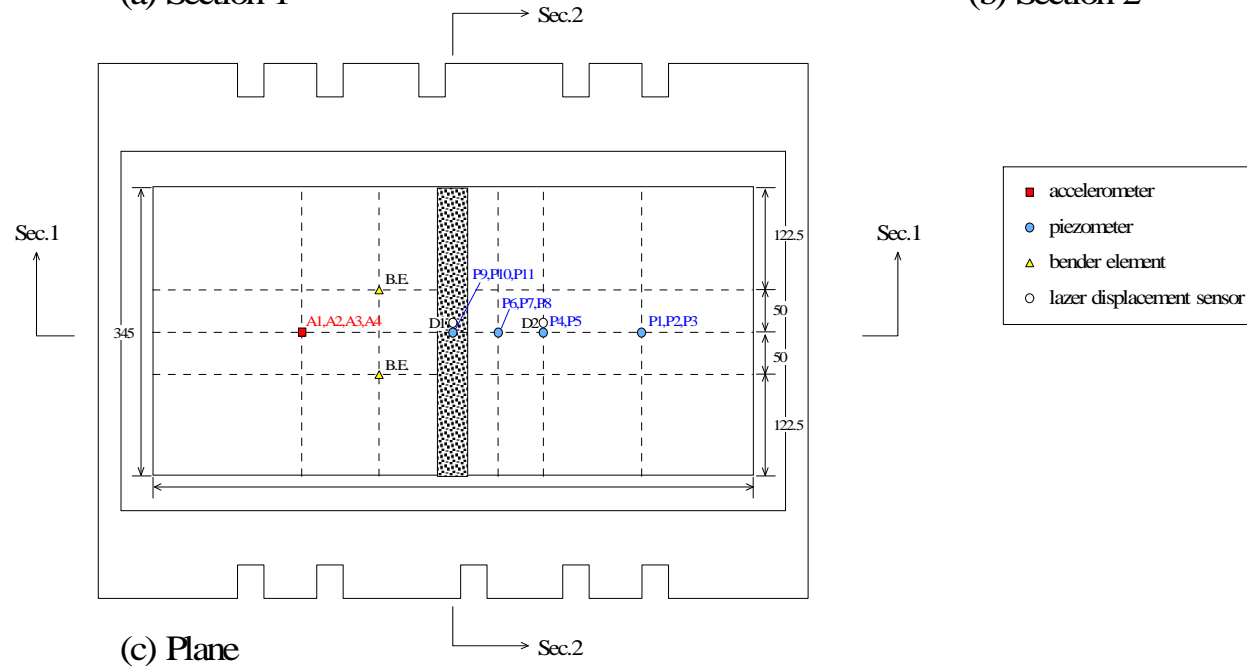
図-6 計測器配置図 (無対策: ドレーン無し)



(a) Section 1

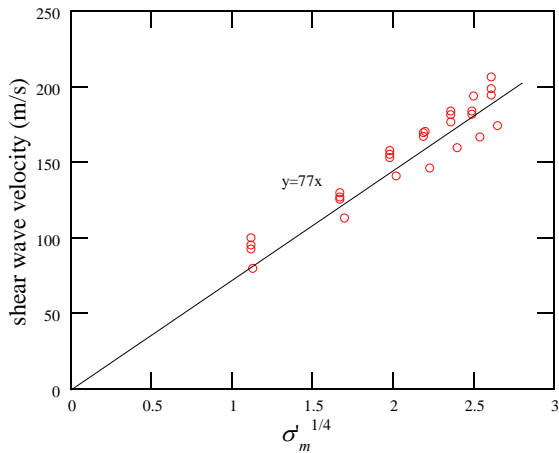


(b) Section 2

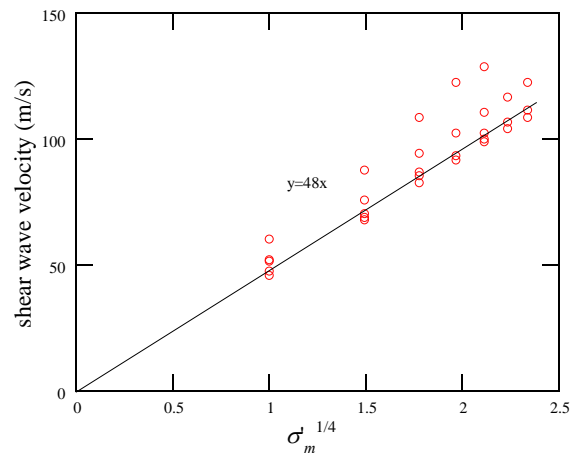


(c) Plane

図-7 計測器配置図 (対策: ドレーン有り)

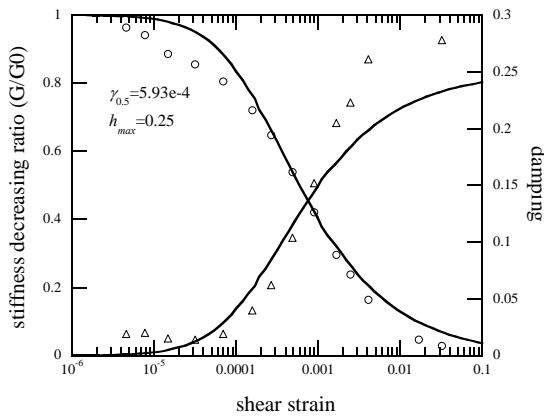


(a) 珪砂3号

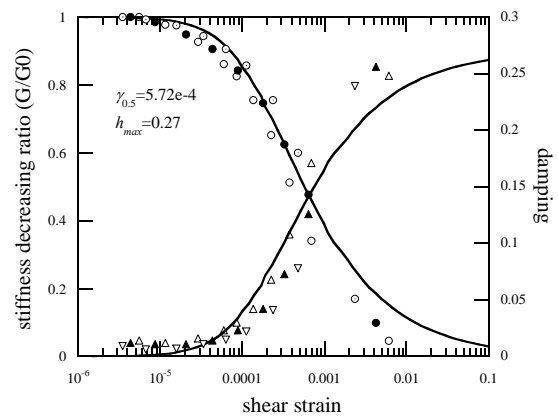


(b) 珪砂7号

図-8 せん断波速度の拘束圧依存性 (ベンダーエレメント)

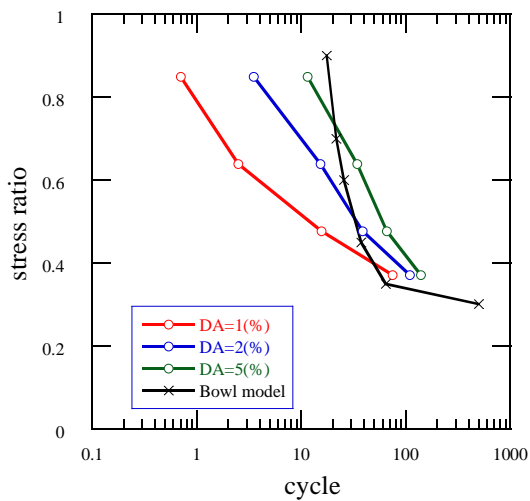


(a) 珪砂3号

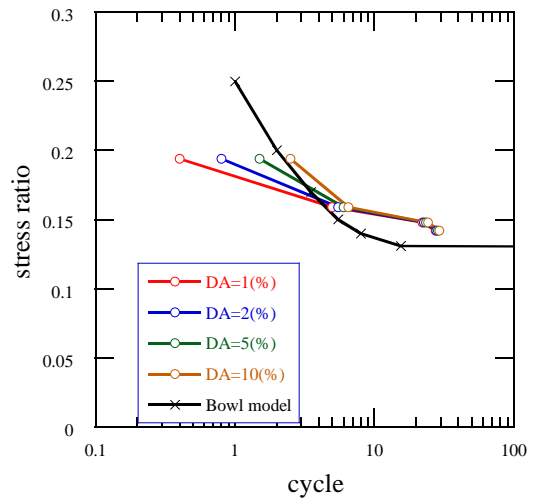


(b) 珪砂7号

図-9 動的変形試験結果 (中空ねじり)



