

アンサンブルカルマンフィルタによる地下水流動モデルの逐次データ同化

山本 真哉 本多 眞 櫻井 英行
(技術研究所) (技術研究所) (技術研究所)

Application of Sequential Data Assimilation for a Groundwater Flow Model with Ensemble Kalman Filter

Shinya Yamamoto, Makoto Honda and Hideyuki Sakurai

岩盤の水利特性に関して入手できる情報は多くはないため、シミュレーションにより地下水流動の評価・予測を行う際には、不確かな物性値や境界条件のもとで地下水流動解析を行うことになる。この結果、信頼性の高い解析モデルを構築するのは容易でなく、試行錯誤的にモデルキャリブレーションを行っているのが現状である。本研究では、地下水モニタリングのデータを利用してデータ同化を行うことで、合理的に解析モデルを構築する方法について検討した。実際の地下構造物を対象にデータ同化を行ったところ、地下水位や流量の観測データを三次元地下水流動解析のモデルに同化することで、観測結果を再現する解析モデルを同定できることを示し、提案手法の有効性を示した。

Uncertainties in hydraulic parameters of a groundwater flow model often leads to significant differences between simulation results and real observations, making it difficult to obtain a reliable model. The sequential data assimilation technique allows to rationally calibrate a groundwater flow model with observation results. In this study, the ensemble Kalman filter is used to identify hydraulic parameters for a practical three-dimensional groundwater flow model of an existing underground structure. A data assimilation experiment using real field measurements showed promising results and demonstrated applicability of the proposed methodology.

1. はじめに

地下水流動解析に用いられる透水特性パラメータは原位置での取得が容易でないため、大きな不確かさを有する。このような不確かさは解析結果に大きな影響を与えうるため、解析精度の向上を目的に透水特性パラメータの試行錯誤的なキャリブレーションが行われる。しかし、キャリブレーションは解析者の技術と経験に大きく依存するため、解析者の力量に依らない、合理的な手法の確立が求められる。

データ同化は観測結果と解析モデルを統合する解析技術であり、いわゆる、逆解析としてパラメータを同定する手段として用いることができる¹⁾。データ同化の手法には様々なものが存在するが、Evensen²⁾によって提案されたアンサンブルカルマンフィルタは、実装の容易さと非線形モデルに対するロバスト性により広く用いられている手法の一つとなっている。筆者らはデータ同化手法の中でもアンサンブルカルマンフィルタが地下水流動解析の合理的なモデルキャリブレーションに有

効な解析技術であると考えており、その適用性を検証するのが本研究のねらいである。

なお、既往研究に着目すると、特に石油分野では貯留層の特性把握にアンサンブルカルマンフィルタを利用した事例がみられる³⁾⁶⁾。しかしながら、これらの研究の多くは、模擬データを用いた数値実験か、あるいは実測データを用いても単純なケースに留まっている。

本研究では実在の地下構造物における地下水流動解析を対象に、実際の観測結果を用いてアンサンブルカルマンフィルタの適用性を検証した。具体的には三次元有限要素モデルに地下水モニタリングの観測データを逐次的に同化し、透水係数のキャリブレーションを行った。そして、観測の再現精度や透水係数の推定精度や信頼性について考察した。

2. 手法

2.1 アンサンブルカルマンフィルタ

本節ではアンサンブルカルマンフィルタの概要

について述べる。まず、以下のような状態空間モデルを考える。

$$\mathbf{x}_t = \mathbf{f}(\mathbf{x}_{t-1}, \mathbf{v}_t), \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{H}\mathbf{x}_t + \boldsymbol{\omega}_t, \quad \boldsymbol{\omega}_t \sim N(\mathbf{0}, \mathbf{R}) \quad (2)$$

ここで、 \mathbf{x}_t は時刻 t における状態変数のベクトル(以降、状態ベクトルとする)、 \mathbf{f} は非線形性を有するシステムモデル、 \mathbf{y} は観測値からなるベクトル(以降、観測ベクトルとする)、 \mathbf{H} は線形の観測演算子である。また、 \mathbf{v} はシステムノイズであり、 $\boldsymbol{\omega}$ は平均0、共分散行列 \mathbf{R} の正規分布に従う観測ノイズである。逐次データ同化の主たる目的は、観測結果で条件付けられたときの状態ベクトル \mathbf{x} の事後分布を確率密度関数として推定することである。しかし、これを解析的に解くことは一般的に不可能である。アンサンブルカルマンフィルタでは、状態変数の事前・事後分布を多数の実現値で表現するためにモンテカルロ近似を用いる。このとき、状態ベクトルの平均値および共分散は以下のように近似される。

$$\hat{\mathbf{x}}_t \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \mathbf{x}_t^{(i)} \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_t \approx \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (\mathbf{x}_y^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_t)(\mathbf{x}_y^{(i)} - \hat{\mathbf{x}}_t)^T \quad (4)$$

ここで、 N はアンサンブルのサンプル数であり、 i はサンプルのインデックスを表す。一般的なカルマンフィルタの方法にしたがい、状態ベクトルは次式のように更新できる。

$$\mathbf{x}_t^{\mathbf{a}(i)} = \mathbf{x}_t^{\mathbf{f}(i)} + \mathbf{K}_t(\mathbf{y}_t + \boldsymbol{\omega}_t - \mathbf{H}\mathbf{x}_t^{\mathbf{f}(i)}) \quad (5)$$

$$\mathbf{K}_t = \mathbf{P}_t \mathbf{H}^T (\mathbf{H} \mathbf{P}_t \mathbf{H}^T + \mathbf{R}_t)^{-1} \quad (6)$$

添え字の \mathbf{f} と \mathbf{a} はそれぞれ予測時の状態変数と観測に基づいて更新された状態ベクトルを表す。また、 \mathbf{K} はカルマンゲインであり、 \mathbf{R} は観測誤差 $\boldsymbol{\omega}$ から算出される共分散行列である。

アンサンブルカルマンフィルタの実際の手順は予測と観測更新の2段階に分けられる。予測においては、アンサンブルの各メンバーに対して、式(1)のように次の観測結果が得られる時刻までの非定常シミュレーションを実行することで状態ベクトルの事前分布を得る。次に観測更新では観測値に平均値が0のガウスノイズを付加し⁷⁾、これから、各アンサンブルメンバーの状態ベクトルを式(5)により更

新することで事後分布が求められる。

2.2 地下水流動モデルの逐次データ同化

本研究では多孔質媒体における三次元飽和不飽和地下水流動解析に対してアンサンブルカルマンフィルタを適用する。

地下水流動解析の支配方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(K_r(\theta) K \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_r(\theta) K \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K_r(\theta) K \frac{\partial h}{\partial z} \right) \\ = (C + \beta S_s) \frac{\partial h}{\partial t} \end{aligned}$$

$$\beta = \begin{cases} 0 & \text{不飽和状態} \\ 1 & \text{飽和状態} \end{cases} \quad (7)$$

ここで、 h は圧力水頭、 K は飽和透水係数、 K_r は比透水係数、 θ は体積含水率、 C は比水分容量、 S は比貯留係数である。ただし、透水係数の異方性は考慮しないものとした。不飽和特性に関しては現場実験の結果を用いた。

本研究ではアンサンブルカルマンフィルタにより飽和透水係数の同定を考えるにあたり、状態ベクトルを以下のように定義した。

$$\mathbf{x} = [h_1, \dots, h_n | q_1, \dots, q_n | \log K_1, \dots, \log K_m] \quad (8)$$

n は解析メッシュの節点数、 m は地質区分の数に相当する。状態ベクトルには主たる状態変数である圧力水頭に加えて、推定対象の飽和透水係数を含めている。飽和透水係数は時間変化しないパラメータであるが、本研究ではデータ同化の際に飽和透水係数が増加することを許し、逐次更新していくものとした。さらに、流量の観測結果を同化に用いるため、節点流量 q も状態ベクトルに組み込んだ。

一方、観測ベクトルに関しては、地下水のモニタリングにより圧力水頭または水位と地下構造物への流入量のデータが取得されていることから、以下のように定義した。

$$\mathbf{y} = [h_1, \dots, h_p | Q_1^{obs}, \dots, Q_d^{obs}] \quad (9)$$

ここで、 P は観測孔の数である。また、 Q は特定の領域を流れる地下水の量であるが、解析では領域内に存在する節点流量の総和に相当する。

順解析の非定常計算には有限要素法である

Dtransu-3D/EL[®]をアンサンブルカルマンフィルタ用に改良したものをを用いた。

3. 実験方法

実構造物スケールの問題に対して、アンサンブルカルマンフィルタの適用性を評価するために、実在の地下構造物を検討対象とした。本構造物は地下約40mの位置に複数の空洞を有しており、空洞周辺で複数の地下水モニタリングが行われている。

図-1に対象サイトの地質区分と地下水流動解析に用いる有限要素メッシュを示す。メッシュの節点数は約3万4千、要素数は約5万となる。地質構造に関しては、5つの地層が存在し、大きくは地表付近の風化帯と深部の新鮮岩により構成される。加えて、本サイトでは計10個の亀裂帯の存在が確認されている。本実験の目的は各地質区分の透水性を観測データから同定することであり、地層5個と亀裂帯10個を合わせた計15個の未知パラメータを推定する逆問題になる。境界条件については、解析メッシュモデルの一部は海岸線となっており、この面に固定水頭境界を設定した。また、地下水涵養を表現するため、上面に既知流量境界を設け、現地の観測雨量に基づいて流量を与えた。メッシュのその他の面は不等水境界とした。

本サイトでは地下水位と流量の2種類の観測が行われており、地下水位については図-2に示すように全14の観測孔においてデータが取得されている。流量は岩盤空洞に流入する地下水の湧水量と空洞上部に位置するトンネルからの給水量の2種類が計測されている。なお、湧水量および給水量はともに3つの領域に分けて計測が実施されており、合計6個の流量に関するデータが存在する。地下水位および流量はともに1日毎にデータが取得されている。