(a) 珪砂3号



(b) 珪砂7号

図-10 液状化強度試験結果 (繰返三軸)

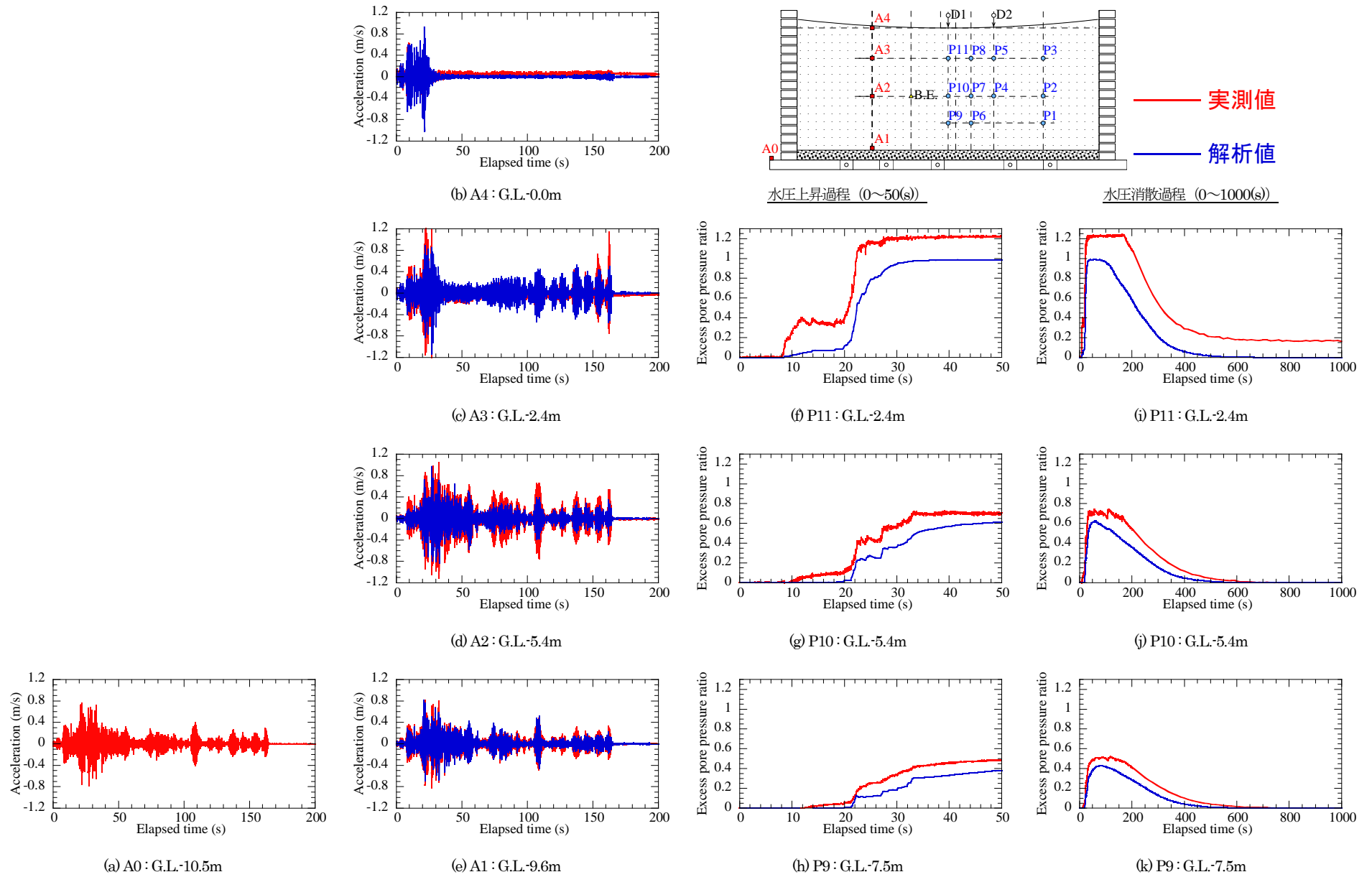


図-11 加速度((a)~(e))および過剰間隙水圧比((f)~(k)) (G-100: ドレーン無し、100Gal 加振)

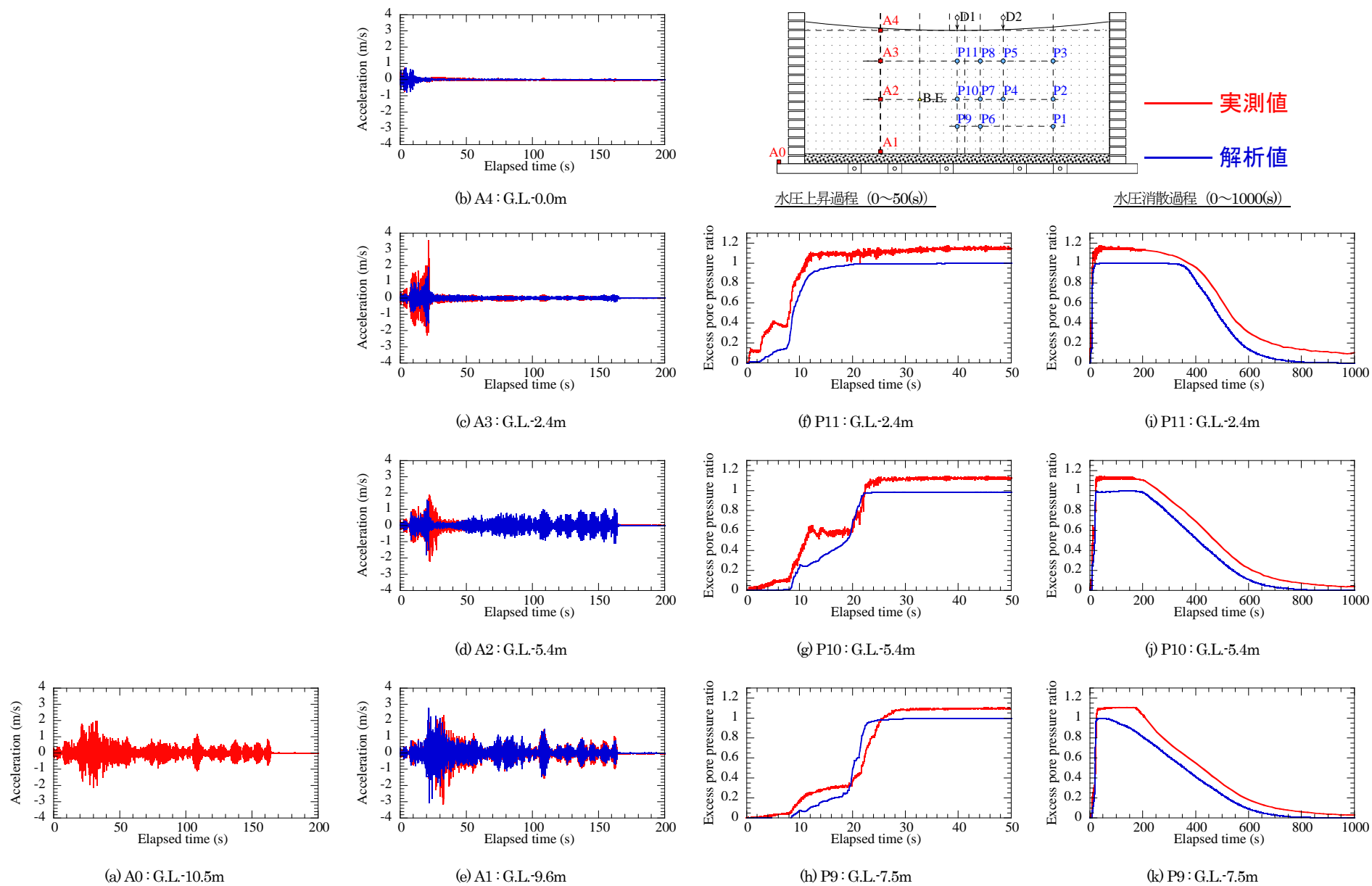


図-12 加速度((a)~(e))および過剰間隙水圧比((f)~(k))の時刻歴 (G-200 : ドレーン無し、200Gal 加振)