4. 模擬観測データによる数値実験

アンサンブルカルマンフィルタの適用性を評価するための事前検討として、地下水流動解析のモデルに誤差がない、すなわち、モデルは地下水流動を完全に再現でき、かつ、観測データにも一切誤差がない状態でデータ同化を実行した。これは、理想的な条件下であれば、与えられた観測情報により地質区分の透水係数を正しく同定できることを確認するためである。具体的には次のような手順に従った。

最初に、あらかじめ地層および亀裂帯の透水係数の仮の真値を設定しておき、これを用いて順解析、

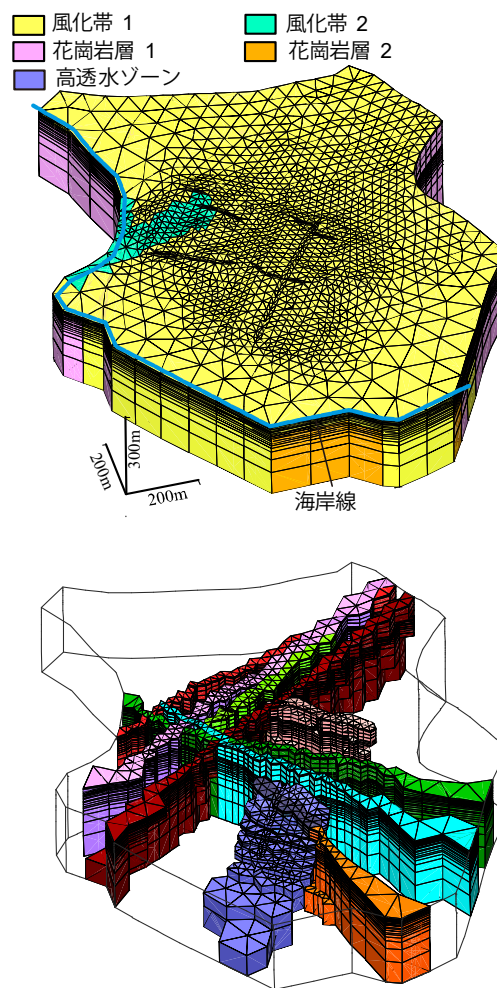


図-1 有限要素モデルと地質構造

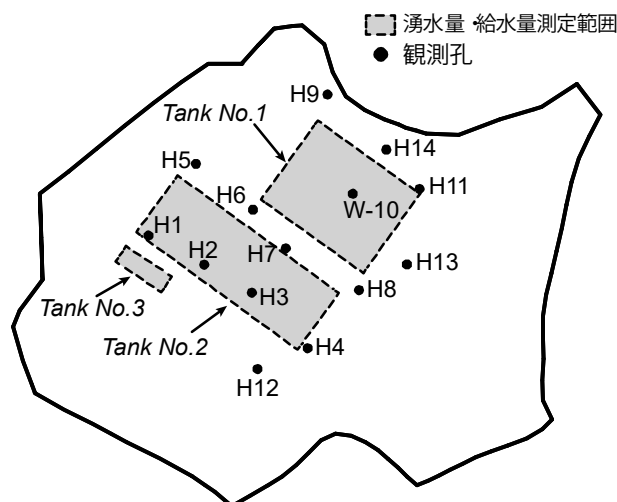


図-2 観測点の配置

すなわち、地下水流動の非定常解析を実行する。この解析結果より各観測地点における経時的な圧力水頭(水位)と流量を取得し、これを模擬的に観測データとする。なお、透水係数の真値には事前調査より得られた参考値を設定した。次に、透水係数を未知として、模擬観測データを用いてアンサンブルカルマンフィルタを実行し、透水係数の同定を行う。こ

のときの各地質区分の透水係数の初期値には、新鮮岩に区分されるものは 10^{-7}m/s 、風化岩もしくは亀裂帯に区分されるものは 10^{-5}m/s とした。

観測誤差は、圧力水頭、流量ともに計器間で独立であるものとし、平均値0、標準偏差が 10^{-3} のガウス分布を仮定した。アンサンブルカルマンフィルタのアンサンブルの大きさは96サンプルとした。

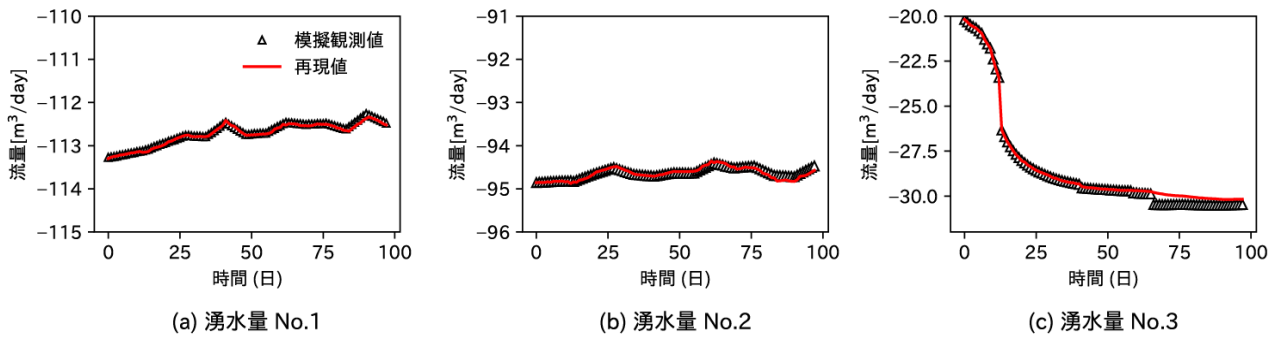


図-3 模擬観測結果を同化した場合の湧水量の再現結果例

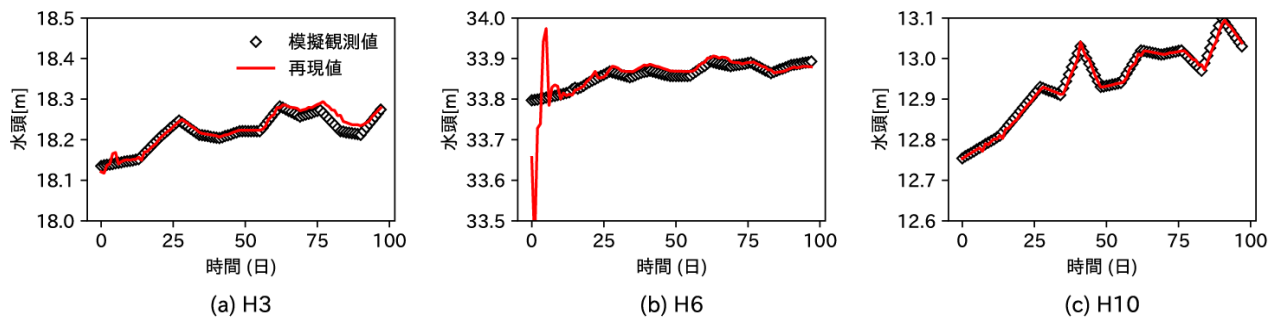


図-4 模擬観測結果を同化した場合の圧力水頭の再現結果例

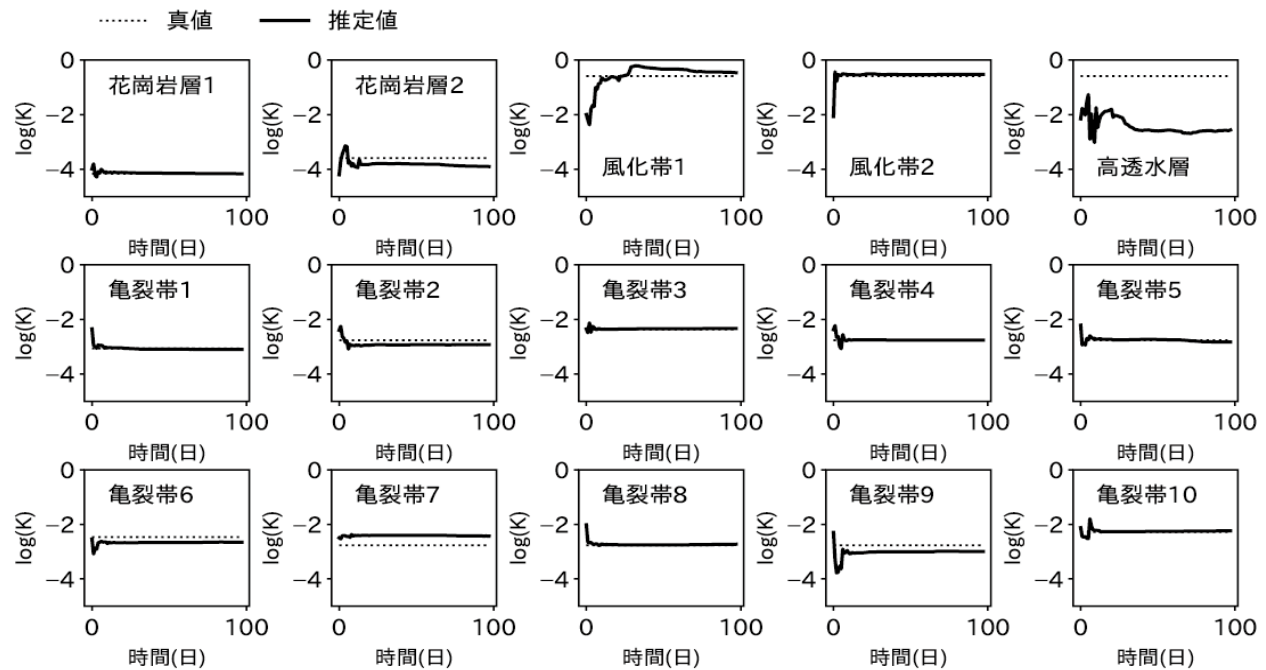


図-5 模擬観測結果を同化した際の透水係数の推定結果

紙面の都合上、ここでは結果の一例を示す。図-3は湧水量の推定結果を時系列で示したものであり、推定値は事後分布、すなわち、観測結果をもとに修正された値のアンサンブル平均である。本結果より、対象期間全体にわたって模擬観測データとほぼ一致しているのが分かる。図-4に示した水圧についても同様に同化が繰り返されるに従い、推定値が観測値に収束しているが、例えば、H6のように観測データに収束するまでに時間を要するものも見られる。