できるよう、経過時間を調整したグラフを左右に配置している。図-11(a)、図-12(a)に示す土槽の加速度記録(A0)は数値解析における入力加速度である。図-11、図-12によれば100Gal加振、200Gal加振共に、過剰間隙水圧が段階的に上昇していく過程は、解析結果は実測値を良く再現している。図-11、図-12の過剰間隙水圧の消散過程に着目すれば、解析値の方が消散開始時間が早く差異が認められるものの、実測および解析結果の、消散勾配は良く一致している。以上より、提案手法は過剰間隙水圧の上昇過程、消散過程を再現しうる手法であることが確認できた。

透水係数は、珪砂3号は試験結果そのものであるが、珪砂7号は室内試験結果より5倍程度大きい値を設定している。室内試験結果より得られた値を使用した場合、解析結果は実験を再現できない。定式化上は適切な透水係数を設定することで、予測解析を実施することができるが、模型地盤において透水係数が調整パラメータとなっていることは、実用化を考える上での定数設定の困難さを示している。

実測値において過剰間隙水圧比が1.0を越える記録が見られる。これは、加振時、地盤の液状化に伴い、1)水圧計が地盤に対し相対的に沈下する、2)上向き浸透流により間隙水が上昇することで間隙水に対し地盤が相対的に沈下する、ことが原因である。図-11(i)、図-12(i)では水圧消散後に過剰間隙水圧の残留成分が確認できる。これは上記理由による計測誤差であり、加振中もこの残留分だけ大きな水圧を観測していることになる。最終的な残留分は実測値から把握できるが、加振中のどの段階

で、残留成分が発生するか、すなわち、水圧計と地盤または水圧計と間隙水それぞれとの相対変位が発生するか、は把握することができない。そのため、過剰間隙水圧記録は残留分による補正は行わなかった。

4.3 2次元応答結果

ドレーンを設置した実験ケースを対象に2次元応答解析を実施した。解析モデルを図-13に示す。2次元解析モデルは1次元解析モデルを水平方向に連結したモデルであり、計算格子幅は1(m)とし、各計算格子に粒子1つを配置した。図中に示す青色粒子は水圧計記録、赤色粒子は加速度記録とそれぞれ比較する位置を示している側方は繰り返し境界とし、底面に入力加速度による拘束条件を付与し、採用した物性値も1次元解析と同条件である。過剰間隙水圧の上昇時および消散時の時刻歴結果を図-14、図-15(100Gal加振)、図-17、図-18(200Gal加振)に実測値と共に示す。加速度の時刻歴結果を図-16(100Gal加振)、図-19(200Gal加振)にそれぞれ示す。

はじめに100Gal加振について実測値と解析値を比較する。図-14によれば、同一深度であり最も浅いP3、P5、P8の実測値は過剰間隙水圧比が1.0に到達するが、より深部の水圧計では水圧比は1.0へ至っていない。このことから表層のみ液状化したことが分かる。図-16に示す加速度記録を見ても、表層に設置したA4の応答加速度が20秒付近から低下しており、液状化に伴う応答加速度の低減状況は水圧記録と対応した結果である。ドレーン内では排水効果により浅い位置(P11)において

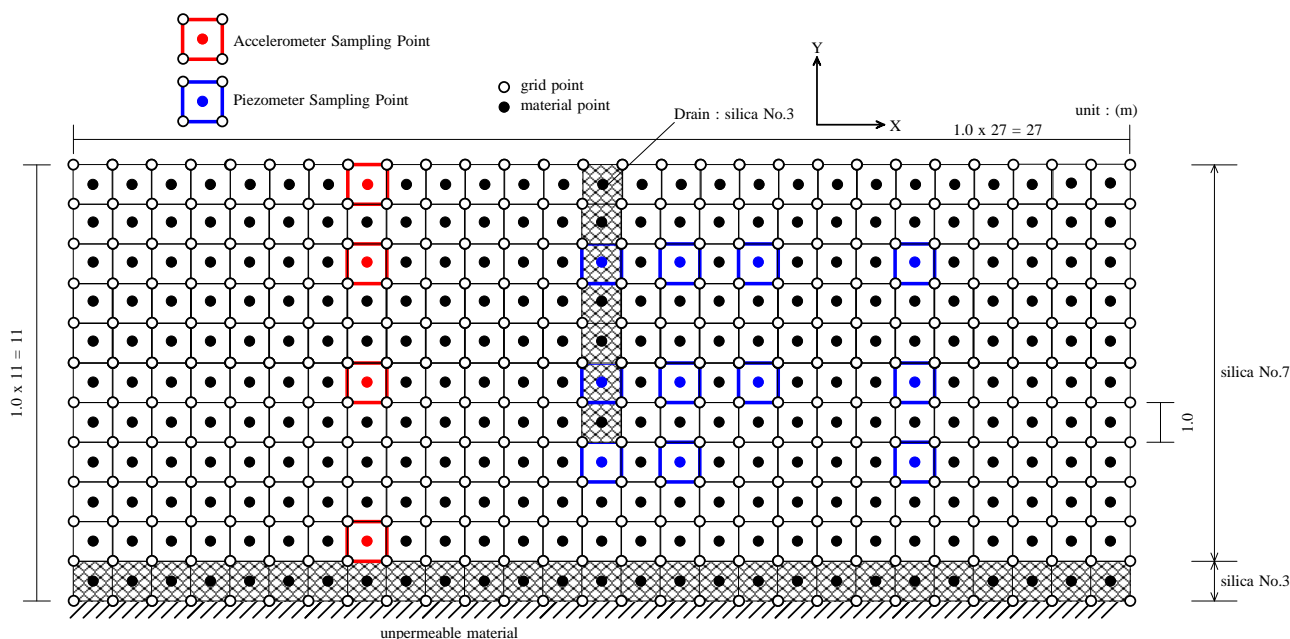


図-13 ドレーン設置地盤に用いた解析モデル

も液状化には至っていない。

図-14に示す水圧上昇時の結果を実験・解析で比較すると、ドレーンから遠方の記録(P1、P2、P3)は実測値の方が若干立ち上がり早いものの実測値、解析値とも良く一致している。ドレーン内の浅い位置(P11)において実測値は水圧の上昇と消散を繰り返しているが、解析結果は一貫して上昇傾向であり、両者に差異が認められる。図-15に示す水圧消散時の結果は、全体として、実測値に細かな振動成分が認められるものの、消散開始時刻や消散勾配は良く一致している。同一深度の水圧計記録であっても、遠方地盤からドレーンに近づくに連れて水圧上昇が抑制され、排水時間が短くなっている点も実験、解析結果とも良い一致を示している。

続いて200Gal加振について実測値と解析値を比較する。図-17によれば、ドレーン内の水圧記録(P10、P11)を除いたその他の水圧計は水圧比が1.0へ達しており、ドレーン以外は全層液状化したと判断できる。図-19に示す加速度記録においても、基盤記録(A1)より浅い位置で液状化により20秒付近から応答加速度が低下し、水圧計記録と対応した結果を示す。ドレーン内の水圧計記録(P10、P11)は100Gal加振に比べ大きな水圧比を示すものの200Gal加振でも液状化には至っていない。