図-5は各地質区分における透水係数のアンサンブル平均の経時変化である。透水係数の初期値と真値が大きく異なるものであっても約10日後には推定値は真値に近い値を示しているのが確認できる。ただし、高透水層については真値から大きく乖離しており真値の同定に失敗している。この理由としては、この地質区分は観測が行われている領域から遠い距離で局所的に分布しており、観測更新に用いるデータにはこの地質区分の透水係数を同定できるだけの情報が含まれていないためと考えられる。

図-6は、観測点以外の場所の再現精度を確認するため、有限要素モデルの各節点での水圧誤差を空間分布として表したものである。主に地表付近に比較的大きな誤差が分布し、特に地形が尾根状の箇所に集中している。これは不飽和帯が存在する領域に対応しており、不飽和特性に伴うモデルの非線形性が誤差を生じさせる原因となっていることを示唆している。図-5では透水係数の推定誤差自体はおおむね小さいものの、不飽和領域では推定精度が低いことには留意が必要である。

アンサンブルカルマンフィルタの利点の一つとして非線形モデルに対する適用性が挙げられるが、

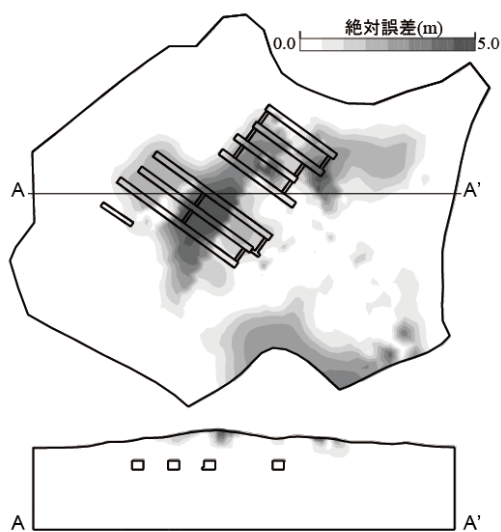


図-6 圧力水頭の誤差分布

ベースとなるカルマンフィルタは状態変数のガウス性を前提としている。したがって、モデルの非線形性が極めて強いケースでは、状態変数がガウス分布に従うとしても、時間更新(予測)のプロセスでガウス性が大きく崩れ、結果的に妥当な事後分布が得られなくなる場合があること⁹⁾には注意が必要である。

図-7は地下水位観測孔H3およびH6における水圧のアンサンブル値のヒストグラムであり、予測(時間更新)により得られた事前分布に相当する。10日目の事前分布をH3とH6と比較すると、H6の分布はガウス分布に近い形状が確認できるが、H3では明らかに2峰の分布をなしており、ガウス性が失われているのが分かる。これらの観測孔が位置するのは、H3が尾根部、H6は標高の低い領域である。地下水のポテンシャル分布を考慮するとH3の2峰分布は地表付近の不飽和条件が関与していると考えられる。しかしながら2峰分布のピークの値の差は非常に小さく、解析精製度に与える影響は限定的であるといえる。また、H3の80日目のヒストグラムでは2峰分布となっておらず確率密度関数の形状が経時的に変化していることが分かる。

モンテカルロ法の精度はサンプル数に大きく依存することから、アンサンブルの大きさがデータ同化の結果に影響を与えることが予想される。しかし、地下水流動解析は一般的に計算時間を要するため、データ同化の精度を確保しつつ、計算コストを抑えられるように妥当なアンサンブルの大きさを設定することが必要である。図-8はアンサンブルの大きさを変化させたときの同化結果の誤差を比較したものである。縦軸は各観測孔における圧力水頭の再現誤差の総和を表している。この結果から、サンプル