図-17より過剰間隙水圧上昇時を実験・解析を比較すると、ドレーンを除く水圧記録は実測値、解析値とも概ね一致している。深部において時刻10~20(s)における水圧上昇過程に差異が認められる。実験では深部の液状化度合いが強く早い段階で過剰間隙水圧が発生し上向きに伝播したものと推測される。100Gal加振同様、ドレーン内(P10、P11)において、実測値は水圧の上昇と消散を繰り返しているが、解析結果は一貫して上昇傾向であり、両者に差異が認められる。図-18によれば、水圧消散時の結果は、消散開始時刻、消散勾配は良く一致している。200Gal加振の場合、生成された過剰間隙水圧の値が大きく、液状化継続時間が100Gal加振に比べて長い。同一深度の過剰間隙水圧を比べるとドレーンに

近づく程、水圧消散が早いことが顕著に確認できる。水圧消散過程における時刻歴結果は実験、解析結果とも良い一致を示している。

5. まとめ

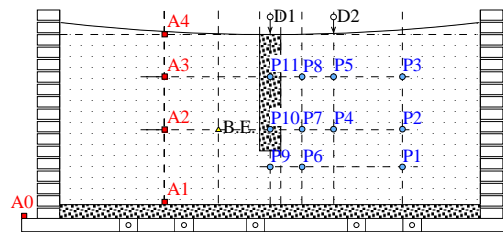
二相系地盤を考慮するMaterial Point Methodの定式化を示した。提案した定式化は静的および動的な理論解と比較した。過剰間隙水圧の時刻歴、変形結果は理論解、解析解は良く一致し、定式化の正しさを示す結論を得た。

次に提案する定式化の実現象への適用性を確認する目的で、地盤の液状化時挙動を考慮する構成則(修正ROモデル+おわんモデル)を組み込んだ解析プログラムを作成した。ドレーンを設置した液状化地盤の振動実験結果とその再現解析を通して定式化および解析プログラムの妥当性を確認した。無対策、ドレーン設置地盤のそれぞれの過剰間隙水圧の上昇時および消散時の時刻歴応答は実験値、解析解は良く一致し、提案する定式化および作成した解析プログラムは、液状化時の地盤挙動を正しく再現できることを示す結論を得た。

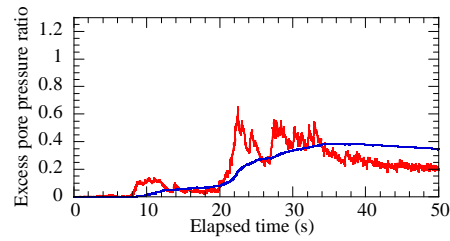
本論文では、理論解のある静的・動的な二相系地盤を検証対象とした。大変形解析に対する定式化の検証は残されている。妥当性実験の水圧消散勾配を透水係数によってパラメトリックに調整した。このことは実問題の予測解析において物性値の設定に課題を残す結果である。また、実地盤の大変形挙動に関しては本論文では示しておらず、別途妥当性確認実験および再現解析により確認する必要がある。

謝辞

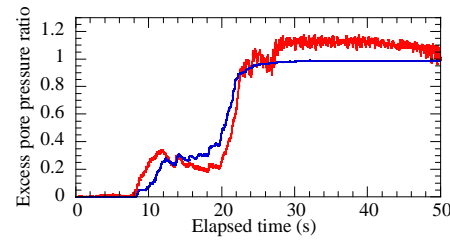
本研究を行うに当たり、京都大学の肥後陽介准教授に有益な助言を頂きました。ここに感謝の意を表します。



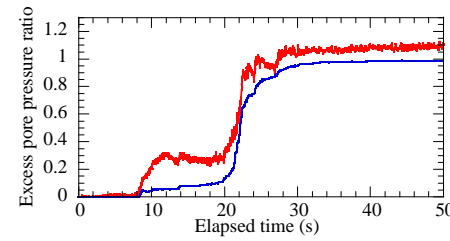
— 実測値
— 解析値



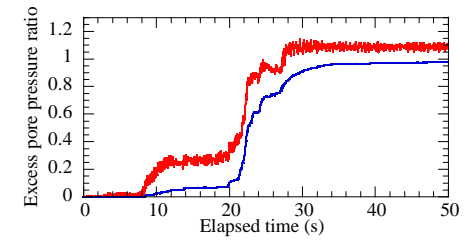
(a) P11 : G.L.-2.4m



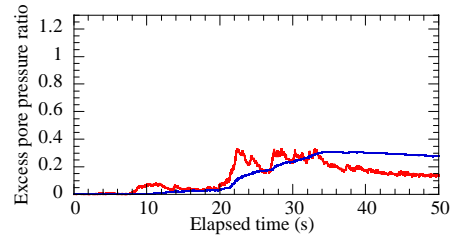
(d) P8 : G.L.-2.4m



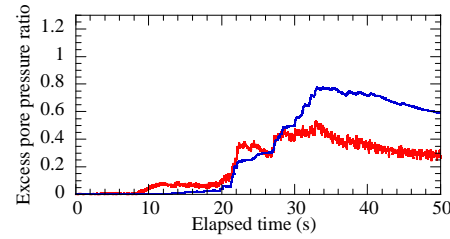
(g) P5 : G.L.-2.4m



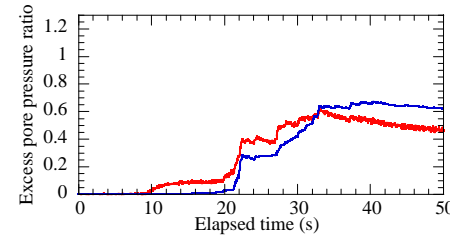
(i) P3 : G.L.-2.4m



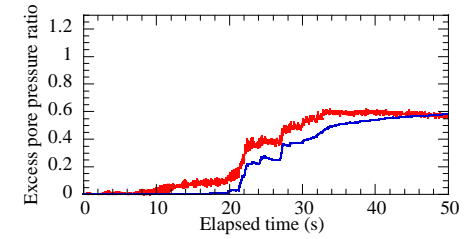
(b) P10 : G.L.-5.4m



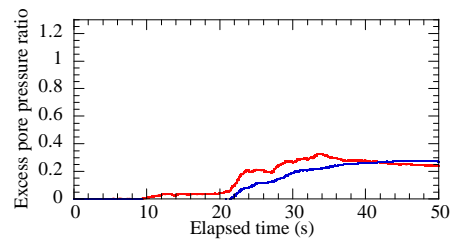
(e) P7 : G.L.-5.4m



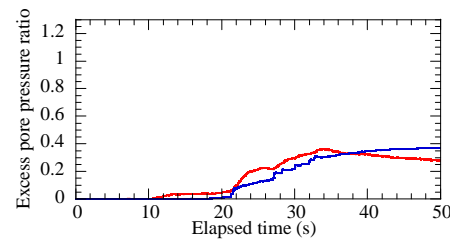
(h) P4 : G.L.-5.4m



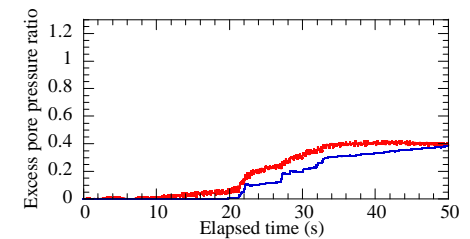
(j) P2 : G.L.-5.4m



(c) P9 : G.L.-7.5m

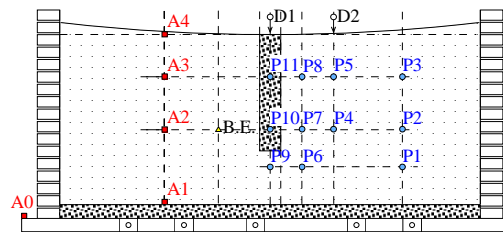


(f) P6 : G.L.-7.5m

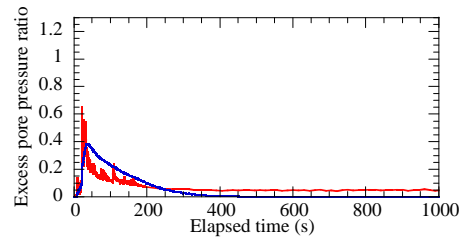


(k) P1 : G.L.-7.5m

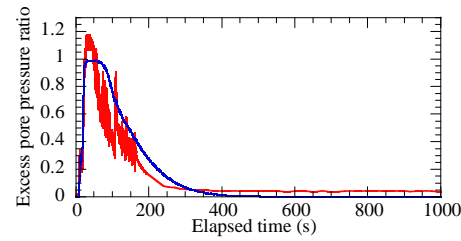
図-14 過剰間隙水圧比-水圧上昇過程 (D-100 : ドレーン有り、100Gal 加振)



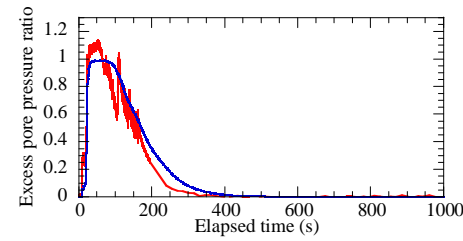
— 実測値
— 解析値



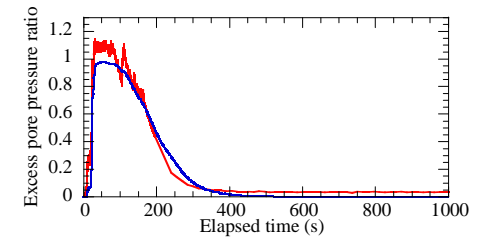
(a) P11 : G.L.-2.4m



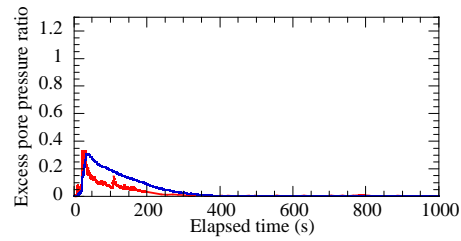
(d) P8 : G.L.-2.4m



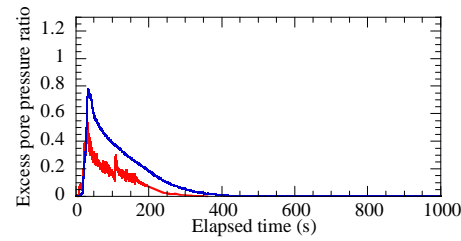
(g) P5 : G.L.-2.4m



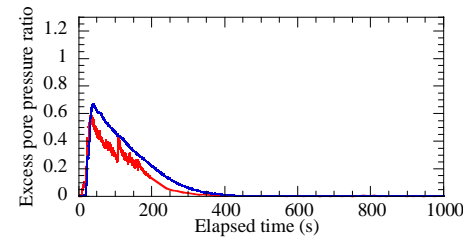
(i) P3 : G.L.-2.4m



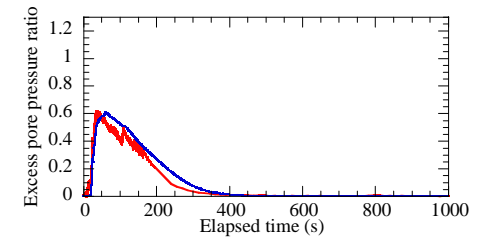
(b) P10 : G.L.-5.4m



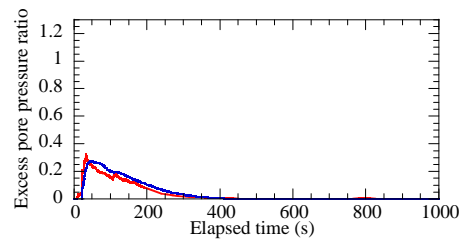
(e) P7 : G.L.-5.4m



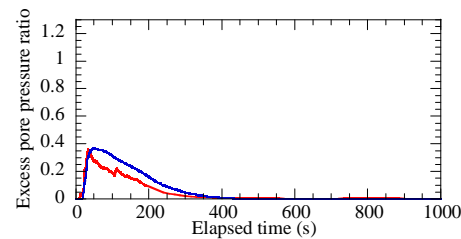
(h) P4 : G.L.-5.4m



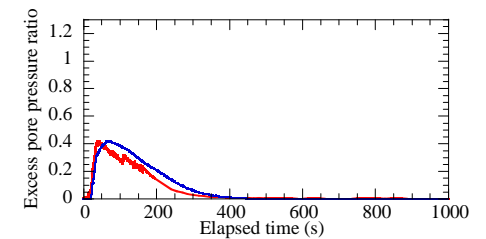
(j) P2 : G.L.-5.4m



(c) P9 : G.L.-7.5m



(f) P6 : G.L.-7.5m



(k) P1 : G.L.-7.5m

図-15 過剰間隙水圧比-水圧消散過程 (D-100 : ドレーン有り、100Gal 加振)