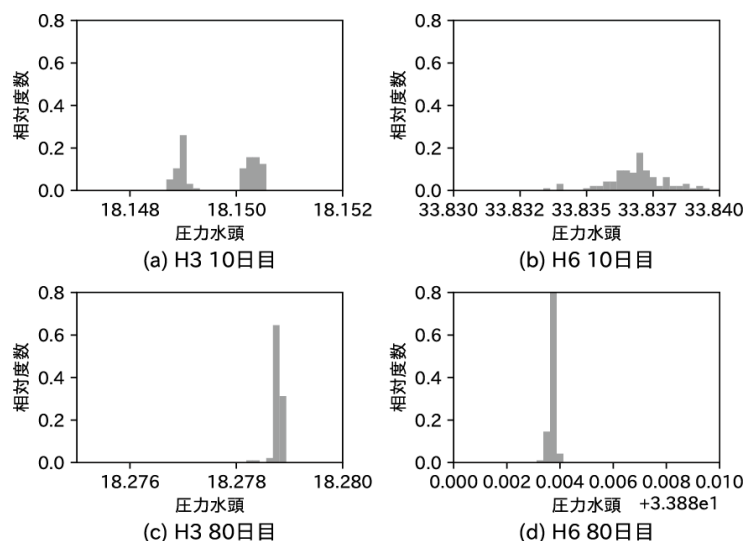


図-7 圧力水頭の前分布と事後分布

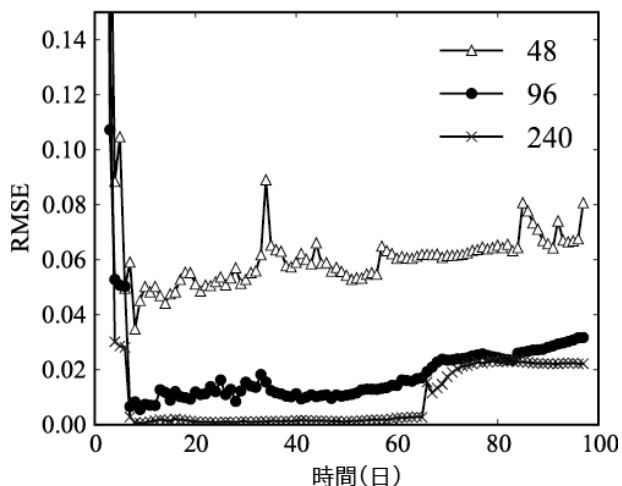


図-8 アンサンブルのサンプル数の違いによる圧力水頭の誤差の比較

数の増加により誤差が明らかに減少するのが分かる。また、サンプル数 240 のケースに着目すると、65 日目前後で誤差の大きさが変化しているが、これは 65 日目以前の期間で同定したモデルが過学習の状態にあると解釈できる。以上から計算コストと誤差の大きさ等を鑑み、本研究ではサンプル数は 96 が妥当と判断した。このように再現誤差の経時的変化はデータ同化の結果の診断に有用な情報を与える。

本章では模擬観測結果を用いてデータ同化を実行することにより、解くべき逆問題の性質が明確に

なった。データ同化を行う際には、事前に模擬データをを用いた検証の手順を踏むことが重要である。

5. 実測データを用いた同化実験

ここでは実測データを用いた同化実験について述べる。

地下水流動のデータ同化解析においては、圧力水頭の初期値も同定結果に対して影響を及ぼすと考えられるが、実際には未知であるため、模擬観測データの同化実験と同じ初期条件を用いた。ただし、データ同化を開始する日以前の 100 日間において、非定常の順解析を実施することで、事前に初期条件から安定した水圧のポテンシャルとなるようにした。観測データの同化には圧力水頭のかわりに地下水位を用いた。なお、シミュレーション結果における地下水位は圧力水頭が 0 となる深度としている。観測結果が有する誤差に関しては、観測データの変動を参考にして、地下水位は一律に平均 0、標準偏差が 0.01m の正規分布の誤差を仮定した。また、湧水量および給水量は、平均的な流量の 1/10 の値を標準偏差とする、平均 0 の正規分布の誤差を仮定した。地下水位、流量とも観測データ間の誤差の相関はないものとした。その他の条件は、模擬観測データの数値実験と同様とした。