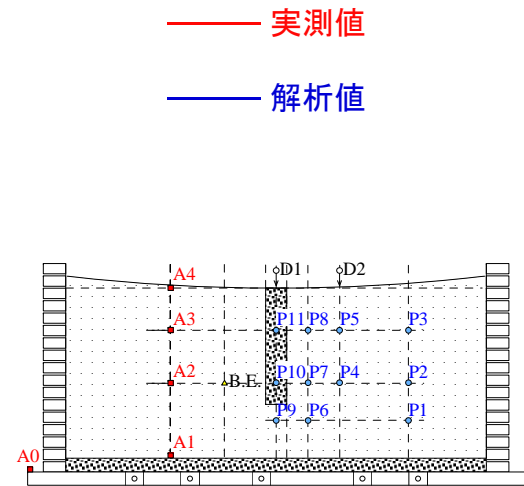
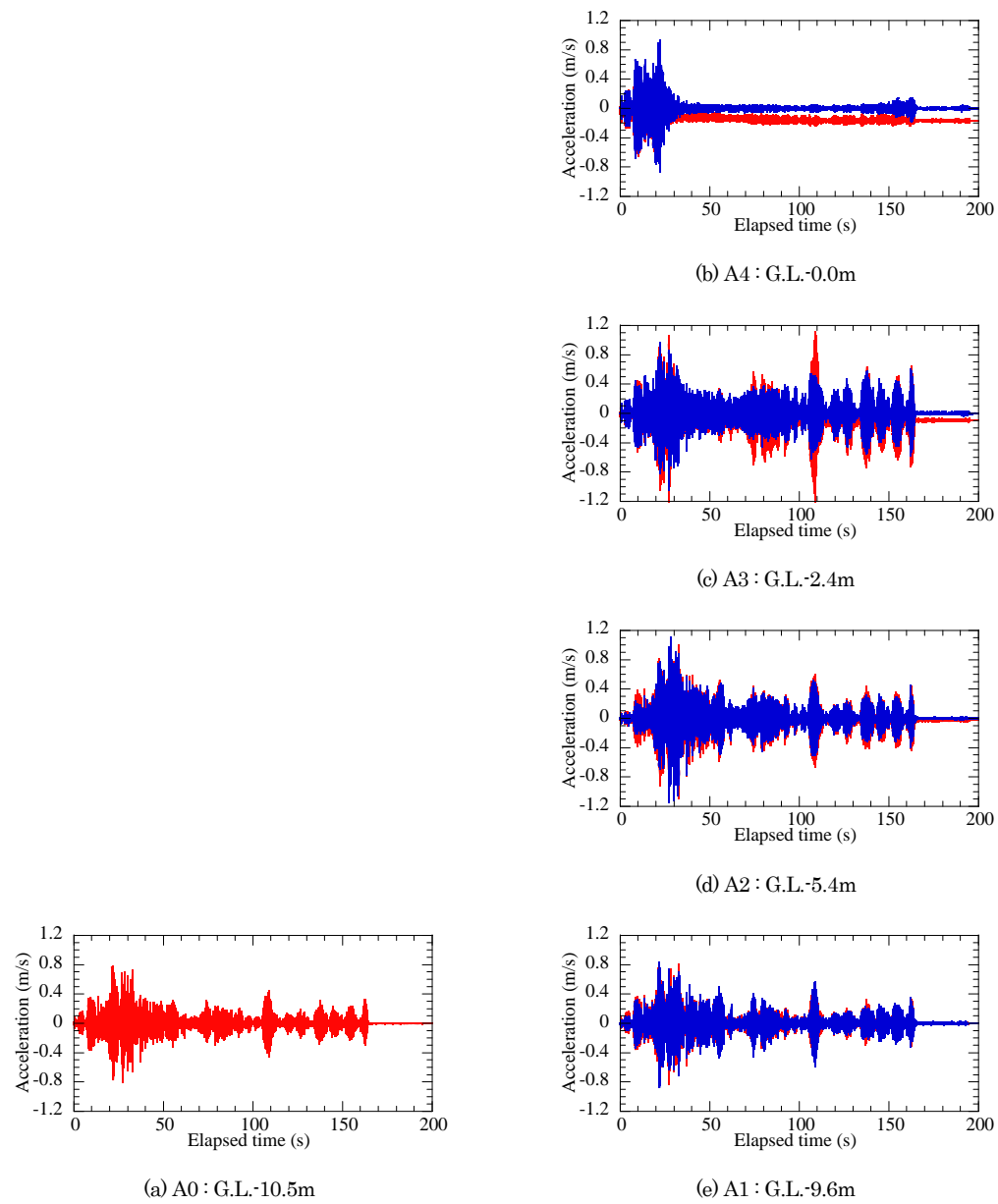
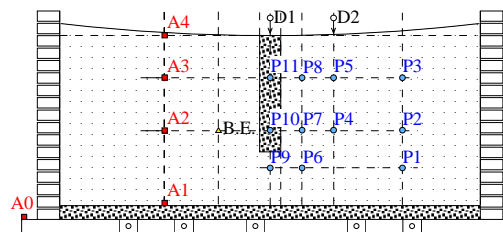
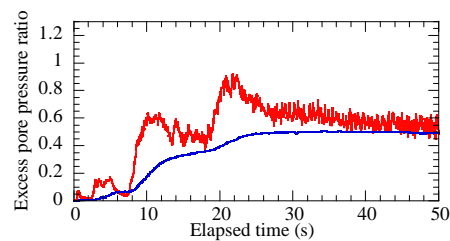


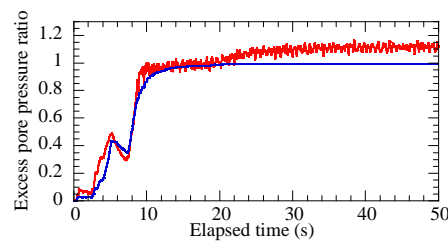
図-16 加速度時刻歴 (D-100 : ドレーン有り、100Gal 加振)



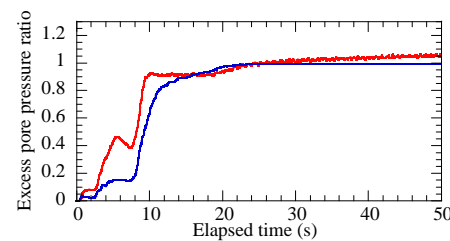
— 実測値
— 解析値



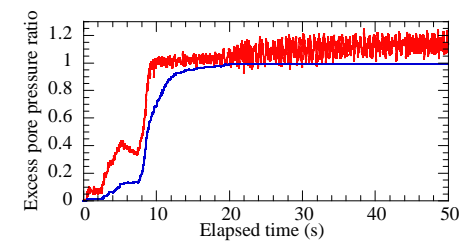
(a) P11 : G.L.-2.4m



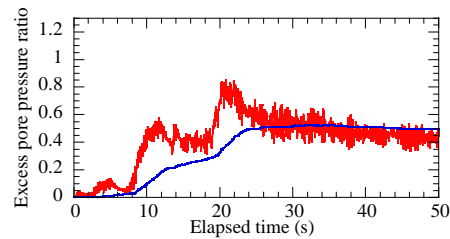
(d) P8 : G.L.-2.4m



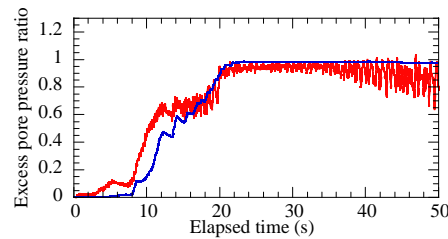
(g) P5 : G.L.-2.4m



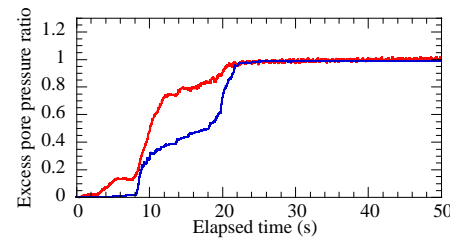
(i) P3 : G.L.-2.4m



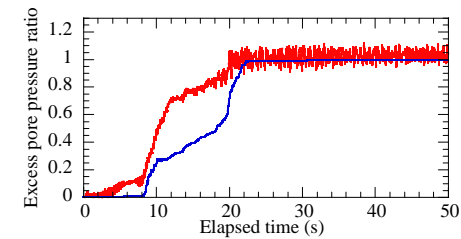
(b) P10 : G.L.-5.4m



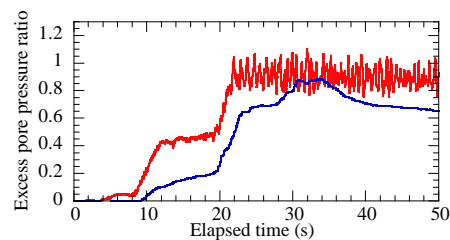
(e) P7 : G.L.-5.4m



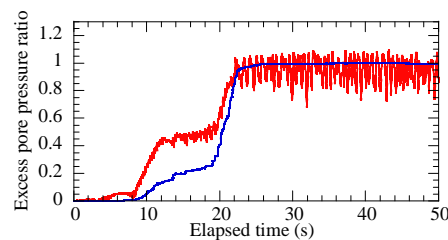
(h) P4 : G.L.-5.4m



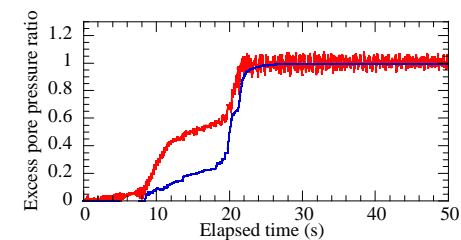
(j) P2 : G.L.-5.4m



(c) P9 : G.L.-7.5m

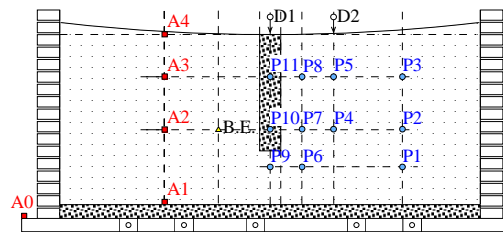


(f) P6 : G.L.-7.5m

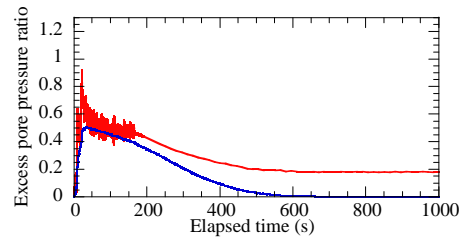


(k) P1 : G.L.-7.5m

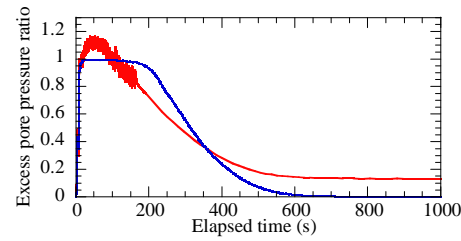
図-17 過剰間隙水圧比—水圧上昇過程 (D-200 : ドレーン有り、200Gal 加振)