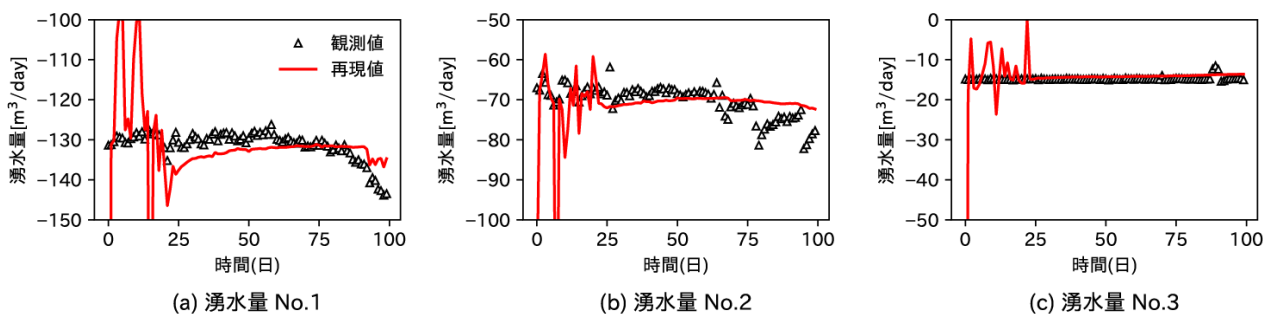


図-9 実観測結果を同化した際の湧水量の再現結果例

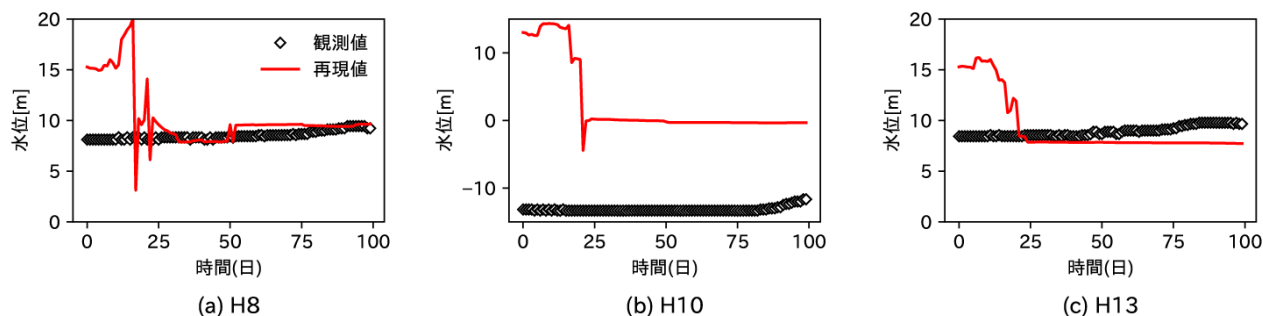


図-10 実観測結果を同化した際の地下水位の再現結果例

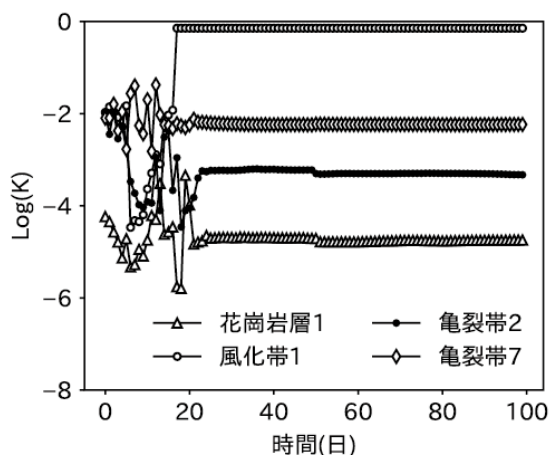
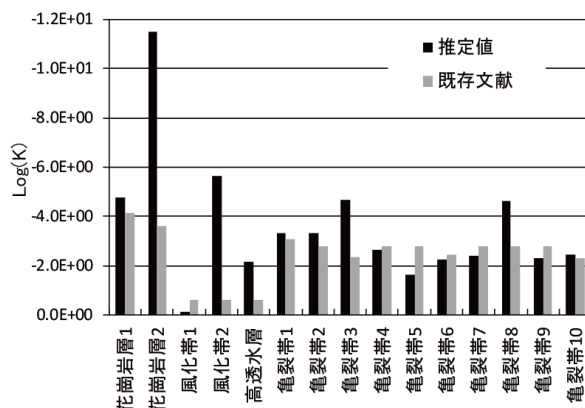


図-11 透水係数の推定値の経時変化

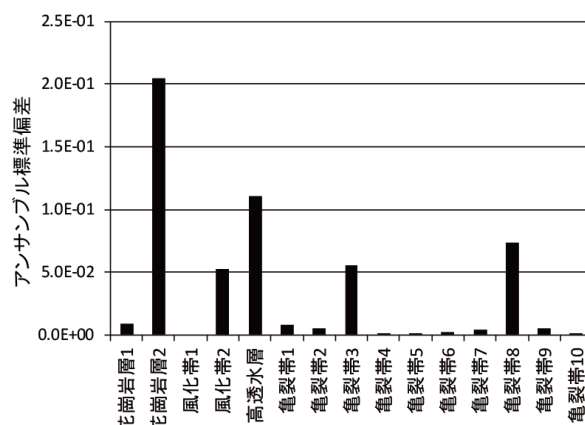
図-9、図-10はデータ同化により得られた湧水量および地下水位の解析値を実測データと比較したものである。解析値は約20日目までの期間で大きく変動しているが、以降は安定しておおむね実測値に近い値を示しているのが分かる。なお、実測データではNo.1およびNo.2の湧水量が後半の期間で急激に低下している。さらに、No.2では平均的には漸減する傾向にあるが、詳細に見ると周期的な変動が認められる。一方、解析結果ではこのような変動は表れておらず、透水係数の値を適切に設定するだけでは実測値の挙動を再現することは困難と考えられる。実測値の変動要因の特定はできていないが、人為的な影響なども考えられ、透水係数以外にも解析モデルの誤差が存在することを意味している。

地下水位は、初期を除き、多くの観測孔でアンサンブル平均と実測値の誤差は2m以下となった。ただし、全観測孔のうち、H3、H10(図-9(b))、H12の3孔については大きな誤差を示した。特にH3、H10の近傍には水を供給する坑道が存在するため、解析上で定水頭境界を与えているが、実際にはそれよりも低い地下水位が観測されていることを踏まえると、例えば、この近傍に透水性の高い亀裂帯の存在が存在しているなども考えられ、解析モデルの地質構造の精度が不足している可能性が考えられる。

透水係数の同定結果例を図-11に示す。最初の約20日間は、透水係数が同定される過程にあり、推定値が大きく変動する。これに伴い、湧水量や水位の解析値も当該期間で大きく変動している。その後、透水係数の推定値は安定し、観測結果をある程度の精度で再現できるようになっているのが分かる。



(a) 透水係数の推定結果 (アンサンブル平均)



(b) 透水係数の推定値のばらつき

図-12 各地質区分の透水係数の推定値とアンサンブルのばらつき

図-12は100日目の時点で得られた透水係数の推定値である。ここでは参考として解析技術者の手によりキャリブレーションされた透水係数値も示している。両者は多くの区分で近い値を示しているものの、一部の区分では大きな差異がある。ここで、推定値と文献値の乖離が大きい地質区分に着目すると、明らかにアンサンブル標準偏差が大きくなっていることが分かり、推定値としては信頼性が低いことを示唆している。このように、透水係数の実測値がない状況で推定値の妥当性を判断する際、アンサンブルの標準偏差は解析結果の信頼性を反映する有用な指標になりうる。

なお、風化帯の透水係数の推定値と参照値の差は相対的に大きくなっている。これは、地表付近は不飽和領域となるため、有効透水係数は低い値となるが、地下水涵養のバランスを維持するために飽和透水係数は大きな値となり、結果として、地表付近の不飽和透水係数の同定が難しくなる。

6. おわりに

本研究ではアンサンブルカルマンフィルタを地下水流動解析のモデルキャリブレーション手法として利用するため、実在の地下構造物を対象に、地下水モニタリングの観測データを三次元地下水流動解析モデルに同化した。そして、この結果より提案手法の適用性を評価した。

最初に人工的に生成した模擬観測結果を用いてデータ同化の数値実験を行った結果、透水係数の真値を正しく同定できることを確認し、解析モデルや観測が持つ情報量が逆問題の条件として妥当であることがわかった。このような模擬観測結果を利用した数値実験は、実測データによる同化を行う前の検証として不可欠なプロセスとなる。

実測の観測値を用いたデータ同化では、同定されたモデルがおおむね実際の観測結果を再現できることが示された。一方で観測値と解析値の大きな乖離が認められる地点が存在しており、想定された水理地質構造または境界条件の一部が現実を十分表現できていないことがわかった。データ同化はモデルキャリブレーションだけでなく、同時に解析モデルの問題点を洗い出せる点においても役立つ。

また、アンサンブルベースのデータ同化手法では透水係数の推定結果が事後分布として算出されるため、透水係数の推定値だけでなく、ばらつきの大きさからその信頼度も評価できる。これは実際の透水係数の値が未知な状況において有用な情報を与える。

以上の結果から、アンサンブルカルマンフィルタによるデータ同化は地下水流動解析のモデルキャリブレーションを合理的に行う方法として有効であることが示された。

なお、本研究では解析モデルの不確かさとして、透水係数のみを考慮したが、水理地質構造や境界条件、初期条件にも不確かさが存在する。この他、数値解析の離散化誤差も解析結果の不確かさに影響を与える。これらの様々なレベルの不確かさを厳密にモデル化することは不可能であるが、地下水流動解析結果の妥当性を確認するためには、感度解析等を行い、可能な範囲で個々の不確かさが解析結果に与える影響の大きさを事前に把握しておくことが必要である。

謝辞

本研究を遂行するにあたり、英国レディング大学の P.J. van Leeuwen 教授には終始にわたって多大なるご指導を頂いた。ここに深謝の意を表す。

<参考文献>

- 1) van Leeuwen, P.J. & Evensen, G.: Data Assimilation and Inverse Methods in Terms of a Probabilistic Formulation, *Monthly Weather Review* 124(12), pp.2898-2913, 1996
- 2) Evensen, G.: Sequential data assimilation with a nonlinear quasi-geostrophic model using Monte Carlo methods to forecast error statistics, *Journal of Geophysical Research* 99(5), pp.10143-10162, 1994
- 3) Nævdal, G., Johnsen, L.M., Aanonsen, S.I. & Vefring, E.H.: Reservoir monitoring and continuous model updating using ensemble Kalman filter, *SPE journal* 10(01), pp.66-74, 2005
- 4) Chen, Y. & Zhang, D.: Data assimilation for transient flow in geologic formations via ensemble Kalman filter, *Advances in Water Resources* 29(8), pp.1107-1122, 2006
- 5) Seiler, A., Evensen, G., Skjervheim, J.A., Hove, J. & Vabø, J.: Using the enkf for history matching and uncertainty quantification of complex reservoir models, In L. Biegler et al. (eds), *Large-Scale Inverse Problems and Quantification of Uncertainty*: pp.247-271, 2010
- 6) ELSheikh, A.H., Pain, C.C., Fang, F., Gomes, J.L.M.A. & Navon, I.M.: Parameter estimation of subsurface flow models using iterative regularized ensemble Kalman filter, *Stochastic Environmental Research and Risk Assessment* 27(4), pp.877-897, 2012
- 7) Burgers, G., van Leeuwen, P. J. & Evensen, G.: Analysis scheme in the ensemble Kalman filter, *Monthly Weather Review* 126(6), pp.1719-1724, 1998
- 8) Nishigaki, M.: Density dependent transport analysis saturated-unsaturated porous media-3 dimensional Eulerian Lagrangian method, *Okayama Univ*, 2001
- 9) Bocquet, M., Pires, C.A. & Wu, L.: Beyond Gaussian Statistical Modeling in Geophysical Data Assimilation, *Monthly Weather Review* 138(8), pp.2997-3023, 2010