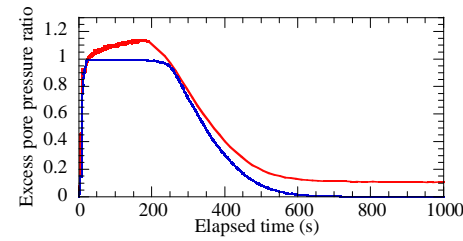
— 実測値
— 解析値



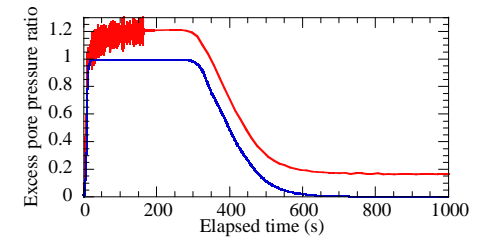
(a) P11 : G.L.-2.4m



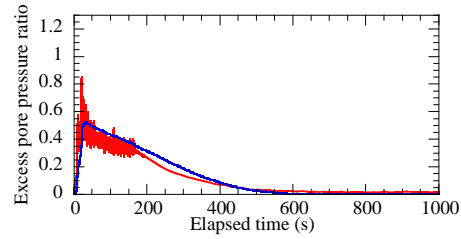
(d) P8 : G.L.-2.4m



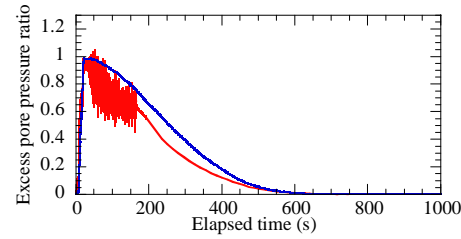
(g) P5 : G.L.-2.4m



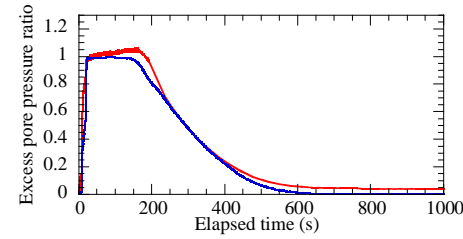
(i) P3 : G.L.-2.4m



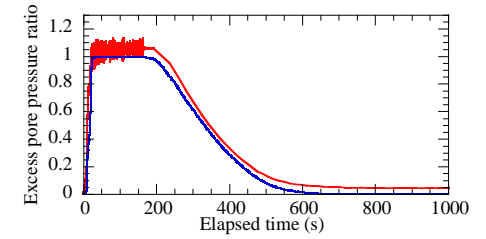
(b) P10 : G.L.-5.4m



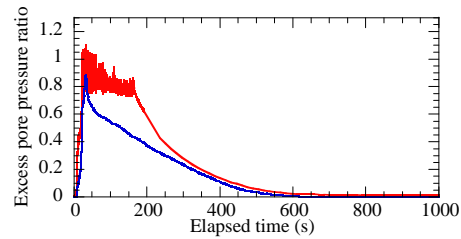
(e) P7 : G.L.-5.4m



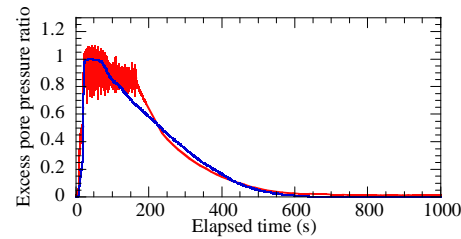
(h) P4 : G.L.-5.4m



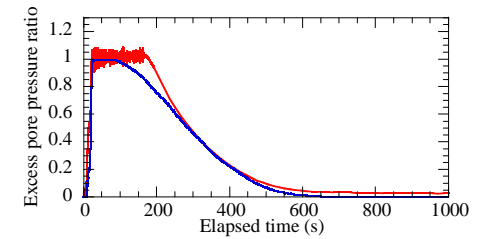
(j) P2 : G.L.-5.4m



(c) P9 : G.L.-7.5m



(f) P6 : G.L.-7.5m



(k) P1 : G.L.-7.5m

図-18 過剰間隙水圧比-水圧消散過程 (D-200 : ドレーン有り、200Gal 加振)

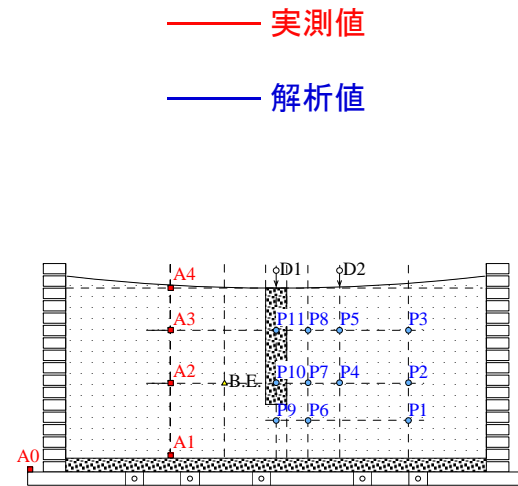
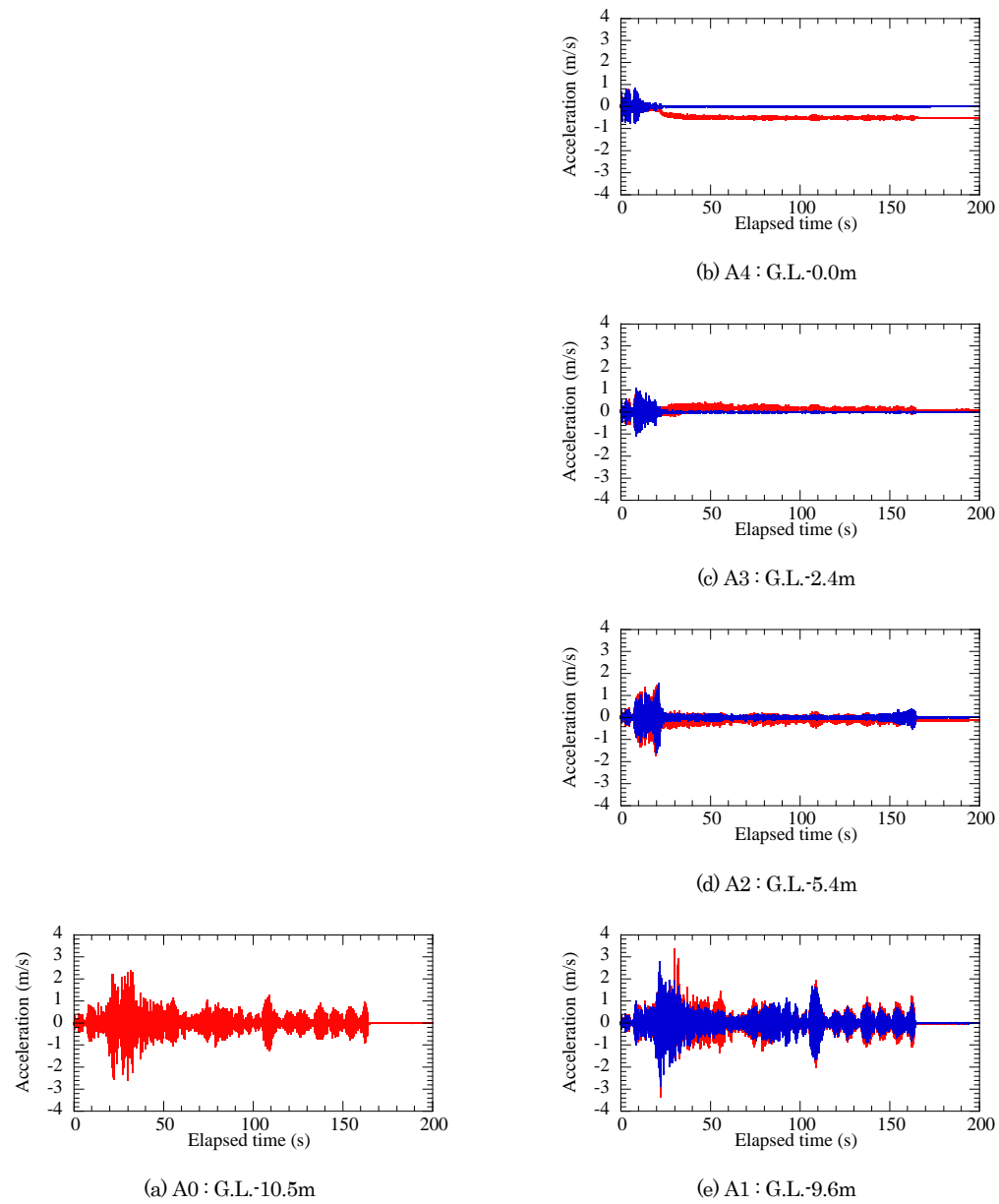


図-19 加速度時刻歴 (D-200 : ドレーン有り、200Gal 加振)

<参考文献>

- 1) Higo, Y., Oka, F., Kimoto, S., Morinaka, Y., Goto, Y. and Zhen, C. : A coupled mpm-fdm analysis method for multi-phase elasto-plastic soils, *Soils and Foundations*, Vol.50, No.4, pp.515-532, 2010.
- 2) Hideto Nonoyama, Shuji Moriguchi, Kazuhide Sawada and Atsushi Yashima : Slope stability analysis using smoothed particle hydrodynamics (SPH) method, *Soils and Foundations*, Vol. 55, No.2, pp. 458-470, 2015.
- 3) Sulsky, D., Chen, Z. and Schreyer, H.L. : A particle method for history-dependent materials, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.118, pp179-196, 1994.
- 4) 桐山 貴俊 : GIMPM を用いた三軸圧縮試験の破壊シミュレーション, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 69, No. 2, pp.I_321-I_332, 2013.
- 5) 桐山 貴俊 : MPM を用いた三軸供試体のせん断帯形成に関する数値解析的検討, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol. 70, No.2 pp.I_441-I_451, 2014
- 6) 桐山 貴俊 : 支配領域の可変性を考慮した粒子法の地盤大変形問題への適用, 土木学会論文集 A2 (応用力学), Vol.71, No. 2, pp. I_545-I_555, 2015
- 7) Zhang, H.W., Wang, K.P. and and Chen, Z. : Material point method for dynamic analysis of saturated porous media under external contact/impact of solid bodies, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol.198, pp.1456-1472, 2009.
- 8) Abe, K., Soga, K., and Bandara, S.: Material Point Method for Coupled Hydromechanical Problems, *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol. 140, No.3, pp.04013033-1-041013033-16, 2014.
- 9) Bandara, S. and Soga, K. : Coupling of soil deformation and pore fluid flow using material point method, *Computers and Geotechnics*, Vol.63, pp.199-214, 2015.
- 10) Biot, M.A. : General theory of three-dimensional consolidation, *Journal of Applied Physics*, Vol.12, No.2, pp.155-164, 1941.
- 11) Biot, M.A. : Mechanics of deformation and acoustic propagation in porous media, *Journal of Applied Physics*, Vol.33, No.4, pp.1482-1498, 1962.
- 12) Zienkiewicz, O.C., Humpheson, C. and Lewis, R.W. : A unified approach to soil mechanics problems (including plasticity and visco-plasticity), Chapter 4, *Finite Element in Geomechanics*, Wiley, New York, 1977.
- 13) Zienkiewicz, O.C., Chang, C.T. and Bettess, P. : Drained, undrained, consolidating and dynamic behaviour assumptions in soils, *Geotechnique*, Vol.30, No.4, pp.385-395, 1980.
- 14) Zienkiewicz, O.C. : Basic formulation of static and dynamic behaviours of soil and other porous media, *Applied Mathematics and Mechanics*, Vol.3, No.4, pp.457-468, 1982.
- 15) Zienkiewicz, O.C. and Bettess, P. : Soils and other saturated media under transient, dynamic conditions; general formulation and the validity of various simplifying, Chapter 1, *Soil Mechanics - Transient and Cyclic Loads*, John Wiley & Sons Ltd, 1982.
- 16) Zienkiewicz, O.C., Shiomi, T. : Dynamic behaviour of saturated porous media; the generalized Biot formulation and its numerical solution, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.8, pp.71-96, 1984.
- 17) 龍岡 文夫・福島 伸二 : 砂のランダム繰返入力に対する応力～ひずみ関係のモデル化について(1), 生産研究, 第 30 巻, 9 号, pp.26～29, 1978.
- 18) 龍岡 文夫・福島 伸二 : 砂のランダム繰返入力に対する応力～ひずみ関係のモデル化について(2), 生産研究, 第 30 巻, 10 号, pp.9～12, 1978.
- 19) 福武毅芳 : 土の多方向繰返しせん断特性を考慮した地盤・構造物系の三次元液状化解析に関する研究, 名古屋工業大学博士論文, 1997.
- 20) Terzaghi, K. : *Erdbaumechanik auf Bodenphysikalischer Grundlage*, 1924.
- 21) Simon, B.R., Zienkiewicz, O.C. and Paul, D.K. : An analytical solution for the transient response of saturated porous elastic solids, *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol.8, pp.381-398, 1984.
- 22) 三笠正人 : 軟弱粘土の圧密, 鹿島出版, 1963.
- 23) Gibson, R.E., Schiffman, R.L. and Cargill, K.W. : The theory of one-dimensional consolidation of saturated clays. II. Finite nonlinear consolidation of thick homogeneous layers, *Canadian Geotechnical Journal*, Vol.18, No.2, pp. 280-293, 1981.
- 24) 山口柏樹 : 土質力学 (全改訂) 講義と演習, 技報堂出版, 1969.
- 25) 2次元液状化解析プログラムの開発に関する調査・研究, 財団法人防災研究協会, 1990.
- 26) 加藤満 : 多次元液状化解析法とその応用に関する研究, 岐阜大学工学博士論文, 1995.
- 27) 井合進 : グラベルドレーンの大型模型振動実験と解析, 港湾空港技術研究所報告, Vol.27, No.3, 1988.
- 28) 伊藤浩二 : 動的有効応力解析プログラム「EFFECT」(その1) - 基礎理論と地盤構成モデル -, 大林組技術研究所報, 1995.
- 29) Takatoshi Kiriya : Application of MPM to large deformation analysis of embankment, *Proceedings of The 1st International Conference on Computational Engineering and Science for Safety and Environmental Problems*, April 13-16, Sendai, Japan, pp.689-692, 2014